Bollettino
Unione Matematica Italiana

Bruno Pini

Sulla classe di Gevrey delle soluzioni di certe equazioni ipoellittiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 260–269.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_260_0>

Sulla classe di Gevrey delle soluzioni di certe equazioni ipoellittiche

Nota di Bruno Pini (a Bologna) (*)

Sunto. - *Come nelle righe che precedono il n° 1.*

Indichiamo con $x = (x_1, \ldots, x_r)$ ed $s = (s_1, \ldots, s_r)$ punti dello spazio euclideo reale r-dimensionale R^r.

Consideriamo il polinomio $P(x) = P(x_1, \ldots, x_r)$ in $x_1, \ldots, x_r$ e il corrispondente polinomio differenziale $P(D) = P(D_{x_1}, \ldots, D_{x_r})$, che supponiamo a coefficienti costanti.

Hörmander ha provato che $P(D)$ è ipoellittico (cioè ogni soluzione di $P(D)u = 0$, supposta una distribuzione, è localmente di classe C^∞) se e solo se

$$\frac{D^q P(-is)}{P(-is)} \to 0 \quad \text{per} \quad |s| \to +\infty, \ |q| > 0, \tag{1}$$

ove i è l'unità immaginaria,

$$|s| = \left(\sum_{k=1}^{r} s_k^2\right)^{1/2}, \ D^q = D_{s_1}^{q_1} \ldots D_{s_r}^{q_r}, \ |q| = \sum_{k=1}^{r} q_k .$$

È sufficiente che sussista la (1) per ogni $|q| = 1$ (1).

Una funzione $u(x)$ si dice che in una regione E appartiene alla classe G_β di Gevrey ($\beta > 0$) se esistono delle costanti positive $C, A_1, \ldots, A_r$ (dipendenti da $u(x)$ e da E) tali che

$$|D^q u(x)| < C A_1^{q_1} \ldots A_r^{q_r} q_1^{\beta q_1} \ldots q_r^{\beta q_r}$$

per ogni $|q| \geq 0$ e $x \in E$.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 5 giugno 1963.

(1) Cfr. p. es. G. E. Scilov, *Proprietà locali delle soluzioni delle equazioni differenziali alle derivate parziali con coefficienti costanti*, « Uspechi Mat. Nauk », 14(89) (1959) (in russo); E. A. Gorin, *Proprietà asintotiche dei polinomi e delle funzioni algebriche di più variabili*, ibidem, 16 (91) (1961) (in russo).

Si dirà invece che $u(x)$ appartiene in E alla classe $G_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$ di GEVREY se

$$|D^q u(x)| < C A_1^{q_1} \ldots A_r^{q_r} q_1^{\beta_1 q_1} \ldots q_r^{\beta_r q_r}$$

per ogni $|q| \geq 0$ e $x \in E$.

Se un'equazione è ipoellittica allora tutte le sue soluzioni appartengono localmente a una stessa classe G_β e condizione necessaria e sufficiente affinchè $P(D)$ sia β-ipoellittico è che da $P(-i(s' + is'')) = 0$ segua $|s''| \geq A|s'|^{1/\beta} - B$ per certe costanti positive A e B [2].

Ad esempio

$$P(D) = \sum_{k=0}^{q} a_k D_x^{m(q-k)} D_y^{nk} \tag{2}$$

con m ed n primi tra loro, $m \geq n$, è ipoellittico se e solo se

$$\sum_{k=0}^{q} a_k(-is)^{m(q-k)}(-i\sigma)^{nk} \neq 0 \quad \text{per} \quad (s, \sigma) \in R^2 - (0, 0);$$

ogni sua soluzione appartiene alla classe $G_{1, m/n}$ [3].

Nelle righe che seguono prendiamo in considerazione qualche altro tipo di equazione ipoellittica caratterizzandone la classe di GEVREY delle soluzioni in dipendenza dal comportamento asintotico delle radici delle equazioni algebriche caratteristiche delle equazioni differenziali che sono trasformate parziali di FOURIER dell'equazione considerata.

1. Per semplicità ci riferiamo in generale al caso $r = 2$. Consideriamo l'equazione

$$P(D_x, D_y)u = 0 \tag{3}$$

e

$$P(-is, \lambda) = 0. \tag{4}$$

Se (3) è ipoellittica esiste un $\beta (> 0)$ tale che da

$$P(-i(s' + is''), i(\Im m\, \lambda - i\, \Re e\, \lambda)) = 0$$

(2) Cf. L. c. in (1).

