Bollettino
Unione Matematica Italiana

Roberto Magari

Su certe strutture algebriche associate ai piani grafici autopolari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 238–251.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_238_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Su certe strutture algebriche associate ai piani grafici autopolari

Nota di ROBERTO MAGARI (a Firenze) (*) (**)

Sunto. - *Vedi introduzione precedente al paragrafo 1.*

In un precedente lavoro (R. MAGARI [4]) ho considerato certi simboli atti a rappresentare gli elementi di un piano grafico, nella speranza che la struttura di questi simboli potesse risultare utile nello studio dei piani grafici stessi. Poichè nel caso dei piani grafici autopolari introducendo nell'insieme dei simboli un' perazione collegata con la struttura di incidenza del piano si ottiene una struttura algebrica particolarmente semplice (vedi n. 1), ho ritenuto opportuno studiare più in dettaglio queste strutture, che ho chiamato "gruppoidi grafici". Le strutture da me studiate non sono propriamente gruppoidi ma ciascuna di esse si può in modo banale immergere in un gruppoide senza, per così dire, arricchirla sostanzialmente.

Nei nn. 1, 2, 3, 4, dopo aver richiamato nella forma più utile per il seguito certe definizioni, do dei procedimenti che permettono di passare da una "struttura grafica autopolare" (coppia formata da un piano grafico autopolare e da una sua polarità) a un gruppoide grafico e viceversa, dimostrando che i due procedimenti sono, in un senso che viene precisato, l'uno l'inverso dell'altro, e studio le relazioni che intercorrono fra gli isomorfismi delle strutture grafiche autopolari e dei piani grafici autopolari e gli isomorfismi e i "quasiisomorfismi" dei gruppoidi grafici.

Nel n. 5 introduco il concetto di "quasiomomorfismo" studiandone alcune proprietà e riassumo i risultati ottenuti in una tabella che permetta di passare da un concetto relativo ai piani grafici autopolari al suo concetto "associato,, relativo ai gruppoidi grafici.

1. Riscriviamo per comodità alcune definizioni di concetti noti nella forma che ci è più utile per il seguito.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 15 maggio 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico '61-'62.

Sia π un piano grafico, P l'insieme dei suoi punti, L l'insieme delle sue rette, I la relazione di incidenza (che considereremo come simmetrica, scrivendo indifferentemente xIr oppure rIx se il punto x appartiene alla retta r), allora scriveremo: $\pi=(P, L, I)$.

df. 1. *Un isomorfismo di un piano grafico* $\pi=(\mathrm{P}, \mathrm{L}, \mathrm{I})$ *su (in) un piano grafico* $\pi'=(\mathrm{P}', \mathrm{L}', \mathrm{I}')$ *è una applicazione biunivoca* φ *di* PUL *su (in)* $P'UL'$ *tale che:*

(1) $\varphi(P) \subseteq P'$ *e* $\varphi(L) \subseteq L'$

(2) *se* xIy *allora* $\varphi(x) I' \varphi(y)$ *e viceversa.*

df 2 *Una collineazione (o automorfismo) di* π è *un isomorfismo di* π *su se stesso.*

df. 3 *Una dualità di* $\pi=(\mathrm{P}, \mathrm{L}, \mathrm{I})$ *è un isomorfismo di* π *su* $\pi^*=(\mathrm{L}, \mathrm{P}, \mathrm{I})$ *(piano "duale" di* π*).*

df. 4 *Una polarità di* π *è una dualità* φ *tale che* $\varphi^2=\mathrm{u}$ *(essendo* u *la collineazione identica di* π*).*

df. 5 *Un piano grafico si dice autoduale (autopolare) se esiste una dualità (polarità) di* π.

Osserviamo che in un piano grafico autoduale π, o ogni dualità di periodo finito ha periodo multiplo di 4 oppure π è autopolare.

Se infatti φ è una dualità di π di periodo finito k non multiplo di 4 sarà $k=2h$ con h intero dispari e φ^h è una polarità di π.

2. Sia $\pi=(P, L, I)$ un piano grafico autopolare e φ una sua polarità. Possiamo definire in P una struttura algebrica $\mathfrak{A}(\pi, \varphi)=(P, f)$ introducendo in P un'operazione binaria f nel modo seguente:

df. 6 *la* f *è definita per le coppie* (x, y) *con* $\mathrm{x} \in \mathrm{P}$, $\mathrm{y} \in \mathrm{P}$, $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$, *e il risultato della sua applicazione a una tal coppia (risultato che indicheremo con* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ o con xy *semplicemente e chiameremo "prodotto" di* x *e* y*) è il punto* $\varphi(\overline{\mathrm{xy}})$ *(dove la scrittura* $\overline{\mathrm{xy}}$ *indica la retta che è incidente a* x *e a* y*).* Ovviamente si ha:

(3) $$xy=yx \qquad (x \in P,\ y \in P,\ x \neq y)$$

(4) $$(xy)(xz)=x \quad (x, y, z \in P,\ x \neq y,\ x \neq z,\ xy \neq xz)$$

Per comodità useremo spesso punti al modo di PEANO anzichè parentesi, così scriveremo $xy \cdot zt$ anzichè $(xy)(zt)$, $xy \cdot zt : u$ anzichè $[(xy)(zt)]u$ etc.

