Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio Avantaggiati

Sulla matrice fondamentale per i sistemi ellittici del prim'ordine a coefficienti costanti in due variabli indipendenti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 185–196.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_185_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Sulla matrice fondamentale per i sistemi ellittici del prim'ordine a coefficienti costanti in due variabili indipendenti

Nota di Antonio Avantaggiati (a Napoli) (*) (**)

Sunto. - *Si costruisce in termini finiti la matrice fondamentale di cui al titolo.*

Il problema della determinazione della matrice fondamentale di un sistema di tipo ellittico di equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti è stato risolto da molti Autori: basti consultare F. Bureau [2], F. John [3], C. B. Morrey [5] per comprendere quanto siano completi e generali i risultati conseguiti in proposito. In questa nota considero lo stesso problema nel caso di un sistema del prim'ordine in due variabili indipendenti e dimostro che si può esprimere in termini finiti la relativa matrice fondamentale. La semplicità del risultato ottenuto (n. 2) e del metodo seguito credo giustifichino questa breve esposizione, anche se alle stesse conclusioni si potrebbe pervenire, ma con un procedimento piuttosto laborioso, o particolarizzando quelle già note per il caso generale (¹) o seguendo il metodo suggerito da Bureau in [2] (²). Qui la trattazione è basata su una formula, dimostrata preliminarmente (n. 1), che permette di valutare in modo abbastanza agevole il salto di certi potenziali appartenenti ad una classe che contiene come caso particolare quella degli ordinari potenziali di doppio strato.

1. Consideriamo la funzione

$$w(y) = \int_{\partial T} \Phi(\eta - y)\varphi(\eta)d_\eta s \qquad y \notin \partial T \tag{1,1}$$

dove T è un dominio limitato di classe $A^{(2)}$ del piano reale euclideo $[E_2]$, ∂T la sua frontiera, $y = (y_1, y_2)$ (e analogamente per le

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 29 aprile 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di Ricerca matematica del C. N. R. per l'anno 1962/63

(¹) Cfr. [3].

(²) Cfr. [2]. *X*.

altre lettere x, η, λ, ...) un punto generico di E_2, Φ [$\Phi(y_1, y_2)$] una funzione definita in E_2 di classe $C^{(1)}$ in ogni punto diverso dall'origine O di E_2, che sia omogenea di grado -1, φ una funzione definita su ∂T. Con la stessa tecnica adoperata in [1] per dimostrare il teorema (3,8) si può stabilire il seguente

TEOREMA (1,1). - *Se $\varphi \in C^{(0,\alpha)}(\partial T)$, posto per ogni $\xi \in \partial T$*

$$w^+(\xi) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in T - \partial T}} w(x)\,; \qquad w^-(\xi) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \complement T}} w(x)$$

esiste una funzione $\tilde{\Phi}(\xi)$ di classe $C^{(0,1)}(\partial T)$, dipendente da Φ e da ∂T, tale che si abbia

$$(1,2) \qquad w^{\pm}(\xi) = \pm\, \tilde{\Phi}(\xi)\varphi(\xi) + \int_{\partial T}^{*} \Phi(\eta - \xi)\varphi(\eta)d_\eta s \ \ (^3).$$

Vogliamo occuparci della determinazione di $\tilde{\Phi}$. Indichiamo, quindi, con $\alpha(\xi)$ e $\beta(\xi)$ i coseni direttori della retta tangente a $+\,\partial T$ nel punto ξ. Procedendo come nel n. 3 di [1], si riconosce che

$$(1,3) \qquad \tilde{\Phi}(\xi) = \lim_{\rho \to 0^+} \int_{-d}^{d} \Phi\Big(\alpha_2(\xi)t + \beta_1(\xi)\rho,\ \beta(\xi)t - \alpha(\xi)\rho\Big)\, dt,$$

essendo d un opportuno numero reale positivo. Poniamo $\alpha(\xi) = \cos\tau$, $\beta(\xi) = \operatorname{sen}\tau$ ed eseguiamo nell'ultimo integrale la sostituzione $t = \rho tg\theta$. Tenendo presente che

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\left\{\cot\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2} - \cot\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right\},$$

la (1,3) si trasforma nella seguente

(^{3}) Cfr. [1], teoremi (3, 3) e (3, 8). In verità in [1] le questioni trattate sono relative ad $m (\geq 3)$ variabili indipendenti; è facile vedere, tuttavia, che i risultati del n. 3 di [1] sussistono, mutatis mutandis, anche nel caso $m = 2$.