(3) B. PINI, *Proprietà locali delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche,* « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », XXXII (1962); *Su certe equazioni ipoellittiche,* « Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari », 82-83 (1962).

segue

$$((s'')^2 + (\Re e\,\lambda)^2)^{1/2} \geq A((s')^2 + (\Im m\,\lambda)^2)^{1/(2\beta)} - B$$

per due certe costanti positive A e B. Pertanto (intendendo s reale e λ radice di (4))

$$|\Re e\,\lambda(s)| \geq A((s)^2 + (\Im m\,\lambda(s))^2)^{1/(2\beta)} - B.$$

Consideriamo

$$P(D) = D_x^{2m} D_y^{2m} + a(-1)^{n_1} D_x^{2n_1} + b(-1)^{n_2} D_y^{2n_2} \tag{5}$$

con a e b costanti positive, $n_1 \leq n_2$, $m < n_1 \leq 2m$, $m < n_2 \leq 2m$.

Se $n_1 = 2m$. $n_2 = 2m$ allora (5) è ellittico e ogni soluzione di $P(D)u = 0$. come è noto, appartiene a $G_{1,1}$ Escludiamo quindi questo caso.

Se poi è $n_1 = n_2$, considerazioni perfettamente analoghe a quelle che seguono si possono fare su

$$D_x^{2m} D_y^{2m} + (-1)^n P_{2n}(D_x, D_y)$$

se $P_{2n}(D_x, D_y)$ è una forma ellittica omogenea di ordine $2n$ tale che $P_{2n}(s, \sigma) > 0$ per $s^2 + \sigma^2 > 0$.

Da (5) si ha

$$P(-is, -i\sigma) = s^{2m}\sigma^{2m} + as^{2n_1} + b\sigma^{2n_2} > 0 \quad \text{per} \quad s^2 + \sigma^2 > 0$$

onde l'equazione

$$P(-is, \lambda) = (-1)^m s^{2m}\lambda^{2m} + as^{2n_1} + b(-1)^{n_2}\lambda^{2n_2} = 0 \tag{6}$$

non ha radici immaginarie pure ed esse si annullano se e solo se $s = 0$ e sono $O(|s|^{n_1/n_2})$ per $s \to 0$.

Posto $\lambda = s\lambda'$ e $s = 1/t$ si ottiene

$$b(-1)^{n_2} t^{4m-2n_2} \lambda'^{2n_2} + (-1)^m \lambda'^{2m} + at^{4m-2n_1} = 0.$$

La ricerca di radici infinitesime per $t \to 0$, porta a riconoscere che l'equazione (6) ha $2m$ radici

$$\lambda_j(s) = \alpha_j |s|^{(n_1-m)/m} + o(|s|^{(n_1-m)/m}) \quad \text{per} \quad |s| \to +\infty, \tag{7}$$

essendo α_j, $j = 1, 2, \dots, 2m$, le radici dell'equazione $\alpha^{2m} = (-1)^{m+1}a$.

Successivamente ricercando radici infinite per $t \to 0$, posto $\lambda' = 1/z$, la ricerca di radici infinitesime per $t \to 0$ dell'equazione

$$b(-1)^{n_2}t^{4m-2n_2} + (-1)^m z^{2n_2-2m} + a t^{4m-2n_1} z^{2n_2} = 0$$

porta a riconoscere che l'equazione (6) ha $2(n_2 - m)$ radici

$$(8)\quad \lambda_{j+2m}(s) = \beta_j \, |s|^{m/(n_2-m)} + o(|s|^{m/(n_2-m)}) \quad \text{per} \quad |s| \to +\infty,$$

essendo β_j, $j = 1, 2, \ldots, 2(n_2 - m)$, le radici dell'equazione $\beta^{2(n_2-m)} = (-1)^{n_2+m+1}/b$.

Pertanto l'equazione (6) ha $2m$ radici (7) di cui m con $\mathcal{Re}\,\alpha_j > 0$ ed m con $\mathcal{Re}\,\alpha_j < 0$ e $2(n_2 - m)$ radici (8) di cui $n_2 - m$ con $\mathcal{Re}\,\beta_j > 0$ ed $n_2 - m$ con $\mathcal{Re}\,\beta_j < 0$.