È possibile ovviamente estendere l'operazione f anche alle coppie di elementi coincidenti ottenendo così un gruppoide ma è impossibile definire l'estensione in modo che le (3) e (4) valgano universalmente in P (in una tale estensione se P contiene almeno due elementi distinti x ed y si troverebbe

$$x = xy \cdot xy = yx \cdot yx = y)$$

Osserviamo che la struttura $\mathcal{A}(\pi, \varphi)$ dipende effettivamente da φ oltre che da π nel senso che:

teor. 1. – *Se φ e ψ sono due polarità di un piano grafico π le strutture $\mathcal{A}(\pi, \varphi)$ e $\mathcal{A}(\pi, \psi)$ possono non risultare isomorfe.*

DIM. π sia ad esempio il piano proiettivo reale e φ, ψ siano polarità di π le cui estensioni al piano proiettivo complesso siano associate rispettivamente a una conica a punti reali γ_φ e a una conica priva di punti reali, γ_ψ. Nella struttura $\mathcal{A}(\pi, \varphi)$ esistono allora coppie (x, y) per cui $xy = x$ (è sufficiente (e necessario) che x sia un punto reale di γ_φ e y un punto reale della tangente alla γ_φ in x) mentre in $\mathcal{A}(\pi, \psi)$ non esistono di tali coppie.

E' facile constatare che:

LEMMA 1. – *Se π è tale che ogni punto è incidente a (almeno) due rette distinte e ogni retta è incidente a (almeno) due punti distinti allora non esistono punti* x *per cui si abbia:*
$\mathrm{xy} =$ *cost. al variare di $y \in P$.*

3. Invertiamo ora le considerazioni del numero precedente introducendo anzitutto la seguente:

df. 6 *si dirà* **gruppoide grafico** *(abbrevieremo "g. g.") una coppia* (P, f) *costituita da un insieme* P *e da un'applicazione* f *di* $\mathrm{P}^2 - \mathrm{I}_\mathrm{P}$ *(con* I_M *se* M *è un insieme, ora e nel seguito intendiamo indicare l'insieme delle coppie di elementi coincidenti di* M*) in* P *tale che (scrivendo per comodità* xy *al posto di* $\mathrm{f(x, y)}$ *e usando al solito punti anzichè parentesi):*

$$xy = yx \quad (x, y \in P, \quad x \neq y) \tag{5}$$

$$xy \cdot xz = x \quad (x, y, z \in P, \quad x \neq y, \ x \neq z, \ xy \neq xz) \tag{6}$$

E' interessante osservare che a causa delle (5) e (6) (o meglio delle loro analoghe) la definizione che segue, la quale apparentemente include una classe più ampia di strutture, include invece tutti e soli i gruppoidi grafici.

df. 6' *Si dirà gruppoide grafico una coppia* (P, f) *costituita da un insieme* P *e da una applicazione* f *di* $P^2 - I_P$ *nell'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di* P *che soddisfi le seguenti condizioni:*

$$f(x, y) = f(y, x) \qquad (x, y \in P, \ x \neq y) \tag{7}$$

$$f(f(x, y), f(x, z)) = \{x\} \qquad (x, y, z \in P, \ x \neq y, x \neq z, \ f(f(x, y), f(x, z)) \neq \emptyset) \tag{8}$$

dove si è posto, se $A \subseteq P$ e $B \subseteq P$:

$$f(A, B) = \begin{cases} \bigcup\limits_{\substack{a \in A\, b \in B \\ a \neq b}} f(a, b) & \text{se esiste almeno una coppia } (a, b) \text{ con } a \in A,\ b \in B,\ a \neq b \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per mostrare l'equivalenza delle due definizioni basterà far vedere che se $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$ allora $f(x, y)$ contiene un solo elemento, (con un abuso in questo caso ovviamente irrilevante si devono poi identificare gli insiemi di un solo elemento con quell'elemento).

Siano infatti z e t due elementi distinti di $f(x, y)$, $(x \neq y)$, allora $f(f(x, y), f(x, y))$ non è vuoto perchè contiene almeno $f(z, t)$. Ma si ha:

$$f(f(x, y), f(x, y)) = \{x\} \quad \text{e}$$

$$f(f(x, y), f(x, y)) = f(f(y, x), f(y, x)) = \{y\}$$

da cui $\{x\} = \{y\}$ e perciò $x = y$ contro le ipotesi.

Diamo ancora la seguente:

df. 7 *un elemento* x *di un g. g.* (P, f) *si dirà singolare se* $xy = cost.$ *al variare di* $y \in P$.

Si ha subito che:

TEOR. 2 *in un g.g. privo di elementi singolari la* f *è una applicazione di* $P^2 - I_P$ *su* P.