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \frac{1}{2} \lim_{\rho \to 0^+} \left\{ \int_{-\operatorname{artg}\frac{d}{\rho}}^{\operatorname{artg}\frac{d}{\rho}} \Phi\left(\operatorname{sen}(\theta + \tau), \, -\cos(\theta + \tau)\right) \cot\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\, d\theta \right.$$

$$\left. - \int_{-\operatorname{artg}\frac{d}{\rho}}^{\operatorname{argt}\frac{d}{\rho}} \Phi\left(\operatorname{sen}(\theta + \tau), \, -\cos(\theta + \tau\right) \cot\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\, d\theta \right\}.$$

Da questa, eseguendo nel primo integrale la sostituzione $w = \theta + \tau + \frac{\pi}{2}$, mentre nel secondo l'altra $\omega = \theta + \tau - \frac{\pi}{2}$ e ponendo $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg}\frac{d}{\rho}$, si deduce

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_{\tau - \pi + \varepsilon}^{\tau - \varepsilon} \Phi(\cos\omega, \operatorname{sen}\omega) \cot\frac{\tau - \omega}{2}\, d\omega \right.$$

$$\left. + \int_{\tau + \varepsilon}^{\tau + \pi - \varepsilon} \Phi(\cos\omega, \, \operatorname{sen}\omega) \cot\frac{\tau - \omega}{2}\, d\omega \right\},$$

e quindi in definitiva

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\tau - \pi}^{\tau + \pi} \Phi(\cos\omega, \, \operatorname{sen}\omega) \cot\frac{\tau - \omega}{2}\, d\omega, \tag{1,4}$$

ove si intenda l'integrale ultimo scritto preso in valor principale. Dalla (1,2) risulterà di conseguenza

$$w^+(\xi) - w^-(\xi) = \varphi(\xi) \int_{\tau - \pi}^{\tau + \pi} \Phi(\cos\omega, \, \operatorname{sen}\omega) \cot\frac{\tau - \omega}{2}\, d\omega, \tag{1,5}$$

che è la formula che volevamo stabilire (4). In virtù delle formule (1) del § 2 di [4] si può dedurre facilmente dalla (1,5) l'analoga, ben nota, per gli ordinari potenziali di doppio strato.

(4) Non è difficile riconoscere che una formula analoga si può stabilire se si suppone la Φ dipendente oltre che dal punto y, da un altro punto ξ variabile su ∂T, sia cioè del tipo $\Phi(\xi, y_1, y_2)$, supponendo, però, che essa verifichi rispetto a ξ una condizione di Hölder.

2. Consideriamo un sistema di equazioni alle derivate parziali del prim'ordine in due variabili indipendenti del tipo

$$\sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{2} \overset{p}{a}_{rs} \frac{\partial u_s(x)}{\partial x_p} = f, \qquad r = 1, \dots, 2n \tag{2,1}$$

e supponiamo che tutte le $\overset{p}{a}_{rs}$ siano costanti reali; poniamo

$$\boldsymbol{a}^{(p)} = \| \overset{p}{a}_{rs} \|; \quad a_{rs}(\lambda) = a_{rs}(\lambda_1, \lambda_2) = \overset{1}{a}_{rs}\lambda_1 + \overset{2}{a}_{rs}\lambda_2;$$

$$\boldsymbol{a}(\lambda) = \boldsymbol{a}(\lambda_1, \lambda_2) = \| a_{rs}(\lambda) \|;$$

ammettiamo che sia ellittico nel senso di PETROWSKY e cioè che per ogni $\lambda \neq 0$ si abbia $a(\lambda) = \det \boldsymbol{a}(\lambda) \neq 0$.