Analogamente l'equazione

$$P(\mu, -i\sigma) = (-1)^m \sigma^{2m} \mu^{2m} + a(-1)^{n_1}\mu^{2n_1} + b\sigma^{2n_2} = 0$$

non ha radici immaginarie pure; esse si annullano se e solo se $\sigma = 0$ e sono $O(|\sigma|^{n_2/n_1})$ per $\sigma \to 0$; tra esse ve ne sono $2m$

$$\mu_j(\sigma) = \gamma_j \, |\sigma|^{(n_2-m)/m} + o(|\sigma|^{(n_2-m)/m}) \quad \text{per} \quad |\sigma| \to +\infty,$$

essendo γ_j, $j = 1, 2, \ldots, 2m$, le radici dell'equazione $\gamma^{2m} = (-1)^{m+1}b$, di cui m con $\mathcal{Re}\,\gamma_j > 0$ ed m con $\mathcal{Re}\,\gamma_j < 0$; infine vi sono $2(n_1 - m)$ radici

$$\mu_{2m+j}(\sigma) = \delta_j \, |\sigma|^{m/(n_1-m)} + o(|\sigma|^{m/(n_1-m)}) \quad \text{per} \quad |\sigma| \to +\infty,$$

essendo δ_j, $j = 1, 2, \ldots, 2(n_1 - m)$. le radici di $\delta^{2(n_1-m)} = (-1)^{n_1+m+1}/a$, di cui $n_1 - m$ con $\mathcal{Re}\,\delta_j > 0$ ed $n_1 - m$ con $\mathcal{Re}\,\delta_j < 0$.

Infine il polinomio differenziale (5) è ipoellittico; limitandoci al quadrante $s \geq 0$, $\sigma \geq 0$, fissato ad arbitrio ε, $0 < \varepsilon < 1$, si ha ad esempio $\dfrac{D_s P(-is, -i\sigma)}{P(-is, -i\sigma)} < \varepsilon$ sia per $s > 2n_1/\varepsilon$ sia per $0 \leq s \leq 2n_1/\varepsilon$ e $\sigma > 1$, $\sigma > \left(\dfrac{2n_1(1+a)}{b\varepsilon}\left(\dfrac{2n_1}{\varepsilon}\right)^{2n_1-1}\right)^{1/(2(n_2-m))}$.

Considerazioni analoghe si applicano all'operatore

$$D_{x_1}^{2m} \ldots D_{x_{\nu_1+1}}^{2m} \ldots D_{x_{\nu_2}}^{2m} \ldots D_{x_{\nu_{q-1}+1}}^{2m} \ldots D_{x_{\nu_q}}^{2m} + (-1)^{n_1} P_{2n_1}(D_{x_1}, \ldots, D_{x_{\nu_1}}) +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n_q} P_{2n_q}(D_{x_{\nu_{q-1}+1}}, \ldots, D_{x_{\nu_q}})$$

con $m(\nu_q - 1) < n_j \leq m\nu_q$ per $j = 1, 2, \ldots, q$ e P_{2n_j} definite positive.

2. Le considerazioni fatte giustificano le ipotesi del teorema seguente.

Sia $P(D)$ un polinomio differenziale a coefficienti costanti tale che:

1) $P(-is, -i\sigma) = 0$ *se e solo se* $s = \sigma = 0$;

2) $P(D_x, D_y)$ *sia ipoellittico*;

3) *l'equazione* $P(-is, \lambda) = 0$ *abbia* M_1 *radici* $\lambda_j(s)$, $j = 1, \dots, M_1$, *tali che* $\Re e\, \lambda_j(s) < 0$ *ed* N_1 *radici* $\lambda_{M_1+j}(s)$, $j = 1, \dots, N_1$, *tali che* $\Re e\, \lambda_{M_1+j}(s) > 0$; *sia* $\lambda_j(s) = O(|s|^{\alpha_j})$ *per* $|s| \to +\infty$, $j = 1, 2, \dots, M_1$, *e* $\Re e\, \lambda_j(s) < -a_j |s|^{\alpha_j}$, $a_j > 0$ *per* $j = 1, 2, \dots, M_1$ *e* $|s| \geq 1$, $\lambda_{M_1+j}(s) = O(|s|^{\beta_j})$ *per* $|s| \to +\infty$, $j = 1, 2, \dots, N_1$ *e* $\Re e\, \lambda_{M_1+j}(s) > b_j |s|^{\beta_j}$, $b_j > 0$ *per* $j = 1, 2, \dots, N_1$ *e* $|s| \geq 1$; *sia* $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{M_1}$, $\beta_1 = \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{N_1}$;