DIM.: sia $x \in P$ e siano y, z due elementi di P distinti fra loro e da x tali che $f(x, y) \neq f(x, z)$ (di certo ne esistono perchè x non è singolare). Allora $f(f(x, y), f(x, z)) = x$.

Vediamo ora come è possibile costruire un piano grafico autopolare a partire da un gruppoide grafico (P, f) privo di elementi singolari.

Sia L un insieme disgiunto da P in corrispondenza biunivoca con esso e δ sia appunto un'applicazione biunivoca di P su L. Indichiamo con I la relazione binaria definita in $P \cup L$ nel modo seguente:

df. 8. xIy *se e solo se o:*

(9) $\mathrm{x} \in \mathrm{P}$, $y \in \mathrm{L}$ *ed esiste uno* $\mathrm{z} \in \mathrm{P}$ *per cui* $f(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \delta^{-1}\mathrm{y}$, (*)

oppure:

(10) $\mathrm{y} \in \mathrm{P}$, $\mathrm{x} \in \mathrm{L}$ *ed esiste uno* $\mathrm{z} \in \mathrm{P}$ *per cui* $\mathrm{f}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) = \delta^{-1}\mathrm{x}$.

Vogliamo dimostrare che:

TEOR. 3. – (P, L, I) *è un piano grafico autopolare.*

Dimostriamo anzitutto il seguente:

LEMMA 2: *se un punto* x *(chiamiamo "punti" gli elementi di* P *e "rette" quelli di* L) *è incidente a (intendiamo: "ha la relazione* I *con") una retta* r, *allora esiste una retta* s *tale che* $\mathrm{f}(\delta^{-1}\mathrm{r}, \delta^{-1}\mathrm{s}) = \mathrm{x}$, *e viceversa.*

Sia infatti xIr con $x \in P$ e $r \in L$ ossia esista un $y \in P$ per cui $f(x, y) = \delta^{-1}r$; essendo x non singolare esiste allora anche uno $z \in P$, $z \neq x$ per cui $f(x, z) \neq \delta^{-1}r = f(x, y)$. Ma allora, posto $\delta f(x, z) = s$, si ha:

$$f(\delta^{-1}r, \delta^{-1}s) = f(f(x, y), f(x, z)) = x.$$

Viceversa se per un certo $s \in L$ $f(\delta^{-1}r, \delta^{-1}s) = x$ non essendo $\delta^{-1}r$ singolare esiste uno $z \in B$, $z \neq \delta^{-1}r$, per cui $f(\delta^{-1}r, z) \neq x = f(\delta^{-1}r, \delta^{-1}s)$ e, posto $y = f(\delta^{-1}r, z)$ si ha:

$$f(x, y) = f(f(\delta^{-1}r, \delta^{-1}s), f(\delta^{-1}r, z)) = \delta^{-1}r.$$

Il lemma 2 è così dimostrato.

(*) Avvertiamo che tralasceremo spesso la parentesi nell'indicare il corrispondente di un elemento x in una applicazione λ. Per il prodotto di applicazioni seguiremo la notazione secondo la quale $(fg)x = f(g(x))$.

Per dimostrare che (P, L, I) è un piano grafico dobbiamo ora far vedere che:

(a) Dati $x \in P$, $y \in P$ con $x \neq y$ esiste una e una sola retta incidente a x e a y.

(b) Dati $r \in L$, $s \in L$ con $r \neq s$ esiste uno e un sol punto incidente a r e a s

Sarà sufficiente dimostrare la (a) perchè la (b) ne è la duale e il lemma 2 permette appunto di scrivere la df. 8 in modo duale.

Ovviamente $r = \delta f(x, y)$ è una retta incidente a x e a y e sia $s \neq r$ un'altra retta incidente a x e a y. Allora si ha per opportuni z e t:

$$f(x, z) = \delta^{-1}s \quad \text{e} \quad f(y, t) = \delta^{-1}s \quad \text{con } z \neq y,\ t \neq x,\ z \neq x,\ t \neq y.$$

Ne segue:

$$f(\delta^{-1}r,\ \delta^{-1}s) = f(f(x, y),\ f(x, z)) = x$$

e

$$f(\delta^{-1}r,\ \delta^{-1}s) = f(f(x, y),\ f(y, t)) = y$$

il che è assurdo.

Resta da dimostrare che (P, L, I) è autopolare. Sia δ^* l'applicazione di PUL su se stesso definita da:

se $x \in P$ allora $\delta^* x = \delta x$

se $x \in L$ allora $\delta^* x = \delta^{-1} x$.

Essa porta P su L e L su P e inoltre, per il lemma 2, xIr equivale a $\delta^* x I \delta^* r$. Si ha poi ovviamente $\delta^{*2} = u$. Resta così dimostrato il teor. 3.