Indichiamo con $\boldsymbol{a}^{-1}(\lambda)$ la matrice inversa di $\boldsymbol{a}(\lambda)$ e con $a^{rs}(\lambda)$ gli elementi di $\boldsymbol{a}^{-1}(\lambda)$, i quali verificano quindi le seguenti relazioni:

$$\sum_{t=1}^{2n} a_{rt}(\lambda) a^{ts}(\lambda) = \sum_{t=1}^{2n} a_{tr}(\lambda) a^{st}(\lambda) = \delta_{rs}, \tag{2,2}$$

avendo indicato con δ_{rs} il simbolo di KRONECKER. Poniamo

$$\mu_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^{ik}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \cos\theta \, d\theta \tag{2,3}$$

$$\nu_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^{ik}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \tag{2,3'}$$

$$\alpha_{ik} = \sum_{r=1}^{2n} (\mu_{ir} \overset{1}{a}_{rk} + \nu_{ir} \overset{2}{a}_{rk}) \tag{2,3''}$$

$$M_{rs}(x - y) = M_{rs}(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \tag{2,3'''}$$

$$= \sum_{t=1}^{2n} \alpha_{rt} a^{ts}(-x_2 + y_2, x_1 - y_1).$$

Ci proponiamo di dimostrare che $\| M_{rs}(x - y) \|$ è una matrice fondamentale per il sistema (2,1) nel senso precisato dalle seguenti proposizioni

A) *Per ogni fissato y in qualunque punto $x \neq y$ si ha*

$$\sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{2} a_{rs}^{p} \frac{\partial}{\partial x_p} M_{st}(x-y) = 0 \tag{2,4}$$

$$\sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{2} a_{sr}^{p} \frac{\partial}{\partial x_p} M_{ts}(x-y) = 0 \tag{2,4'}$$

per ogni coppia di indici r, $t = 1, \ldots, 2n$.

B) *Comunque si consideri un dominio regolare D per ogni $y \in D - \partial D$ si ha*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{+\partial D} \sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{2} a_{rs}^{p} n_p(\eta) M_{st}(\eta - y) d_\eta s = \delta_{rt} \tag{2,5}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{+\partial D} \sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{2} a_{sr}^{p} n_p(\eta) M_{ts}(\eta - y) d_\eta s = \delta_{rt} \tag{2,5'}$$

essendo $n_1(\eta)$ e $n_2(\eta)$ i coseni direttori della retta normale a ∂T in η orientata verso l'interno di T.

Dimostriamo innanzi tutto il

LEMMA (2,1). - *Per ogni fissato y ciascuna colonna [riga] della matrice $\| a^{rs}(-x_2 + y_2, x_1 - y_1) \|$ è soluzione del sistema omogeneo [omogeneo aggiunto] associato al sistema* (2,1) *in ogni dominio che non contenga y.*

Sia D_1 un dominio regolare e limitato del piano della variabile complessa w contenuto nel semipiano $Iw > 0$, tale che ogni radice dell'equazione $\det \boldsymbol{a}(w, 1) = 0$, che abbia parte immaginaria positiva, sia interna ad esso; D_2 il simmetrico di D_1 rispetto all'asse reale.

Posto per $x \neq y$

$$L_{rs}^{(i)}(x-y) = -\int_{+\partial D_i} a^{rs}(w, 1) \frac{dw}{(x_1 - y_1)w + (x_2 - y_2)} \qquad i = 1, 2$$

si trova facilmente in virtù delle (2,2):

$$(2,6)\qquad \sum_{t=1}^{2n}\sum_{p=1}^{2} a_{rt}^{p}\frac{\partial}{\partial x_p}L_{ts}^{(i)}(x-y)=\sum_{t=1}^{2n}\sum_{p=1}^{2} a_{p}^{tr}\frac{\partial}{\partial x_p}L_{st}^{(i)}(x-y)=$$

$$=\int_{+\partial D_i}\delta_{rs}\frac{dw}{[(x_1-y_1)w+(x_2-y_2)]^2}=0 \qquad i=1,\ 2.$$