4) *l'equazione* $P(\mu, -i\sigma) = 0$ *abbia* M_2 *radici* $\mu_j(\sigma)$, $j = 1, 2, \dots M_2$ *tali che* $\Re e\, \mu_j(\sigma) < 0$ *ed* N_2 *radici* $\mu_{M_2+j}(\sigma)$, $j = 1, 2, \dots, N_2$, *tali che* $\Re e\, \mu_{M_2+j}(\sigma) > 0$; *sia* $\mu_j(\sigma) = O(|\sigma|^{\gamma_j})$ *per* $|\sigma| \to +\infty$, $j = 1, 2, \dots, M_2$ *e* $\Re e\, \mu_j(\sigma) < -c_j |\sigma|^{\gamma_j}$, $c_j > 0$ *per* $j = 1, 2, \dots, M_2$ *e* $|\sigma| \geq 1$, $\mu_{M_2+j}(\sigma) = O(|\sigma|^{\delta_j})$ *per* $|\sigma| \to +\infty$, $\Re e\, \mu_{M_2+j}(\sigma) > d_j |\sigma|^{\delta_j}$, $d_j > 0$ *per* $j = 1, 2, \dots, N_2$ *e* $|\sigma| \geq 1$; *sia* $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_{M_2}$, $\delta_1 = \gamma_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_{N_2}$.

Sia $U(x, y)$ *una soluzione fondamentale relativa all'operatore* $P(D_x, D_y)$ *e al punto* $(0, 0)$; *allora, fissata una qualsiasi corona* $\Omega = \{(x, y);\ 0 < r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$, *si ha*

$$
(9)\qquad \begin{cases} U(x, y) \in G_{1,1}(\Omega) & \text{se } \alpha_1 \geq 1,\ \gamma_1 \geq 1 \\ U(x, y) \in G_{1, 1/\gamma_1}(\Omega)(G_{1/\alpha_1, 1}(\Omega)) & \text{se } \alpha_1 \geq 1,\ \gamma_1 < 1\ (\alpha_1 < 1,\ \gamma_1 \geq 1) \\ U(x, y) \in G_{1/\alpha_1, 1/\gamma_1}(\Omega) & \text{se } \alpha_1 < 1,\ \gamma_1 < 1. \end{cases}
$$

Conseguentemente ogni soluzione dell'equazione $P(D_x, D_y)u = 0$ *è localmente della classe di Gevrey indicata.*

Ciò si prova rapidamente utilizzando una certa presentazione di una soluzione fondamentale. Supponiamo per semplicità che le radici $\lambda_j(s)$ e $\mu_j(\sigma)$ siano tutte semplici.

Indichiamo con W il determinante di Vandermonde di $\lambda_1, \dots, \lambda_{M_1+N_1}$ (nell'ordine) e con W_j il determinante di Vandermonde di $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots \lambda_{M_1+N_1}$ (nell'ordine). Allora si ha formalmente

$$
(10)\qquad U(x, y) = \begin{cases} (-1)^{M_1+N_1} \displaystyle\sum_{j=1}^{M_1} \frac{(-1)^j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs} \frac{W_j(s)}{W(s)} e^{y\lambda_j(s)} ds & \text{per } y > 0 \\[2ex] (-1)^{N_1+1} \displaystyle\sum_{j=1}^{N_1} \frac{(-1)^j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs} \frac{W_{M_1+j}(s)}{W(s)} e^{y\lambda_{M_1+j}(s)} ds & \text{per } y < 0. \end{cases}
$$

Poichè $P(-is, -i\sigma) \neq 0$ per $s^2 + \sigma^2 > 0$ e $P(0, 0) = 0$, le radici $\lambda_j(s)$ sono tutte infinitesime soltanto per $s \to 0$; perciò $W(s) \neq 0$ per $s \neq 0$, $W(s) = 0$ per $s = 0$. Sia $\lambda_j(s) = O(|s|^{\alpha'_j})$ per $s \to 0$, $|\lambda_j(s)| < p_j |s|^{\alpha'_j}$ per $|s| \leq 1$; $|\lambda_j(s)| < q_j |s|^{\alpha_j}$ per $|s| \geq 1$, $\mathcal{R}e\lambda_j(s) < -a_j |s|^{\alpha_j}$ per $|s| \geq 1$.