Si constata immediatamente che:

LEMMA 3: *nel piano* (P, L, I) *ora costruito ogni punto è incidente ad almeno due rette e ogni retta è incidente ad almeno due punti.*

4. Vogliamo ora vedere se e in che senso i procedimenti indicati in 2. e 3. sono l'uno l'inverso dell'altro. Ci occorrono le seguenti definizioni:

df. 9. *Chiameremo* **struttura grafica autopolare** *(s.g a.) ogni coppia* (π, δ) *in cui* π *sia un piano grafico autopolare nel quale* *ogni punto sia incidente ad almeno due rette e ogni retta sia incidente ad almeno due punti, e δ una sua polarità.*

df. 10. *Due s g.a.* $S = (\pi, \delta)$ *e* $S' = (\pi', \delta')$ *si diranno isomorfe se esiste un isomorfismo* λ *di* π *su* π' *tale che* $\delta' = \lambda\delta\lambda^{-1}$.

In quanto segue indicheremo con $\mathfrak{A}(\pi, \delta)$ la struttura algebrica costruita a partire da un piano grafico autopolare π e da una sua polarità δ, (quindi, se π soddisfa alla condizione prevista in df 9, a partire da una s.g.a), con $\mathfrak{F}_{L,\delta}(P, f)$ e $\mathfrak{D}_{L,\delta}(P, f)$ il piano e la polarità costruiti in 3. a partire da un g.g. privo di elementi singolari (P, f) e da certi L, δ nelle condizioni indicate in 3, e infine con $\mathfrak{S}_{L,\delta}(P, f)$ la s.g.a. $((\mathfrak{F}_{L,\delta}), \mathfrak{D}_{L,\delta}(P, f))$. ($\mathfrak{F}_{L,\delta}(P, f)$ e $\mathfrak{S}_{L,\delta}(P, f)$ dipendono anche dalla scelta di L e δ ma vedremo che scelte diverse portano a $\mathfrak{S}_{L,\delta}(P, f)$ isomorfe).

Vale il seguente:

Teor. 5. *Se* S *è una s.g.a. allora* $\mathfrak{A}(S)$ *è un g.g. privo di elementi singolari e* $\mathfrak{S}_{L,\delta}(\mathfrak{A}(S))$ *è isomorfa ad* S. *Se* G *è un g.g. privo di elementi singolari* $\mathfrak{S}_{L,\delta}(G))$ *è una s.g.a. e* $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_{L,\delta}(G))$ *coincide con* G.

La prima parte di ciascuna delle due affermazioni del teorema è già dimostrata nei num. 2. e 3. e l'abbiamo riportata per chiarezza.

Sia ora $S = (\pi, \varphi)$ una s.g.a. con $\pi = (P, L, I)$ e sia $G = \mathfrak{A}(S) = (P, f)$. A partire da un insieme L' in corrispondenza biunivoca con P e disgiunto da esso e da un'applicazione biunivoca δ di P su L' costruiamo, col procedimento dato in 3. un piano grafico autopolare $\pi' = (P, L', I')$ e una sua polarità δ^*. Consideriamo ora l'applicazione σ di $P \cup L$ su $P \cup L'$ definita da:

$$\sigma x = x \quad \text{se} \quad x \in P$$

$$\sigma r = \delta^* \varphi r \quad (= \delta\varphi r) \quad \text{se} \quad r \in L,$$

ovviamente essa porta P su P e L in L' e la sua restrizione a P è biunivoca. È facile vedere che essa porta L *su* L' e che anche la sua restrizione a L è biunivoca, infatti se $r' \in L'$ la r' proviene nella σ da $r = \varphi\delta^{-1}r' \in L$ e solo da r. La σ è un isomorfismo di π su π', infatti è xIr con $x \in P$ e $r \in L$ se e solo se esiste un $y \in P$ $(y \neq x)$ per cui $\overline{xy} = r$ il che equivale a $f(x, y) = \varphi r$ e perciò a $xI'\delta\varphi r$ e infine a $\sigma x I' \sigma r$.

Inoltre la σ trasforma la φ nella δ^*, infatti:

se $x \in P$: $\sigma\varphi\sigma^{-1}x = \sigma\varphi x = \delta\varphi\varphi x = \delta x = \delta^* x$,

se $x \in L'$: $\sigma\varphi\sigma^{-1}x = \sigma\varphi\varphi\delta^{-1}x = \sigma\delta^{-1}x = \delta^{-1}x = \delta^* x$.

Resta così dimostrato l'isomorfismo fra (π, φ) e (π', δ^*) e con esso la prima parte del teor. 5.