Ciò significa che, fissati i, r, s ed y, le funzioni $L_{ts}^{(i)}[L_{st}^{(i)}]$ ottenute facendo $t=1, \ldots, 2n$ verificano l'omogeneo [omogeneo aggiunto] associato al sistema (2, 1) in ogni punto $x \neq y$. Osserviamo ora che la funzione meromorfa

$$a^{rs}(w,\ 1)\frac{1}{(x_1-y_2)w+(x_2-y_2)}$$

della variabile complessa w, se $x_1-y_1 \neq 0$ ha all'esterno della regione $D_1 \cup D_2$ un unico polo nel punto $-\dfrac{x_2-y_2}{x_1-y_1}$, in cui il residuo è uguale a

$$\frac{1}{x_1-y_1}a^{rs}\left(-\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1},\ 1\right),$$

ed il residuo all'infinito nullo, come si ricava tenendo presente che $a^{rs}(w,\ 1)$ è infinitesima del prim'ordine per $w \to \infty$.

Se $x_1-y_1=0$ la stessa funzione non ha alcun polo all'esterno di $D_1 \cup D_2$ ed il residuo all'infinito è uguale $-a^{rs}(1,\ 0)/(x_2-y_2)$.

Applicando quindi il teorema dei residui, tenuto conto che le $a^{rs}(\lambda_1,\ \lambda_2)$ sono omogenee di grado -1, si ricava

$$L_{rs}^{(1)}(x-y)+L_{rs}^{(2)}(x-y)=a^{rs}(-x_2+y_2,\ x_1-y_1),$$

da cui segue, ovviamente, la tesi del lemma enunciato. Tenendo presente come sono state definite le M_{rs}, si deduce facilmente la (2,4'), indipendentemente dalla definizione delle α_{ik}. Notiamo ora che per dimostrare che sussiste anche la (2,4) basta stabilire il

LEMMA (2,2). - *Esiste una matrice ad elementi costanti* $\gamma=\|\gamma_{ik}\|$ *di ordine* $2n$ *tale che si abbia*

$$(2,7)\qquad \alpha\cdot\boldsymbol{a}^{-1}(\lambda)=\boldsymbol{a}^{-1}(\lambda)\cdot\gamma$$

per ogni $\lambda \neq 0$.

Infatti una volta dimostrata l'esistenza di una tale matrice γ, si avrà

$$M_{rs}(x-y)=\sum_{t=1}^{2n} a'^{t}(-x_2+y_2,\ x_1-y_1)\gamma_{ts}$$

e le (2, 4) risulteranno una conseguenza immediata del lemma (2,1).

Per dimostrare il lemma (2,2), osserviamo che le formule (2,3″) si possono scrivere brevemente

$$\alpha=\mu\cdot\boldsymbol{a}^{(1)}+\nu\cdot\boldsymbol{a}^{(2)}$$

e che dalle (2,2) si deduce

(2 8) $$-\nu\cdot\boldsymbol{a}^{(1)}+\mu\cdot\boldsymbol{a}^{(2)}=I$$

(2,8′) $$-\boldsymbol{a}^{(1)}\cdot\nu+\boldsymbol{a}^{(2)}\cdot\mu=I.$$

Moltiplicando per $\boldsymbol{a}^{(2)}$ la (2,8) a sinistra e la (2,8) a destra, e sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\boldsymbol{a}^{(2)}\cdot\nu\cdot\boldsymbol{a}^{(1)}=\boldsymbol{a}^{(1)}\cdot\nu\cdot\boldsymbol{a}^{(2)}$$

ed in maniera analoga

$$\boldsymbol{a}^{(2)}\cdot\mu\cdot\boldsymbol{a}^{(1)}=\boldsymbol{a}^{(1)}\cdot\mu\cdot\boldsymbol{a}^{(2)}.$$

Segue quindi

(2,9) $$\boldsymbol{a}^{(1)}\cdot\{\mu\cdot\boldsymbol{a}^{(1)}+\nu\cdot\boldsymbol{a}^{(2)}\}=\{\boldsymbol{a}^{(1)}\cdot\mu+\boldsymbol{a}^{(2)}\cdot\nu\}\cdot\boldsymbol{a}^{(1)}$$

