UMI

Recensioni.

* R. Zurmühl, Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Springer, Berlin, 1961 (F. G. Tricomi)
* A. Erdélyi, Operational Calculus and Generalized Functions, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1962 (F. G. Tricomi)
* Centre Belge de Recherches Mathém. Colloque dus l'Analyse Numérique tenu a Mons les 22, 23, 24 mars 1961, Louvain et Paris, 1961 (F. G. Tricomi)
* E. Artin, Algébre géométrique, Gauthier-Villars, 1962 (Anna Maria Ghirlanda)
* Secondo Congresso Matematico Ungherese, Budapest, 24-31 agosto 1960, Voll. I, II, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961 (Lamberto Cattabriga)
* I. M. Gelfand, G. E. Schilow, Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960 (Lamberto Cattabriga)
* M. A. Naïmark, Les représentations linéaires du groupe de Lorentz, Ed. Dunod, Paris, 1962 (Antonio Pignedoli)
* C. Corduneanu, Functii aproape-periodice, Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1961 (S. Zaidman)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.2, p. 154–161.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_154_0>

RECENSIONI

R. Zurmühl, *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*, 3ª Ed., Berlin usw., Springer, 1961, XVI + 459 pp., DM. 36,00.

È questa la 3ª edizione, notevolmente migliorata, di uno dei migliori trattati attualmente esistenti sulla teoria delle matrici, trattato particolarmente raccomandabile a chi (ma non solo a chi) desidera impadronirsi di questa teoria in vista delle sue, ognor crescenti, applicazioni alla Tecnica. Considerato però che nè la prima edizione (1950) nè la seconda (1958) furono recensite in questo *Bollettino*, converrà discorrerne come se si trattasse di un'opera intieramente nuova.

L'opera è divisa in sette ampi capitoli rispettivamente dedicati a: 1) Fondamenti del calcolo delle matrici. 2) Connessioni con l'algebra lineare. 3) Connessioni con le forme quadratiche. 4) Autovalori delle matrici. 5) Struttura delle matrici (divisori elementari, ecc.). 6) Metodi numerici. 7) Applicazioni all'elettrotecnica (reti di circuiti), alla statica (sistemi articolati, ecc.), allo studio delle vibrazioni e a quello dei sistemi differenziali in genere. Un'utile tabella (che potrebbe venir imitata anche in opere matematiche d'altro genere) indica chiaramente quali dei precedenti paragrafi del libro (in tutto 28) occorre conoscere per studiare ciascuno di essi; mentra la breve tabella bibliografica a p. XVI indica quali delle questioni trattate nelle varie sezioni del libro, sono particolarmente considerate nelle quindici opere attinenti ivi prese in esame.

Pur essendo, come si è detto, le applicazioni svolte specialmente nel 7° capitolo, anche nei capitoli precedenti non mancano cenni ad esse, indicazioni sul modo praticamente più opportuno per compiere effettivamente le varie operazioni sulle matrici, ecc.; ciò che, fra l'altro, contribuisce ad alleviare e rendere più digeribile una materia che altrimenti potrebbe riuscire un po' pesante. Tuttavia — nonostante ciò e il fatto che il 6° capitolo è interamente dedicato ai metodi numerici di calcolo, specie degli autovalori — non deve credersi che quella in esame sia un'opera avente esclusivamente di mira le applicazioni pratiche del calcolo matriciale chè, ad esempio, anche le non semplici questioni, d'interesse prevalentemente teorico, relative alla *struttura* delle matrici, sono trattate in modo approfondito. Così pure le funzioni di matrici, ponendo nel dovuto risalto il fatto fondamentale (non sempre posto in luce da altri autori) che, grazie all'equazione di Cayley-Hamilton (o alla connessa *equazione minimale*), ogni *serie* di potenze di matrici può ridursi ad una somma finita, cioè ad un *polinomio* matriciale.

Notevoli anche i riferimenti ad alcuni, non molto conosciuti teoremi sulla locazione degli autovalori di matrici *non* simmetriche, e le notizie su certi speciali tipi di matrici divenuti importanti in questi ultimi tempi, per es. quelle in cui la somma degli elementi delle varie colonne è costante, che s'incontrano in recenti sviluppi del Calcolo delle probabilità.