Resta da dimostrare che se $G = (P, f)$ è un g.g. privo di elementi singolari allora esso coincide col g.g.

$$G' = (P, f') = \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{L,\delta}(P, f), \mathfrak{D}_{L,\delta}(P, f)).$$

Posto al solito $\mathfrak{D}_{L,\delta}(P, f) = \delta^*$ e indicando con $\overline{xy}$ la retta che congiunge x e y in $\mathfrak{F}_{L,\delta}(P, f)$ si ha per ogni coppia (x, y) di elementi di P con $x \neq y$:

$$f'(x, y) = \delta^* \overline{xy} = \delta^{-1} \overline{xy} = \delta^{-1} \delta f(x, y) = f(x, y).$$

Come corollario del teor. 5 si ha subito che un g.g. G privo di elementi singolari determina $\mathfrak{S}_{L,\delta}(G)$ e perciò $\mathfrak{F}_{L,\delta}(G)$ a meno di isomorfismi e perciò trascureremo d'ora in poi gli irrilevanti indici L, δ. In particolare è facile vedere che si può scegliere come applicazione δ quella che ad ogni $x \in P$ fa corrispondere l'insieme degli $y \in P$ per per cui esiste uno $z \in P$ tale che $f(y, z) = x$ (prendendo ovviamente come L l'immagine di P in δ). I δx così ottenuti danno le rette di $\mathfrak{F}(G)$ "pensate come insiemi di punti".

Teor. 6. *Se G e G' sono g.g. privi di elementi singolari e fra loro isomorfi* (*) *allora $\mathfrak{S}(G)$ e $\mathfrak{S}(G')$ sono isomorfe. Se S e S' sono s.g.a. isomorfe allora $\mathfrak{A}(S)$ e $\mathfrak{A}(S')$ sono isomorfi.*

Sia $G = (P, f)$ e $G' = (P', f')$, sia σ un isomorfismo di G su G' e poniamo:

$$\pi = \mathfrak{F}_{L,\delta}(G) \qquad \delta^* = \mathfrak{D}_{L,\delta}(G)$$

$$\pi' = \mathfrak{F}_{L',\delta'}(G') \qquad \delta'^* = \mathfrak{D}_{L',\delta'}(G)$$

Definiamo un'applicazione ρ di $P \cup L$ su $P' \cup L'$ ponendo:

$$\rho x = \sigma x, \quad \text{se} \quad x \in P$$

$$\rho x = \delta'^* \sigma \delta^* x = \delta' \sigma \delta^{-1} x, \quad \text{se} \quad x \in L.$$

È facile verificare che ρ è l'isomorfismo cercato (di $\mathfrak{S}(G)$ su $\mathfrak{S}(G')$).

Siano S e S' due s.g.a. e ρ un isomorfismo di S su S', la restrizione di ρ a P (insieme dei punti di S) è allora il richiesto isomorfismo fra $\mathfrak{A}(S)$ e $\mathfrak{A}(S')$.

(*) Due g.g. $G = (P, f)$ e $G' = (P', f')$ si diranno isomorfi se esiste una applicazione biunivoca σ di G su G' tale che sia:

$$\sigma f(x, y) = f(\sigma x, \sigma y) \qquad (\text{quali che siano } x, y \in P \text{ con } x \neq y)$$

In particolare dal teor. 6 segue che se π è un piano autopolare in cui ogni retta è incidente ad almeno due punti e ogni punto è incidente ad almeno due rette allora ad esso, in corrispondenza alle sue polarità, rimangono associati a meno di isomorfismi tanti g.g. quante sono le classi di polarità coniugate di π.

In altri termini se φ e ψ sono polarità di π, $\mathfrak{A}(\pi, \varphi)$ e $\mathfrak{A}(\pi, \psi)$ sono isomorfi se e solo se φ e ψ sono trasformabili l'una nell'altra mediante una collineazione di π. In ogni caso però, posto

$$G_\varphi = (P, f_\varphi) = \mathfrak{A}(\pi, \varphi)$$

e

$$G_\psi = (P, f_\psi) = \mathfrak{A}(\pi, \psi)$$

si ha:

$$f_\varphi(x, y) = \varphi\overline{xy}$$

e

$$f_\psi(x, y) = \psi\overline{xy}$$

da cui

$$f_\psi(x, y) = \psi\varphi f(x, y),$$

dove $\psi\varphi$ risulta ovviamente una sostituzione su P. Viceversa se $G = (P, f)$ e $G' = (P. f')$ sono g.g. privi di elementi singolari e si ha:

$$f(x, y) = \sigma f'(x, y)$$

dove σ è una sostituzione su P allora $\mathfrak{S}(G)$ e $\mathfrak{S}(G')$ sono isomorfi (teor. 5 corollario).

Se chiamiamo *quasiisomorfismo* di un g.g. $G = (P, f)$ su un g.g. $G' = (P', f')$ ogni applicazione biunivoca σ di P su P' per cui si abbia:

$$f'(\sigma x, \sigma y) = \lambda\sigma f(x, y) \tag{11}$$

essendo λ una sostituzione su P', risulta allora dal teor. 6 e dall'osservazione suesposta che:

TEOR. 7. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due g.g. privi di elementi singolari G e G' abbiano piani associati $\mathfrak{S}(G)$ e $\mathfrak{S}(G')$ isomorfi è che esista un quasiisomorfismo di G su G'.*

5. In questo paragrafo vogliamo introdurre per i g.g. il concetto di "quasiomomorfismo" (vedremo che non esistono corrispondenze fra g.g. che godano delle consuete proprietà degli omomorfismi, salvo, naturalmente, gli isomorfismi) e il concetto ad esso associato per i piani grafici autopolari che definiremo anzi per i piani grafici in generale. Si tratta di un tipo di corrispondenza fra piani grafici già nota e considerata per la prima volta da MARSHALL HALL in [2].