(2,9′) $$\boldsymbol{a}^{(2)}\cdot\{\mu\cdot\boldsymbol{a}^{(1)}+\nu\cdot\boldsymbol{a}^{(2)}\}=\{\boldsymbol{a}^{(1)}\cdot\mu+\boldsymbol{a}^{(2)}\cdot\nu\}\cdot\boldsymbol{a}^{(2)}.$$

Posto perciò

(2,10) $$\gamma=\boldsymbol{a}^{(1)}\cdot\mu+\boldsymbol{a}^{(2)}\cdot\nu,$$

moltiplicando la (2,9) per λ_1 e la (2.9′) per λ_2 si ha

$$\boldsymbol{a}(\lambda)\cdot\alpha=\gamma\cdot\boldsymbol{a}(\lambda),$$

e da questa si ricava la (2,7), c. v. d.

Proponiamoci ora di dimostrare la proposizione *B*. Osserviamo che qualunque siano le costanti X_{hk}, le funzioni

$$\Phi_{rs}(x-y)=\sum_{k=1}^{2n} X_{rk}a^{ks}(-x_2+y_2,\ x_1-y_1) \tag{2,11}$$

verificano le condizioni (2,4′) in virtù del lemma (2,3). Cerchiamo quindi di determinare le X_{rk} in modo che le Φ_{rs} verifichino le (2,5′). Poichè dall'osservazione ora fatta il valore dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{+\partial D}\sum_{s=1}^{2n}\sum_{p=1}^{2} \overset{p}{a}_{sr}n_p(\eta)\Phi_{ts}(\eta-y)d_\eta s$$

non varia al variare di D nell'insieme dei domini regolari che contengono y come punto interno, potremo imporre le condizioni (2,5′) prendendo D coincidente col cerchio avente il centro in y e raggio uno.

Si comprende chiaramente che così facendo, deve risultare

$$\sum_{t=1}^{2n} X_{kt}\alpha_{ts}=-\delta_{ks}.$$

Per dimostrare che si possono in tal modo determinare le X_{kt} è sufficiente dimostrare il

LEMMA (2,3). - *La matrice* $\alpha=\|\alpha_{rs}\|$ *i cui elementi sono definiti dalle* (2,3″) *ha determinante diverso da zero.*

Supponiamo, per assurdo, det. $\|\alpha_{rs}\|=0$. Sia $c_1^0, \dots, c_{2n}^0$ una soluzione del sistema

$$\sum_{t=1}^{2n} c_t\alpha_{ts}=0 \qquad s=1, \dots, 2n,$$

diversa dalla banale. Poniamo

$$\Psi_s(x-y)=\sum_{t=1}^{2n} c_t^0 a_{ts}(-x_2+y_2,\ x_1-y_1)$$

e consideriamo i potenziali

$$w_r(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{+\partial D}\sum_{s=1}^{2n}(\overset{1}{a}_{sr}n_1(\eta)+\overset{2}{a}_{sr}n_2(\eta))\Psi_s(\eta-y)d_\eta\sigma$$

per $r=1, \dots, 2n$ ed $y \notin \partial D$. Poichè dal lemma (2,1) segue che $\Psi_1(x-y), \dots, \Psi_{2n}(x-y)$ verificano in ogni punto $y \neq x$ l'omogeneo aggiunto al sistema (2,1) per il teorema di GAUSS ciascuna delle w_r è nulla in ogni punto di $\complement D$. Poichè, per ogni $y \in D - \partial D$, risulta

$$w_r(y) = \sum_{t=1}^{2n} c_t^0 \alpha_{tr},$$

dal modo come sono state fissate le c_t^0 si deduce che le w_r sono identicamente nulle in $D - \partial D$, e quindi

$$\overset{+}{w_r}(\xi) - \overset{-}{w_r}(\xi) = 0$$

in ogni $\xi \in \partial D$. Dalla formula (1,5) segue allora

$$\sum_{s=1}^{2n} (\overset{1}{a}_{sr} n_1(\xi) + \overset{2}{a}_{sr} n_2(\xi))\tilde{\Phi}_s(\xi) \equiv 0 \qquad \text{su } \partial D$$

per $r=1, \dots, 2n$ e quindi

$$\tilde{\Phi}_s(\xi) \equiv 0 \qquad s=1, \dots, 2n,$$

ossia

$$\overset{*}{\int\limits_{[0,\,2\pi]}} \sum_{t=1}^{2n} c_t^0 a^{ts}(-\operatorname{sen}\omega, \cos\omega) \cot\frac{\omega-\tau}{2}\, d\omega \equiv 0 \qquad s=1, \dots, 2n.$$