Sarà $\left|\dfrac{W_j(s)}{W(s)}\right| = O\left(\dfrac{1}{|s|^{\nu_j}}\right)$ per $|s| \to 0$ e $\left|\dfrac{W_j(s)}{W(s)}\right| = O\left(\dfrac{1}{|s|^{\nu'_j}}\right)$ per $|s| \to +\infty$. La singolarità di $\dfrac{W_j(s)}{W(s)}$ per $s = 0$ può essere tale da richiedere una regolarizzazione di (10).

In ogni caso si ha, supponendo ad esempio $y > 0$,

$$D_x^h D_y^k U(x, y) = (-1)^{M_1+N_1} \sum_{j=1}^{M_1} \frac{(-1)^j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i)^h e^{-ixs} s^h (\lambda_j(s))^k \frac{W_j(s)}{W(s)} e^{y\lambda_j(s)} ds$$

purchè sia $h + k\alpha'_j - \nu_j + 1 > 0$, $j = 1, 2, \ldots, M_1$.

Supposto perciò $h + k$ sufficientemente grande si ha

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs} s^h (\lambda_j(s))^k \frac{W_j(s)}{W(s)} e^{y\lambda_j(s)} ds \right| <$$

$$< C_1 p_j^k \int_0^1 \frac{s^h s^{k\alpha'_j}}{s^{\nu_j}} ds + C_2 q_j^k \int_1^{+\infty} \frac{s^h s^{k\alpha_j}}{s^{\nu'_j}} e^{-a_j s^{\alpha_j} y} ds$$

ove C_1 e C_2 sono due opportune costanti positive indipendenti da h e k.

Se $h + k\alpha'_j - \nu_j \geq 0$ il primo integrale all'ultimo membro si maggiora con $C_1 p_j^k$.

Scelto un $\omega_j \geq 0$ l'ultimo integrale si maggiora con

$$C_2 q_j^k \int_0^{+\infty} s^{h+k\alpha_j+\omega_j} e^{-a_j s^{\alpha_j} y} ds.$$

Supposto $y \geq y_0 > 0$ e posto $s = (t/(a_j y_0))^{1/\alpha_j}$ si ha

$$C_2 \frac{q_j^k}{\alpha_j (a_j y_0)^{k+(h+\omega_j+1)/\alpha_j}} \int_0^{+\infty} t^{k+(h+\omega_j+1)/\alpha_j - 1} e^{-t} dt.$$

Sia $\omega_j = \alpha_j - 1$ se $\alpha_j \geq 1$, $\omega_j = 0$ se $\alpha_j < 1$.

Nel primo caso l'integrale è $\Gamma(1 + k + h/\alpha_j)$; nel secondo, posto $1/\alpha_j - 1 = l_j$, è $\Gamma(1 + k + h/\alpha_j + l_j)$.

Ora è per $a > 0$, $b > 0$, $a + b \geq 1$ $(0 < \theta < 1)$

$$\Gamma(1 + a + b) = \sqrt{2\pi(a + b)}\left(\frac{1}{e}\right)^{a+b} e^{\frac{\theta}{12(a+b)}}(a + b)^{a+b} <$$

$$< \sqrt{2\pi}e^{1/12}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{a+b}(a + b)^{a+b}$$

e

$$(a + b)^{a+b} = a^a\left(1 + \frac{b}{a}\right)^a b^b\left(1 + \frac{a}{b}\right)^b < e^a e^b a^a b^b$$

e analogamente

$$\Gamma(1 + a + b + c) < \sqrt{2\pi}e^{1/12}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{a+b+c}(a + b + c)^{a+b+c}$$

e

$$(a + b + c)^{a+b+c} < e^{2a}e^{2b}e^{2c}a^a b^b c^c.$$

In definitiva si ottiene

$$| D_x^h D_y^k U(x, y) | < C_1 A_1{}^h B_1{}^k h^{h/\alpha_1} k^k$$

per $|y| \geq y_0$, $h \geq 0$, $k \geq 0$, essendo A_1, B_1, C_1 opportune costanti indipendenti da h e k.

