Bollettino Unione Matematica Italiana

Salvatore Rionero

Sui campi magnetici possibili in un fluido conduttore uniformemente ruotante.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 230–237.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_230_0>

Sui campi magnetici possibili in un fluido conduttore uniformemente ruotante

Nota di SALVATORE RIONERO (a Napoli) (*) (**)

Sunto. - *Si mettono in evidenza alcune analogie tra la magnetofluidodinamica dei fluidi conduttori uniformente ruotanti e la magnetofluidostatica.*

1. In un recente Lavoro [1], mi sono interessato dell'equilibrio relativo magnetofluidodinamico (m.f.d.) di una massa fluida uniformemente ruotante ed altamente conduttrice. In tale Lavoro ho caratterizzato i campi magnetici non stazionari compatibili con tale equilibrio, nell'ipotesi che non dipendano dalla coordinata assiale, pervenendo a delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè la configurazione d'equilibrio della massa fluida sia ellissoidale.

Nella presente Nota riprendo il solo problema della caratterizzazione dei campi magnetici possibili in un fluido conduttore uniformemente ruotante, per trattarlo però nelle condizioni più generali e cioè abbandonando sia l'ipotesi che il fluido sia altamente conduttore, sia quella che i campi magnetici non dipendano dalla coordinata assiale.

Precisamente, detta $Oxyz$ una terna ortogonale levogira fissa, con l'origine nel baricentro della massa fluida e l'asse z coincidente con l'asse di rotazione ed indicato con $\boldsymbol{H}$ il campo magnetico relativo a tale terna, ho anzitutto nel n° 2 scritto le equazioni euleriane della m.f.d. per il fluido ruotante, occupandomi poi nel n° 3 della loro trasformazione in forma lagrangiana.

A tale scopo ho introdotto la terna di assi ortogonali levogira $\xi\eta z$ solidale al sistema ruotante, osservando che l'unico termine delle equazioni della m.f.d. della massa fluida ruotante che si

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 7 maggio 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n° 14 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R. per l'anno 1962-63.

altera nel passaggio delle variabili euleriane (x, y, z) a quelle lagrangiane (ξ, η, z) è il vettore $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$, cioè il derivato parziale temporale euleriano di $\boldsymbol{H}$, calcolato rispetto alla terna fissa. È appunto esprimendo opportunamente tale vettore tramite $\frac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t}$, cioè tramite il derivato parziale temporale lagrangiano di $\boldsymbol{H}$, calcolato però rispetto alla terna solidale, che ho ricavato, nel n° 3, le equazioni della m.f.d. del fluido ruotante in forma lagrangiana.

Confrontando tali equazioni con le equazioni della magnetofluidodinamica, nel n° 4 ho provato che:

A) *Le equazioni lagrangiane della m.f.d. di una massa fluida conduttrice uniformemente ruotante, coincidono con le equazioni della magnetofluidostatica, purchè si tenga conto della forza centrifuga e si sostituisca al derivato euleriano* $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ *di* $\boldsymbol{H}$, *il derivato relativo lagrangiano* $\frac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t}$.

Tale proposizione consente di caratterizzare facilmente. in linea del tutto generale, i campi magnetici possibili in un fluido conduttore uniformemente ruotante. Precisamente, sempre al n° 4, provo che:

B) *I campi magnetici possibili in un fluido conduttore uniformemente ruotante, non differiscono, se espressi lagrangianamente, dai campi magnetofluidostatici.*

Particolarmente interessante è il caso dei fluidi *altamente* conduttori per i quali la proprietà *B*) diviene:

C) *Il più generale campo magnetico possibile in un fluido altamente conduttore uniformemente ruotante è un campo magnetofluidostatico ruotante solidalmente al fluido.*

Nel n° 5 mostro infine come, servendosi delle proposizioni sopra enunciate, si possa ritrovare molto rapidamente la caratterizzazione dei campi magnetici, indipendenti dalla coordinata assiale, possibili in un fluido ruotante altamente conduttore, che ha costituito la prima parte del mio precedente Lavoro [1].

2. Com'è noto, le equazioni della m.f.d. per un fluido incomprimibile, quando si trascurano le correnti di spostamento in confronto di quelle di conduzione, sono:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) + \dfrac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0 \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \\ \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{\rho_0} p - U\right) - \dfrac{\mu}{4\pi\rho_0} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \nu\Delta_2 \boldsymbol{v} = 0 \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \end{cases}$$

ove U è il potenziale delle forze non elettromagnetiche agenti sull'unità di massa del fluido, p la pressione, μ e ρ_0 due costanti rappresentative della permeabilità magnetica e della densità del sistema, e σ, ν, c sono rispettivamente il coefficiente di conducibilità elettrica, il coefficiente di viscosità cinematica e la velocità della luce.