Ma tali formule possono sussistere, come è noto (5), se e soltanto se si ha

$$\sum_{t=1}^{2n} c_t^0 a^{ts}(-\operatorname{sen}\omega, \cos\omega) \equiv 0, \qquad s=1, \dots, 2n$$

da cui si ricava $c_1^0 = \dots c_{2n}^0 = 0$, contrariamente a quello che avevamo ammesso. Il lemma è così dimostrato.

Per complelare il nostro asserto faremo vedere che le soluzioni delle (2,12) sono le α_{hk} stesse, cioè

$$X_{hk} = \alpha_{hk} \qquad h, k = 1, \dots, 2n. \tag{2,13}$$

(5) Cfr. [6] § 28; basta osservare che $\int_0^{2\pi} a^{ts}(-\operatorname{sen}\omega, \cos\omega)d\omega = 0$.

Determinate le X_{hk} mediante le (2,12), consideriamo le corrispondenti Φ_{rs} definile dalle (2,11), e quindi i potenziali

$$w_{rs}(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{+\partial D} \sum_{t=1}^{2n} (a^1_{ts} n_1(\eta) + a^2_{ts}(\eta)) \Phi_{rt}(\eta - y) d\eta s.$$

Con il solito ragionamento si ricava

$$w_{rs}(y) \begin{cases} = \delta_{rs} & \text{se } y \in D - \partial D \\ = 0 & \text{se } y \in \complement D. \end{cases}$$

Dalla (1,5) si deduce

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{t=1}^{2n} \tilde{\Phi}_{rt}(\xi)(a^1_{ts} n_1(\xi) + a^2_{ts} n_2(\xi)) = \delta_{rs}$$

per ogni $\xi \in \partial D$, e quindi

$$\frac{1}{2\pi} \tilde{\Phi}_{rt}(\xi) = a^{rt}(n_1(\xi), \ n_2(\xi)).$$

Dalla (1,4) ancora

$$a^{rt}(-\operatorname{sen}\tau, \cos\tau) =$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} X_{rk} \int\limits_{[0,\,2\pi]}^{*} a^{kt}(-\operatorname{sen}\omega, \ \cos\omega) \cot\frac{\omega - \tau}{2} \, d\omega$$

da cui, iterando

$$a^{rt}(- \operatorname{sen}\tau, \ \cos\tau) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{h,\,k}^{1,\dots,2n} X_{rk} X_{kh} \int\limits_{[0,\,2\pi]}^{*} \cot\frac{\omega - \tau}{2} \, d\omega \int\limits_{[0,\,2\pi]}^{*} a^{ht}(- \operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \cot\frac{\theta - \omega}{2} \, d\theta.$$

Da questa, per una ben nota formula ([6]), si deduce

$$a^{rt}(-\operatorname{sen}\tau, \ \cos\tau) = - \sum_{h,\,k}^{1,\dots,2n} X_{rk} X_{kh} a^{ht}(- \operatorname{sen}\tau, \ \cos\tau)\,;$$

([6]) Cfr. loco citato in ([5]).

e infine

$$\sum_{k=1}^{2n} X_{rk} X_{kh} = -\delta_{rk} \qquad r, h = 1, \dots, 2n.$$

Confrontando questa con la (2,12), tenendo presente che $\det \| X_{hk} \| \neq 0$ si deduce la (2,13); tra l'altro è anche dimostrato che le α_{hk} definite mediante la (2,3), verificano le particolari condizioni

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{rk} \alpha_{kh} = -\delta_{rh} \qquad r, h = 1, \dots, 2n. \tag{2,14}$$

È così provato che le M_{rs} soddisfano alle condizioni (2,5′).