Siano $\pi = (P, L, I)$ e $\pi' = (P', L', I')$ due piani grafici e λ una applicazione di PUL in (su) $P'UL'$. Allora:

df. 11. *λ si dirà un quasiomomorfismo (q. o.) di π in (su) π' se:*

se $\quad$ xIy *allora* $\lambda\mathrm{xI'}\lambda\mathrm{y}$ $\quad (\mathrm{x, y \in PUL})$

e $\quad$ $\lambda(\mathrm{P}) \subseteq \mathrm{P'}$ $\quad \lambda(\mathrm{L}) \subseteq \mathrm{L'}$.

Si è usata la parola "quasiomomorfismo" anzichè la parola "omomorfismo" in vista del fatto che non sempre l'immagine in un q.o. della congiungente due punti distinti è la congiungente delle immagini (la locuzione "congiungente delle immagini" può infatti non aver senso perchè le immagini dei due punti possono coincidere). Si verifica però la seguente circostanza:

TEOR. 8. *Se ogni elemento di $\lambda(\mathrm{P})$ (di $\lambda(L)$) è incidente ad almeno due elementi di $\lambda(\mathrm{L})$ (di $\lambda(\mathrm{P})$) allora la restrizione della $\mathrm{I'}$ a $\lambda(\mathrm{P})\mathrm{U}\lambda(\mathrm{L})$ coincide con l'immagine* (*) *in λ della* I.

Sia infatti $\bar{I}$ l'immagine (*) della I in λ (cioè $x'\bar{I}y'$ se e solo se esistono $x, y \in PUL$ con xIy, $\lambda x = x'$, $\lambda y = y'$). Sia $x'I'y'$, con $x', y' \in P'UL'$, non è restrittivo supporre $x' \in \lambda(P)$ e $y' \in \lambda(L)$. Sia ancora $z' \neq x'$ un elemento di $\lambda(P)$ tale che $z'I'y'$ e siano x un elemento di $\lambda^{-1}(x')$, z un elemento di $\lambda^{-1}(z')$ e infine y l'elemento di L incidente a x e a z. Allora si ha:
$x'\bar{I}\lambda y$ e $z'\bar{I}\lambda y$ da cui $x'I'\lambda y$ e $z'I'\lambda y$. Ma essendo π' un piano grafico ne segue $\lambda y = y'$ e perciò $x'\bar{I}y'$.

Un esempio di quasiomomorfismo è il seguente: sia π il piano razionale e rappresentiamo come è sempre possibile i suoi punti e le sue rette con terne di numeri interi di M.C.D. 1, sia π' il piano sul campo $GF(p)$ dei resti modulo un numero primo p e λ l'omomorfismo naturale dell'anello degli interi su $GF(p)$. Allora l'applicazione λ^* che al punto (x, y, z) di π fa corrispondere il punto $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ di π' e alla retta (u, v, w) di π la retta $(\lambda u, \lambda v, \lambda w)$ di π' è un quasiomomorfismo di π su π'.

(*) "Immagine" nel senso che viene specificato subito dopo.

Come è noto ogni piano grafico π generabile mediante un suo n-punto libero S_1^n (in particolare ogni piano grafico finito) è immagine quasiomomorfa del piano libero P^n generato da S_1^n. (Cfr. MARSHALL HALL [2] e LOMBARDO RADICE [3]). Precisamente un quasiomomorfismo λ di P su π si può costruire per induzione sulla costruzione stadiale di P^n con la seguente legge:

(12,1) se $x \in S_1^n$ $\lambda x = x$

(12,2) se $x \neq y$ e $\lambda x \neq \lambda y$ allora $\lambda(\overline{xy}) = \overline{\lambda(x)\lambda(y)}$

(12,3) se $x \neq y$ e $\lambda(x) = \lambda(y)$ allora si sceglie come $\lambda(xy)$ un qualunque elemento incidente a $\lambda(x)$ (*).

Diamo ora una analoga definizione per i g.g.:

df. 12. *Se* G $=$ (P, f) e G$'$ $=$ (P$'$, f$'$) *sono g.g. una applicazione* λ *di* P *in (su)* P$'$ *si dirà un quasiomomorfismo di* G *in (su)* G$'$ *se per ogni coppia* (x, y) *di elementi di* P *tali che* $\lambda x \neq \lambda y$ *si ha:*

$$f'(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y) \tag{13}$$

Vogliamo dimostrare che:

TEOR. 9. *Se* G $=$ (P, f) *e* G' $=$ (P$'$, f$'$) *sono g.g. privi di elementi singolari e* λ *è un quasiomomorfismo di* G *su* G' *allora esiste un quasiomomorfismo di* $\mathcal{S}$(G) *su* $\mathcal{S}$(G$'$);