Scambiando x con y si ha formalmente

$$(11) \quad U(x, y) = \begin{cases} (-1)^{M_2+N_2}\sum\limits_{j=1}^{M_2}\dfrac{(-1)^j}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\sigma}\frac{Z_j(\sigma)}{Z(\sigma)}\, e^{x\mu_j(\sigma)}\, d\sigma & \text{per } x > 0 \\ (-1)^{N_2+1}\sum\limits_{j=1}^{N_2}\dfrac{(-1)^j}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\sigma}\frac{Z_{M_2+j}(\sigma)}{Z(\sigma)}\, e^{x\mu_{M_2+j}(\sigma)} d\sigma & \text{per } x<0 \end{cases}$$

ove Z, Z_j, Z_{M_2+j} hanno significato analogo a quello di W, W_j, W_{M_1+j}, con le μ_k al posto delle λ_h, onde, procedendo come sopra, si ha

$$| D_x^h D_y^k U(x, y) | < C_2 A_2{}^h B_2{}^k h^h k^{k/\gamma_1}$$

per $|x| \geq x_0 > 0$.

È da tener presente che, poichè $P(D_x, D_y)$ è ipoellittico, una soluzione fondamentale $U(x, y)$ è di classe C^∞ fuori del punto $(0, 0)$; inoltre le derivate $D_x^h D_y^k$, con $h + k$ sufficientemente elevato, di (10) e di (11), coincidono fuori di $(0, 0)$ come si riconosce con un ragionamento analogo ad altro fatto in una consimile situazione [4].

Da ciò segue la (9).

Così, per esempio, se $P(D)$ è l'operatore (5) le soluzioni di $P(D)u = 0$ appartengono alla classe $G_{m/(n_1-m),\, m/(n_2-m)}$.

3. Proviamo ora che:

Se $P(D_x, D_y)u = 0$ è un'equazione ipoellittica a coefficienti costanti, ogni soluzioni della quale sia localmente della classe $G_{\alpha, \beta}$ di Gevrey con $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ e se $f(x, y) \in G_{\alpha', \beta'}$ con $\alpha' \geq \alpha$, $\beta' \geq \beta$, allora ogni soluzione dell'equazione

$$P(D_x, D_y)u = f(x, y) \tag{12}$$

appartiene alla classe $G_{\alpha', \beta'}$.

Supponiamo che la relativa soluzione fondamentale sia localmente sommabile.

Supponiamo dapprima che sia $\alpha' > 1$, $\beta' > 1$.

Assegnata una successione di numeri positivi $\{m_n\}$ crescente almeno per $n > \bar{n}$ e tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}} < +\infty$, allora esiste una funzione $f(x)$ non identicamente nulla, non negativa, indefinitamente derivabile su $a \leq x \leq b$ e tale che

$$D^n f(a) = D^n f(b) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$| D^n f(x) | < m_n \text{ su } a \leq x \leq b, \quad n = 0, 1, \ldots$$ [5]

Se $m_n = C_1 A_1{}^n n^{\alpha n}$ con $\alpha > 1$ le condizioni indicate sono soddisfatte. Sia allora $\varphi(x)$ una funzione del tipo detto relativa ad $\alpha' > 1$ e all'intervallo $-\delta \leq x \leq \delta$; $\psi(y)$ una funzione dello stesso tipo relativa a $\beta' > 1$ e all'intervallo $-\delta \leq y \leq \delta$.

Siano Ω e Ω' due aperti limitati con $\bar{\Omega} \subset \Omega'$; T_1 e T_2 due aperti tali che $\Omega' \supset \bar{T}_2$, $T_2 \supset \bar{T}_1$, $T_1 \supset \bar{\Omega}$. Sia $g(x, y)$ una funzione continua in R^2, $= 1$ in T_1, $= 0$ fuori di T_2, compresa tra 0 e 1 in $T_2 - T^1$;

[4] Cf. l. c. in [3].

[5] Cfr. S. Mandelbroit, *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*, Paris (1935).

poniamo

$$\omega(x, y) = H^2 \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{y-\delta}^{y+\delta} g(\xi, \eta)\varphi(x-\xi)\psi(y-\eta)d\xi d\eta$$

con

$$\frac{1}{H^2} = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)dt \int_{-\delta}^{\delta} \psi(t)dt.$$

Se δ è sufficientemente piccolo la $\omega(x, y)$ è $= 1$ in Ω, $= 0$ fuori di Ω', compresa tra 0 e 1 e $\in C^\infty(R^2)$.