In modo analogo, ma scambiando il ruolo delle α con quello delle γ, definite dalle (2,10), si dimostrano le (2,5).

Ci pare opportuno rilevare esplicitamente che sussistono i seguenti

TEOREMA 1). - *Se* $f_r \in C^{(0,\alpha)}(T)$, *ponendo*

$$v_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_T \sum_{t=1}^{2n} M_{st}(x-y) f_t(x) dx \qquad \text{per } y \in T - \partial T$$

ed $s = 1, \dots, 2n$, *si definiscono* $2n$ *funzioni di classe* $C^{(1,\alpha)}(T - \partial T) \cap \cap C^{(0,\alpha)}(T)$. *Queste costituiscono una soluzione in* $T - \partial T$ *del sistema* (2,1).

Dal fatto che le $M_{rs}(x)$ sono omogenee di grado -1 e derivabili in ogni punto diverso dall'origine si ricava

$$\int_{\partial\Gamma(0,1)} \frac{\partial M_{st}(y)}{\partial y_p} d_y\sigma = 0 \qquad p = 1, 2; \; s, t = 1, \dots 2n.$$

Questa condizione, assicurando che esiste l'integrale in valore principale

$$\int_T^* \sum_{t=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial y_p} M_{st}(x-y) f_t(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T - \Gamma(y,\varepsilon)} \sum_{t=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial y_p} M_{st}(x-y) f_t(x) dx,$$

permette di dimostrare, con la solita tecnica della teoria del potenziale, la prima parte del teorema; anzi si trova

$$\frac{\partial}{\partial y_p} v_s(y) = \int_T^* \sum_{t=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial y_p} M_{st}(x-y) f_t(x) dx$$

$$+ \sum_{t=1}^{2n} f_t(y) \int_{+\partial D} M_{st}(\eta - y) n_p(\eta) d_\eta \sigma.$$

La seconda parte è poi conseguenza immediata delle proposizioni A e B.

TEOREMA 2). - *Se $f_r \in C^{(0,\alpha)}(T)$ ed $u_1, \ldots, u_{2n}$ sono $2n$ funzioni di classe $C^{(0,\alpha)}(T) \cap C^{(1)}(T - \partial T)$ costituenti una soluzione del sistema* (2,1) *sussiste la seguente formula del tipo di Stokes*

$$u_t(y) = \int_T \sum_{r=1}^{2n} M_{tr}(x-y) f_r(x) dx +$$

$$+ \int_{+\partial D} \sum_{r,s}^{1,\ldots,2n} \sum_{p=1}^{2} a_{rs}^p n_p(\eta) M_{tr}(\eta - y) u_s(\eta) d_\eta \sigma.$$

Infatti, basta considerare l'integrale

$$\int_{T - \Gamma(y,\varepsilon)} \sum_{s,r}^{1,\ldots 2n} \sum_{p=1}^{2} a_{rs}^p \frac{\partial}{\partial x_p} (M_{tr}(x-y) u_s(x)) dx,$$

applicare il Teorema di GAUSS, tener presenti le proposizioni A e B e passare al limite per $\varepsilon \to 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AVANTAGGIATI, *Problemi al contorno per i sistemi ellittici simmetrici di equazioni lineari alle derivate parziali del prim' ordine a coefficienti costanti in $m \geq 3$ variabili indipendenti*, « Ann. di Mat. », 1963.

[2] F. BUREAU, *Divergent Integrals and partial differential equations*, « Comm. on pure and applied Math. », (1955) vol. VIII, n. 1

[3] F. JOHN, *Plane waves and spherical mean applied to partial differential equations*, « Interscience publishers, inc. New York (1955).

[4] S. G. MIHLIN, *Singular Integral Equations*, « Amer. Math. Soc. » Traslations, n° 24 (1950).

[5] C. B. MORREY, *Second order elliptic sistems of differential equations*, « Proc. Nat. Sci. », U. S. A., 39 (1953).

[6] N. I. MUSKHELISVILI, *Singular Integral Equations*, « Nordhoff Gr. Holl. (1953).