Per quel che particolarmente concerne l'attuale edizione, è particolarmente da notare il miglioramento dei metodi numerici per il calcolo degli autovalori *successivi al primo*, che è sempre la cosa più difficile.

Il libro è, nel suo genere, poco lontano dalla perfezione. Volendo proprio fare una critica, si potrebbe lamentare — oltre la inopportuna (ma quasi universale) denominazione: *autovalori* di una matrice, per quelli che invece andrebbero meglio detti *moltiplicatori* di essa — la mancanza di ogni cenno alle matrici infinite, che vanno acquistando notevole importanza, se non addirittura nella Matematica *applicata*, in quella *applicabile*.

F. G. TRICOMI

A. ERDÉLYI, *Operational Calculus and Generalized Functions*, New York, Holt, Rinehart & Winston, 1962, VIII + 103 pp., 22 s.

Questo volumetto rispecchia un breve corso sull'argomento tenuto dall'A. al California Institute of Technology di Pasadena, Calif., e non smentisce la diffusa opinione che le migliori opere matematiche, sono quelle sorte dalla diretta esperienza didattica.

Il calcolo operazionale qui considerato è quello fondato sui *quozienti convolutori* secondo Mikusinski; cioè. in sostanza, sull'osservazione che — poichè l'*anello* determinato dall'ordinaria somma $f + g$ di due funzioni e dal loro *prodotto integrale* (*o convoluzione*):

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

è privo di divisori dello zero — esso può essere ampliato in un *campo*, in cui il *quoziente convolutorio* f/g coincide talvolta con una funzione ordinaria, tavolta con una *funzione generalizzata* del tipo della δ del Dirac, ecc. Si ha così il vantaggio di poter trattare da un punto di vista unitario, sia le funzioni ordinarie, sia le funzioni generalizzate, sia certi operatori differenziali (e integrali) del genere della D (o della p) di Heaviside e dell'operatore inverso; con la conseguente possibilità di sviluppare tutto un calcolo che, dal punto di vista formale, non differisce molto da quello di Heaviside, ma ne evita le incertezze e le incongruenze, ed ha maggiore flessibilità.

La riprova del progresso ottenuto (rispetto ad Heaviside) si ha nel fatto che tale calcolo operazionale può applicarsi agevolmente, non solo ad equazioni differenziali ordinarie, lineari a coefficienti costanti, al che riescono tutti, ma anche a certe classi di equazioni a derivate parziali, p. es., alla equazione delle onde a quella del calore (unidimensionale), ciò che viene fatto negli ultimi due capitoli del volumetto in esame.

L'opera può caldamente raccomandarsi a chi, senza voler perdere troppo tempo e sprecare troppa fatica, voglia farsi un'idea sufficientemente completa di questi nuovi metodi del Mikusinski, che taluno preferisce (ma è cosa discutibile) a quelli fondati sulla classica trasformazione di Laplace.

F. G. TRICOMI

CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉM., *Colloque sur l'Analyse Numérique* tenu a Mons les 22, 23 et 24 mars 1961, Louvain et Paris, 1961, 214 pp.

Questo nuovo volume (il 18°) di rendiconti di « Colloqui » del « C.B.R.M. » contiene 14 pregevoli articoli di Analisi numerica dovuti agli autori seguenti: G. Lemaître, R. Sauer, C. Lanczos, G. Fichera, L. Collatz, E. Stiefel, A. van Wijngaarden, R. de Possel, F. L. Bauer, J. Meinguet, N. Forbat, L. Derwidué, E. D. Franckx, J. Charles et J. E. Gennart.

È evidentemente impossibile riferire qui su tutti questi 14 articoli, nè sarebbe molto utile riportarne i soli titoli. Mi limiterò perciò a dire qualcosa di quelli fra essi che mi sembrano avere maggior interesse *da un punto di vista generale*, cioè non solo per chi si interessa di un qualche speciale ramo dell'Analisi numerica.

