Bollettino
Unione Matematica Italiana

Anna Maria Ghirlanda

Sui grafi finiti autocommutabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 281–284.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_281_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Sui grafi finiti autocommutabili

Nota di ANNA MARIA GHIRLANDA (a Ferrara) (*)

Sunto. - *Si determinano i grafi finiti che sono isomorfi con i relativi grafi* commutati.

1. Nella recente monografia di O. ORE [1] sulla teoria dei grafi, dopo aver introdotto la nozione di *grafo commutato* [2] di un dato grafo (non orientato) si propone [3] di determinare tutti i grafi che sono isomorfi con i relativi grafi commutati e che possiamo chiamare *grafi autocommutabili.* Nella presente Nota rispondiamo al quesito proposto per il caso dei grafi finiti.

Ricordiamo ora brevemente le nozioni e le definizioni essenziali. Per grafo G finito, non orientato, si intende l'ente costituito da un insieme finito V di elementi detti *vertici* del grafo, da un secondo insieme S di elementi detti *spigoli* del grafo e da una applicazione di S in un sottoinsieme dell'insieme C delle coppie non ordinate di elementi di V.

Sia n il numero degli elementi di V ed m quello degli elementi di S; indicheremo gli elementi di V, i vertici, con a_i $(i = 1, \ldots, n)$ e quelli di S con s_j $(j = 1, \ldots, m)$. Ad ogni s_j si potrà dunque far corrispondere una ed una sola coppia non ordinata di vertici *distinti* [4], (a_l, a_m), ma non necessariamente viceversa; scriveremo $s_j - (a_l, a_m)$. Si dirà che lo spigolo s_j *appartiene* ai vertici a_l ed a_m oppure che *li congiunge.* Due vertici cui appartenga uno spigolo si dicono *adiacenti.*

Si chiama *grado* [5] di un vertice a_i il numero $g(a_i)$ (intero,

(*) Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 26 aprile 1963.

(1) O. ORE, *Theory of graphs*, «Amer. Math. Soc. Coll. Pubbl.», 1962.

(2) Abbiamo tradotto il termine inglese *interchange graph,* adoperato da ORE, con *grafo commutato.*

(3) Cfr. ORE, op. cit. in (1), pag. 20.

(4) Facciamo l'ipotesi (come in ORE, op. cit., pag. 19) che il grafo G non contenga *cappi* (in inglese *loops*) perchè la presenza di cappi richiederebbe una opportuna convenzione per la definizione di grafo commutato.

(5) Cfr. ORE, pagg. 7 e segg.

≥ 0) degli spigoli che ad esso appartengono. Se due spigoli s_h, s_k appartengono ad uno stesso vertice si dice che sono *incidenti;* chiameremo *specie* di uno spigolo s_j il numero $h(s_j)$ (intero, ≥ 0) degli spigoli incidenti ad s_j. Se $s_j = (a_l, a_m)$ risulta ovviamente

$$(1) \qquad h(s_j) = g(a_l) + g(a_m) - 2.$$

Ed ora veniamo alla nozione di *grafo commutato* G^* di un grafo dato G. Il grafo G^* è così definito: l'insieme V^* dei suoi vertici non è altro che l'insieme S degli spigoli di G; gli spigoli di G^* sono poi determinati dalla regola secondo cui due vertici di G^* sono adiacenti se, come spigoli di G, sono incidenti ([6]).

Due grafi G_1, G_2 si dicono isomorfi se è possibile stabilire corrispondenze biunivoche fra gli insiemi V_1, V_2 dei vertici e fra gli insiemi S_1, S_2 degli spigoli in modo che siano conservate le relazioni di appartenenza fra vertici e spigoli, di adiacenza fra vertici e di incidenza fra spigoli. L'isomorfismo conserva dunque i gradi dei vertici e le specie degli spigoli.

Il problema che risolveremo in questa Nota è quello di determinare i grafi G finiti che sono isomorfi con i relativi grafi commutati G^* e che diremo autocommutabili. Dimostreremo che:

Gli unici grafi finiti autocommutabili sono quelli i cui vertici hanno tutti grado 2. Tali grafi sono rappresentabili in un piano mediante poligoni piani semplici (tanti quante sono le componenti connesse del grafo).

2. Osserviamo intanto che: *se un grafo* G *è connesso* ([7]) *lo è anche il commutato* G* *e se invece* G *ha* p (>1) *componenti connesse anche* G* *ne ha altrettante, ciascuna componente di* G* *essendo la commutata di una componente di* G.

Infatti, che G sia connesso significa che due suoi vertici qualsiansi a_i, a_j si possono sempre congiungere mediante una *catena* di spigoli. Pertanto, se si considerano due spigoli qualsivogliano di G, s_l, s_m e si considerano poi: uno dei vertici a_l cui appartiene s_l ed uno dei vertici a_m cui appartiene s_m, esisterà una catena γ

([6]) Cfr. Ore, pagg. 19 e segg.