Detta $Oxyz$ una terna cartesiana levogira fissa di versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ con l'origine nel baricentro O del sistema, supporremo, che la massa fluida ruoti uniformemente attorno all'asse z con velocità $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$.

In tale ipotesi, detto P il generico punto della massa ruotante. si ha:

$$(2)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \\ \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} = -\dfrac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \Delta_2 \boldsymbol{v} = 0 \end{cases}$$

Essendo inoltre:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{H} - \Delta_2 \boldsymbol{H},$$

dalla (1_2) segue:

$$(3)\qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -\Delta_2 \boldsymbol{H}$$

e pertanto il sistema (1) diventa:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = \dfrac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta_2 \boldsymbol{H} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi\rho_0}{\mu} \operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{\rho_0} p - U - \dfrac{1}{2} v^2\right), \end{cases}$$

con $\boldsymbol{v}$ dato dalla (2_1).

Aggiungiamo infine che le equazioni (4), come le (1) da cui sono state ricavate, sono equazioni di forma euleriana e quindi la derivata:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{5}$$

oltre ad essere calcolata proprio rispetto alla terna $Oxyz$ è una derivata parziale temporale di tipo euleriano.

3. Ci proponiamo ora di vedere come si trasforma il sistema (4) quando ci si riferisce ad un sistema di variabili lagrangiane.

A tale scopo introduciamo la terna di assi $O\xi\eta z$, solidale al sistema ruotante, di versori $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}$ e legata alla terna fissa $Oxyz$ dalle relazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = x \cos \omega t + y \operatorname{sen} \omega t \\ \eta = -x \operatorname{sen} \omega t + y \cos \omega t \\ z = z. \end{array}\right. \tag{6}$$

Evidentemente le (ξ, η z) rappresentano delle variabili lagrangiane del fluido ruotante. Per effettuare il passaggio delle variabili euleriane (x, y, z) alle variabili lagrangiane (ξ, η, z), nelle (4) si può supporre $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{v}$ funzioni di x, y, z, tramite le (6). Di conseguenza si ha:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^* \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{7}$$

ove col simbolo:

$$\frac{\partial^* \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{8}$$

abbiamo indicato la derivata temporale di $\boldsymbol{H}$, calcolata ancora rispetto alla terna $Oxyz$.

Ma d'altra parte si ha:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} = \omega \eta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = -\omega \xi \\ \dfrac{\partial^* \boldsymbol{H}}{\partial t} = \dfrac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t} + \omega \wedge \boldsymbol{H}, \end{array}\right. \tag{9}$$

ove $\frac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t}$ è la derivata temporale lagrangiana del campo magnetico H osservato dalla terna fissa, calcolata però rispetto alla terna solidale $O\xi\eta z$. Di conseguenza la (7) diventa:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t} + \omega \wedge \boldsymbol{H} + \omega\left(\eta \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \eta}\right). \tag{10}$$

Ma dalla (2_1) segue

$$\left\{\begin{aligned} & \boldsymbol{v} = \omega(-\eta \boldsymbol{i}' + \xi \boldsymbol{j}') \\ & \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} = \omega \wedge, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

onde si ha.

$$\left\{\begin{aligned} & \omega \wedge \boldsymbol{H} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{H} \\ & \omega\left(\eta \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \xi \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \eta}\right) = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial P} \boldsymbol{v}, \end{aligned}\right.$$

e la (10) si scrive

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{H} - \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{v}. \tag{12}$$

Ricordando infine la nota relazione [2]:

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = \left(\operatorname{div} \boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) \boldsymbol{H} - \left(\operatorname{div} \boldsymbol{H} - \frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\right) \boldsymbol{v},$$

e tenendo conto che $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$, segue:

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{H},$$

onde in definitiva si ha:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}). \tag{13}$$

Tenendo conto della (13) e del fatto che tutti gli altri operatori che figurano nelle (4) sono invarianti rispetto alla rotazione di assi (6), si può, in conclusione, affermare che l'espressione lagrangiana del sistema (4) è:

$$
(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t} = \dfrac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta_2 H \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi\rho_0}{\mu} \operatorname{grad} \left(\dfrac{1}{\rho_0} p - U - \dfrac{1}{2} v^2 \right) \end{cases}
$$

4. Ci proponiamo ora di confrontare le equazioni (14) con le equazioni della magnetofluidostatica. A tale scopo ricordiamo che, com'è noto [3], tali equazioni si deducono dalle (1) ponendo $v = 0$. Tenendo conto della (3), si ha:

$$
(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \dfrac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta_2 \boldsymbol{H} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = \dfrac{c^2}{4\pi\rho_0} \operatorname{grad} \left(\dfrac{1}{\rho_0} p - U \right). \end{cases}
$$

D'altra parte il vettore $\frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2$, che compare nella (14_3) rappresenta la forza centrifuga agente sull'unità di massa del sistema, pertanto il confronto tra le (14) e le (15) dimostra la proposizione *A*) del n°. 1.