Poniamo $\delta = \mathfrak{D}(G)$ e $\delta' = \mathfrak{D}(G')$ e sia $\bar{\lambda}$ l'applicazione dell'insieme dei puuti e delle rette di $\mathcal{S}(G)$ nell'insieme dei punti e delle rette di $\mathcal{S}(G')$ così definita:

$$\text{se } x \text{ è un punto di } \mathcal{S}(G) \text{ allora } \bar{\lambda} x = \lambda x$$

$$\text{se } r \text{ è una retta di } \mathcal{S}(G) \text{ allora } \bar{\lambda} r = \delta' \lambda \delta r.$$

Ovviamente la $\bar{\lambda}$ porta l'insieme dei punti di $\mathcal{S}(G)$ sull'insieme dei punti di $\mathcal{S}(G')$ e l'insieme delle rette di $\mathcal{S}(G)$ sull'insieme delle rette di $\mathcal{S}(G')$. Ora se x ed r sono un punto e una retta di $\mathcal{S}(G)$ incidenti si avrà $f(x, y) = \delta r$ per un opportuno $y \in P$.

Dimostriamo anzi che è sempre possibile scegliere y in modo che si abbia $\lambda x \neq \lambda y$. Se infatti per tutti gli y nelle condizioni

(*) L'uso dell'assioma della scelta non è necessario: si può facilmente costruire una funzione di scelta. Si intende che le (12,2) e (12,3) devono applicate a quelle coppie x, y che, ad un certo stadio della costruzione di P^n, danno luogo a una «nuovo» elemento.

indicate, cioè per tutti i punti di $\mathcal{S}(G)$ incidenti alla retta r, fosse $\lambda x = \lambda y$ il punto $\lambda\delta r$ di $\mathcal{S}(G')$ risulterebbe un elemento singolare di G' perchè per ogni $z' \in P'$, $z' \nparallel \lambda\delta r$ si avrebbe:

$$f'(z', \lambda\delta r) = \lambda f(z, \delta r)$$

(dove z è un qualunque elemento tale che $\lambda z = z'$) ma essendo δr incidente in $\mathcal{S}(G)$ solo alle polari (nella polarità δ) dei punti incidenti ad r, sarebbe $\lambda f(z, \delta r) = \lambda x$ qualunque sia $z \nparallel \delta r$.

Supponendo allora $\lambda y \nparallel \lambda x$ potremo scrivere:

$$f'(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y) = \lambda\delta r = \delta'\delta'\lambda\delta r = \delta'\bar{\lambda} r$$

dalla quale risulta che $\bar{\lambda} x = \lambda x$ è incidente a $\bar{\lambda} r$ in $\mathcal{S}(G')$. La $\bar{\lambda}$ risulta così essere un quasiomomorfismo di $\mathcal{S}(G)$ su $\mathcal{S}(G')$.

Osserviamo anche che:

TEOR. 10. *Nelle ipotesi del teorema 9 la polarità δ' è immagine in λ della polarità δ*

Dimostriamo che si ha:

$$\delta'\bar{\lambda} = \bar{\lambda}\delta \tag{14}$$

Se infatti x è un punto di $\mathcal{S}(G)$ si ha:

$$\lambda\delta x = \delta'\lambda\delta\delta x = \delta'\lambda x = \delta\bar{\lambda} x.$$

Se r è una retta di $\mathcal{S}(G)$ sarà $r = \delta x$ con $x \in P$ e perciò:

$$\bar{\lambda}\delta r = \bar{\lambda}\delta\delta x = \bar{\lambda} x = \lambda x$$

e

$$\delta'\bar{\lambda} r = \delta'\bar{\lambda}\delta x = \delta'\delta'\lambda\delta\delta x = \lambda x, \text{ quindi } \bar{\lambda}\delta r = \delta'\bar{\lambda} r.$$

Segue dalla (14) e del fatto che δ e δ' sono applicazioni biunivoche che il prodotto (di relazioni) $\bar{\lambda}\delta\bar{\lambda}^{-1}$ è una applicazione e precisamente la δ'. Notiamo esplicitamente la circostanza, implicita in quanto sopra, che se $\bar{\lambda} x = \bar{\lambda} y$ allora $\bar{\lambda}\delta x = \bar{\lambda}\delta y$.

Possiamo invertire i teoremi 9 e 10 dimostrando che:

TEOR. 11. *Se $\pi = (\mathrm{P}, \mathrm{L}, \mathrm{I})$ e $\pi' = (\mathrm{P}', \mathrm{L}', \mathrm{I}')$ sono piani grafici in cui ogni punto è incidente ad almeno due rette e ogni retta è incidente ad almeno due punti, se inoltre π è autopolare ed esiste* *un quasiomomorfismo* λ *di* π *su* π' *tale che per una polarità* δ *di* π $\lambda x = \lambda y$ *implichi* $\lambda\delta x = \lambda\delta y$ (*quali che siano* $x, y \in PUL$) (*) *allora:*

a) π' *è autopolare e la* $\delta' = \lambda\delta\lambda^{-1}$ *è una sua polarità*

b) *la restrizione della* λ *a* P *è un quasiomomorfismo di* $\mathfrak{A}(\pi, \delta)$ *su* $\mathfrak{A}(\pi', \delta')$.