([7]) Cfr. Ore, pagg. 22 e segg.

di spigoli di G che congiunge a_l con a_m. Il primo spigolo della catena γ è incidente allo spigolo s_l, mentre l'ultimo spigolo è incidente ad s_m. Passando poi al grafo G^* si ha così che due suoi vertici qualsivogliano s_l, s_m sono congiungibili mediante una catena: quella determinata dai vertici che, nel grafo G, sono gli spigoli della catena γ. Dunque G^* è connesso.

Se poi G ha p (> 1) componenti connesse, il commutato G^* dovrà anch'esso avere p componenti connesse, come si vede ragionando per assurdo; ciascuna componente di G^* è ovviamente la commutata di una componente di G.

La precedente osservazione ci permette di limitare la trattazione del nostro problema al caso dei grafi G connessi.

Consideriamo un grafo finito (non orientato) connesso G, che abbia n vertici a_i $(i = 1, \ldots, n)$ di gradi $g(a_i) = g_i$. Noi supponiamo che ogni spigolo di G, appartenga a due vertici *distinti*; pertanto, se m è il numero degli spigoli, avremo

$$\Sigma_i \, g_i = 2m. \tag{2}$$

Se G è isomorfo col relativo commutato G^* dovrà intanto essere $n = m$. Inoltre si potrà porre una corrispondenza biunivoca fra i vertici e gli spigoli di G (questi ultimi essendo i vertici di G^*) tale che un vertice abbia grado uguale alla specie dello spigolo corrispondente.

Ciò premesso, si osserverà che, tenuto conto della relazione (1) fra le specie di uno spigolo e i gradi dei vertici cui appartiene,

a) uno spigolo di G risulta di specie 1 solo se congiunge un vertice di grado 1 con un vertice di grado 2.

b) se uno spigolo s di G congiunge un vertice di grado g (> 2) ed un vertice di grado maggiore di 1, la specie di s è almeno g.

c) ad un vertice a che sia di grado g per definizione appartengono g spigoli e se questi ultimi appartengono tutti ad ulteriori vertici di grado maggiore di 1, per la *b*), saranno tutti di specie g almeno.

Ora esaminiamo la relazione (2) che, nel caso attuale, diventa

$$\Sigma_i \, g_i = 2n. \tag{3}$$

Nel primo membro figurano n addendi g_i $(i = 1, \dots, n)$ interi non inferiori ad 1 ([8]). Se vi fossero alcuni dei g_i eguali ad 1 (cioè vertici di G di grado 1) dovrebbero esservi di conseguenza alcuni g_i maggiori di 2 (cioè vertici di G di grado > 2), affinchè la somma dei g_i possa risultare eguale a $2n$. Ma se G è isomorfo con G^*, è impossibile che abbia vertici di grado maggiore di 2, a causa delle osservazioni a), b), c) fatte prima. Perchè vi sarebbero allora in G un numero maggiore di spigoli di specie > 2 che non di vertici di grado > 2; ma se G e G^* sono isomorfi, G deve contenere tanti vertici di grado > 2 quanti spigoli di specie > 2.

Infatti, per quanto si è detto in principio, se G e G^* sono isomorfi. G conterrà tanti vertici di grado 1 quanti spigoli di specie 1 e quindi, per la a), i vertici di grado 1 in G sono adiacenti soltanto a vertici di grado 2. Ne risulta che i vertici di G di grado $g > 2$ sono adiacenti a vertici di grado maggiore di 1 e quindi, per le b) e c), ciascuno di quei vertici dà origine a g spigoli di specie g almeno. È chiaro dunque appunto che vi sarebbero in tal caso in G più spigoli di specie > 2 che vertici di grado > 2 è ciò contraddice l'ipotesi che G e G^* siano isomorfi.

I gradi g_i dei vertici di G devono dunque tutti essere eguali a 2 ed allora i suoi spigoli risultano essere tutti di specie 2. In tale caso G è effettivamente isomorfo con G^*.

Si rappresentino gli n vertici a_i $(i = 1, \dots, n)$ di G con n punti di un piano e si consideri uno qualsiasi di quei punti indicandolo con A_1. Da A_1 escono due spigoli dell'immagine di G; se ne consideri uno e lo si indichi con l_1 e si dica poi A_2 il secondo vertice di l_1. Anche dal vertice A_2 escono due spigoli: l_1 ed un altro spigolo che verrà chiamato l_2. Si chiamerà poi A_3 il secondo vertice di l_2 e così via. Ci si potrà spostare sull'immagine di G ed è chiaro che non si giungerà mai ad uno dei vertici A_i $(i > 1)$ già incontrati, perchè questi risulterebbe allora di grado > 2. Pertanto si giungerà, con lo spigolo l_n, dopo aver incontrati tutti gli $n - 1$ vertici A_i $(i = 2, \dots, n)$ dato che il grafo G è connesso, al vertice di partenza A_1. L'immagine di G è dunque un poligono piano semplice di n lati ([9]).

([8]) Perchè G essendo connesso non ha vertici isolati per i quali il grado è 0.

([9]) Se $n = 2$ si ha un grafo G con due vertici A_1, A_2 congiunti da due spigoli. Esso può considerarsi come un caso degenere di poligono piano semplice.