Per quanto riguarda poi i campi elettromagnetici possibili nella massa fluida uniformemente ruotante, osserviamo che tali campi, per le (14) devono soddisfare alle equazioni:

$$
(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t} = \dfrac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta_2 \boldsymbol{H} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \\ \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}) = 0. \end{cases}
$$

Ma tali equazioni, come segue dalle (15), sono le equazioni che caratterizzano i campi magnetofluidostatici [1]; resta così provata anche la proposizione *B*) del n° I.

[1] Si tenga conto che nella magnetofluidostatica, essendo $v = 0$, ovviamente è:

$$
\frac{\partial_r^* \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}.
$$

Particolarmente notevole si presenta poi il caso che la massa fluida ruotante sia altamente conduttrice. Infatti in tal caso, essendo $\sigma = \infty$, dalla (16) segue

$$\frac{\partial_r^* H}{\partial t} = 0, \tag{17}$$

cioè il campo magnetico H è stazionario rispetto alla terna ruotante $O\xi\eta z$. Vale quindi, come immediata conseguenza della B), la proposizione C) del n° 1.

5. Supporremo qui infine che, come abbiamo supposto nel precedente Lavoro [1], il fluido sia altamente conduttore e il vettore $\boldsymbol{H}$ non dipenda dalla coordinata assiale. Ci proponiamo di dimostrare come, facendo uso delle considerazioni dei numeri precedenti, si possono facilmente ritrovare le formule fondamentali (20) e (21) del detto Lavoro, cioè le relazioni che caratterizzano, nelle suddette ipotesi, i campi magnetici compatibili con l'equilibrio relativo e l'integrale primo del moto.

A tale scopo osserviamo che, poichè è $\sigma = \infty$ ed H non dipende da z, si soddisfano la (17) e la (16_2) ponendo:

$$\boldsymbol{H} = -\frac{\partial V}{\partial \eta}\,\boldsymbol{i}' + \frac{\partial V}{\partial \xi}\,\boldsymbol{j}' + H_z \boldsymbol{k} \tag{18}$$

con V ed H_z funzioni arbitrarie di ξ ed η.

Dalla (18), facilmente segue:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = &-\Delta_2 V \cdot \operatorname{grad} V - \frac{1}{2} \operatorname{grad} H_z^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right) \boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{19}$$

da cui, imponendo la (16_3), si deduce:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial H_z}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial H_z}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \Delta_2 V \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \cdot \Delta_2 V \right) = 0, \end{aligned} \right. \tag{20}$$

che integrate danno:

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \xi}\dfrac{\partial H_z}{\partial \eta} - \dfrac{\partial V}{\partial \eta}\dfrac{\partial H_z}{\partial \xi} = C_1 \\ \Delta_2 V = f(V) \end{cases}$$

don C_1 cost. ed $f(V)$ funzione arbitraria di V.

Per le (21) la (19) poi diviene

$$(22)\qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\int f(V)dV - \frac{1}{2}\operatorname{grad} H_z^2 + C_1 \operatorname{grad} z,$$

e quindi dalla (14) segue l'integrale:

$$(23)\qquad \frac{4\pi\rho_0}{\mu}\left[\frac{1}{\rho_0}p - \frac{1}{2}\omega^2(\xi^2+\eta^2) - U\right] + \frac{H_z^2}{2} + \int f(V)dV - C_1 z = C_2,$$

con C_2 cost.

Se si pone:

$$(24)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{4\pi\rho_0}{\mu} \\ f(V) = \lambda g(V) \\ C_1 = \lambda u, \qquad C_2 = \lambda K, \end{cases}$$

le (21) e (23) coincidono esattamente con le (20) e (21) di [1] (2).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Rionero, *Sull'equilibrio relativo di masse fluide uniformemente ruotanti ed altamente conduttrici in campi magnetici non stazionari indipendenti dalla coordinata assiale*, «Ricerche di Matematica», v. XI (1962) pp. 139-156.

[2] Burali-Forti e Marcolongo, *Analisi vettoriale generale*, vol. I, 2ª ediz. Zanichelli edit., p. 188.

[3] Ferraro-Plumpton, *An introduction to magneto-fluid mechanics* «Oxford university press 1961», cap. II.

(2) Osserviamo che dalle (24) segue che le funzioni arbitrarie $u = u(t)$ e $K = K(t)$ che compaiono nelle (20) e (21) di [1], devono essere delle costanti. Ciò del resto si poteva dedurre anche in [1] dalle (9), (10) e (11).