Dim. Nelle ipotesi fatte la relazione $\delta' = \lambda\delta\lambda^{-1}$ è una applicazione di $P'UL'$ in sè, se infatti x' è un elemento di $P'UL'$ e x, $\bar{x}$ sono elementi di $\lambda^{-1}x'$, essendo $\lambda\bar{x} = \lambda x$ si ha anche $\lambda\delta x = \lambda\delta\bar{x}$. Inoltre si ha: $\delta'^2 = u$ (essendo u l'applicazione identica di $P'UL'$ su se stesso) e ne segue che la δ' è un'applicazione biunivoca di $P'UL'$ su se stesso.

Banalmente $\delta' P' = L'$ e $\delta' L' = P'$.

Infine sia $x'I'y'$. Per il teor. 8 esisteranno due elementi x, y appartenenti rispettivamente a $\lambda^{-1}x'$ e a $\lambda^{-1}y'$ tali che xIy. Poichè la δ è una polarità si avrà anche $\delta x I \delta y$ e quindi per la definizione di quasiomomorfismo $\lambda\delta x I' \lambda\delta y$ ossia $\delta' x' I \delta' y'$. Abbiamo così dimostrato che la δ' è una polarità di π'.

Dimostriamo ora la proposizione *b*).

Siano x, y elementi di P con $\lambda x \neq \lambda y$. Per la definizione di $\mathfrak{A}(G')$ si ha:

$$f'(\lambda x, \lambda y) = \delta' \overline{\lambda x \cdot \lambda y} = \lambda\delta\lambda^{-1}(\overline{\lambda x \cdot \lambda y})$$

(dove la scrittura $\overline{\lambda x \cdot \lambda y}$ indica la retta che congiunge λx e λy in π'). Per la definizione di quasiomomorfismo, tenuto conto della condizione $\lambda x \neq \lambda y$, si ha $\lambda(\overline{xy}) = (\overline{\lambda x \cdot \lambda y})$ (la scrittura $\overline{xy}$ indica la congiungente di x e y in π). Così $\overline{xy}$ è un elemento di $\lambda^{-1}(\overline{\lambda x \cdot \lambda y})$ e si ha:

$$f'(\lambda x, \lambda y) = \lambda\delta(\overline{xy}) = \lambda f(x, y).$$

(*) Che questa condizione non sia superflua si può vedere mediante il seguente esempio: il piano eccezionale di André è generabile mediante operazioni proiettive da certi suoi S_1^4 (vedi H. Neumann [6] e R. Magari [5]) e quindi è immagine quasiomomorfa del piano libero P^4. Ora mentre P^4 è autopolare il piano eccezionale di André non lo è (André [1]).

La restrizione di λ a P è quindi un quasiomomorfismo di $\mathcal{A}(G)$ su $\mathcal{A}(G')$. Osserviamo che ancora una volta i procedimenti adottati sono l'uno l'inverso dell'altro. Per comodità riassumiamo i risultati ottenuti in questo e nei precedenti paragrafi in una tabella di strutture e corrispondenze associate con i procedimenti fin qui indicati.

◆ g.g. privo di elementi sing.	◆ s. g. a.
◆ isomorfismo fra due g g. privi di elementi singolari.	◆ isomorfismo fra le due s.g.a. associate.
◆ quasiisomorfismo c.s.	◆ isomorfismo fra i due piani associati.
◆ quasiomomorfismo c.s.	◆ quasiomomorfismo c.s. soddisfacente alle ipotesi del teor. 11.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOHANNES ANDRÈ, *Projektive Ebenen über Fastkörpern* «Math. Zeitschrift» 62, pagg. 137-160 (1955).

[2] MARSHALL HALL *Projective planes* «Trans. of Am. Math. Soc.» 54 pagg. 229-277 (1943).

[3] LUCIO LOMBARDO RADICE, *Su alcuni caratteri dei piani grafici,* «Rend. Sem. Mat. Padova», XXIV pagg. 312-345 (1955).

[4] ROBERTO MAGARI *Su una classe di simboli atta a rappresentare gli elementi di un piano grafico e su un teorema di riduzione a forma normale.* «Rend. Classe scienze fis. mat. e nat, dell'Acc. Naz. dei Lincei» serie VIII, vol. XXXIII, fasc. 1-2 pagg. 37-44 (1962).

[5] — —, *Le configurazioni parziali contenute nel piano,* P, *sul quasicorpo associativo di ordine* 9. «Bollettino U. M. I» (3) Vol. 13, pagg. 128-140 (1958).

[6] HANNA NEUMANN, *On some finite non desarguesian planes* «Archiv der Math.» 6, pag. 86 (1955).