E'

$$| D_x^h D_y^k \omega(x, y) | = H^2 \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{y-\delta}^{y+\delta} g(\xi, \eta) D_x^h \varphi(x-\xi) D_y^k \psi(y-\eta) d\xi d\eta \right| <$$

$$< H^2 \; 4\delta^2 \cdot C_1 A_1{}^h h^{\alpha' h} C_2 A_2{}^k k^{\beta' k} = C A^h B^k h^{\alpha' h} k^{\beta' k}$$

onde $\omega(x, y) \in G_{\alpha', \beta'}(R^2)$. Pertanto se $f(x, y) \in G_{\alpha', \beta'}$, anche $f(x, y)$ $\omega(x, y) \in G_{\alpha', \beta'}$.

In tal modo se $f(x, y) \in G_{\alpha', \beta'}(\Omega')$, ad essa si è sostituita una funzione $(f\omega)$ coincidente con f in Ω, $\in G_{\alpha', \beta'}(R^2)$ e a supporto compatto.

Dopo di ciò la

$$v(x, y) = \int_{R^2} U(x-\xi, y-\eta) f(\xi, \eta)\omega(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

è soluzione della (12) in Ω e $v \in G_{\alpha', \beta'}(\Omega)$; d'altra parte ogni soluzione della (12) si può scrivere nella forma $u + v$ con u soluzione di $P(D_x, D_y)u = 0$.

Nel caso che almeno una delle due quantità α' e β' sia eguale ad 1 si può fare il seguente ragionamento.

Sia Δ l'intervallo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Sia $f(x, y) \in G_{\alpha', \beta'}(\Delta)$.

Consideriamo la funzione

$$w(x, y) = \int_{\Delta} U(x - \xi, y - \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta .$$

Se (x, y) è interno a Δ si ha

$$D_x^h D_y^k w(x, y) = - \sum_{i=1}^{h} \int_c^d [D_x^{h-i} D_y^k U \cdot D_\xi^{i-1} f]_{\xi=a}^{\xi=b} d\eta -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \int_a^b [D_y^{k-j} U \cdot D_\xi^h D_\eta^{j-1} f]_{\eta=c}^{\eta=d} d\xi + \int_{\Delta} U(x - \xi, y - \eta) D_\xi^h D_\eta^k f d\xi d\eta .$$

Per $(x, y) \in \Delta_1$ essendo Δ_1, l'intervallo $a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon$, $c + \varepsilon \leq \leq d - \varepsilon$, si ha

$$| D_x^h D_y^k w(x, y) | < C A^h B^k h^{\alpha' h} k^{\beta' k} \int_{\Delta} | U | d\xi d\eta +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{h} (d - c) C_1 A_1^{h-i} B_1^k (h - i)^{\alpha(h-i)} k^{\beta k} C A^{i-1} (i - 1)^{\alpha'(i-1)} +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{k} (b - a) C_1 B_1^{k-j} (k - j)^{\beta(k-j)} C A^h B^{j-1} h^{\alpha' h} (j - 1)^{\beta'(j-1)} < C_2 A_2^h B_2^k h^{\alpha' h} k^{\beta' k},$$

poichè

$$(h - i)^{\alpha(h-i)} (i - 1)^{\alpha'(i-1)} < h^{\alpha'(h-1)}$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{h} (h - i)^{\alpha(h-i)} (i - 1)^{\alpha'(i-1)} < h \cdot h^{\alpha'(h-1)} \leq h^{\alpha' h}$$

e analoghe.

CORREZIONI: nella mia nota « *Alcune stime integrali* ... » (Boll. U. M. I. s. 3, anno XVIII, n° 2 (1963)) a pag. 113, rigo 10 dall'alto, di seguito a « ... *soluzione di* (1) *per* $y > 0$ » leggere « *della quale siano assegnate le* $D_y^j u(x, 0)$ *per* $j = 0, 1, \ldots, M - 1$. »; a pag. 114, al primo membro della formula (5) aggiungere l'esponente p; a pag. 120, rigo 6 dal basso, anzichè « semipiano » leggere « semispazio ».