Un primo di tali articoli è quello di R. Sauer relativo al concetto di *convergenza* nella Analisi numerica che, fra l'altro, tratta dell'estensione (dovuta ad H. J. Stetter) alle equazioni a derivate parziali dei metodi di G. Dahlquist per lo studio della convergenza dei procedimenti alle differenze finite applicate alle equazioni differenziali ordinarie.

Anche di generale interesse mi sembra l'articolo di L. Collatz su certi problemi omogenei dei valori al contorno (o dei valori iniziali) per equazioni diff. (ordinarie o alle derivate parziali) aventi *carattere monotòno;* cioè (all'ingrosso) tali che se, nelle equazioni indefinite e in quelle accessorie, i segni di uguaglianza si cambiano in opportuni segni di disuguaglianza; si può asserire che la soluzione corrispondente è certo *positiva* (oppure *negativa*) in un certo campo. Invero, da tale fatto, si possono facilmente dedurre delle maggiorazioni (o « minorazioni ») per le soluzioni dei corrispondenti problemi non omogenei.

Segnalo infine l'articolo di F. L. Bauer su una formula di quadratura numerica del Romberg, che sembra particolarmente adatta all'impiego nelle moderne calcolatrici a programma, e quello di N. Forbat sui metodi variazionali per l'approssimazione degli autovalori, in una classe molto generale di problemi agli estremi per certe equazioni differenziali ordinarie di ordine 2m.

Qualche articolo è scritto in un francese veramente abominevole. Mi rendo conto delle difficoltà linguistiche create dalla crescente internazionalità delle scienze, ma esiste pure la possibilità di far rivedere, prima della stampa, da un collega del luogo i nostri scritti in lingue straniere!

F. G. TRICOMI

E. ARTIN, *Algèbre géométrique,* Cahiers Scientifiques, fasc. XVII, p. IX + 212, Gauthier-Villars, 1962.

Un corso tenuto nel 1955 alla New York University aveva già dato origine ad un volumetto apparso come n. 3 degli Interscience Tracts (Interscience Publishers, New York, 1957). Questo che appare ora nei Cahiers Scientifiques ne è la traduzione francese (senza altri cambiamenti che quello della lingua).

Quindi non c'è nulla di nuovo da notare rispetto all'edizione, già divenuta classica, inglese. Si può solo ripetere l'ammirazione che esprime G. Julia nel presentare questa traduzione per il metodo seguito dall'A.: rigore perfetto e cura di suscitare immagini geometriche ad illustrazione dei risultati algebrici.

Il nome di Artin, purtroppo recentemnete scomparso, resterà perennemente legato alla sua opera e a questa esposizione che, come ha detto J. Dieudonné, merita di essere messa a fianco dei « Grundlagen der Geometrie » di D. Hilbert.

E. BOMPIANI

S. KULCZYCKI, *Non-euclidean geometry,* pp. 208, Ed. Pergamon Press, New York (U.S.A.), 1961, (traduzione dal polacco).

Scopo, dichiarato dall'A., del presente volume è quello di esporre i principali risultati della geometria non-euclidea iperbolica in una forma « accessibile ». Con questo l'A. intende che la materia e le dimostrazioni devono essere comprensibili anche a chi non possiede conoscenze geometriche superiori a quelle che si apprendono in un nostro Liceo classico. Così, ad esempio, vengono evitate tutte le considerazioni di geometria proiettiva che solitamente si fanno in quell'argomento. Esistono numerose monografie di geometria non-euclidea: in italiano abbiamo, tra l'altro, il notissimo ed eccellente volumetto di R. Bonola (*La geometria non-euclidea,* Bologna, 1906) che è stato anche tradotto in varie lingue. Ricordiamo anche la classica monografia di G. Fano (*Geometria non-euclidea,* Bologna, 1935) che però è di carattere più elevato. Il volume del Bonola, pur essendo per certi aspetti più completo e più ricco di quello in esame (fra l'altro non è limitato alla trattazione della geometria iperbolica), non rende quest'ultimo superfluo né gli toglie interesse. Intanto il linguaggio adoperato nel volume del Kulczycki è più moderno, in secondo luogo le dimostrazioni sono spesso originali (per lo meno diverse da quelle più note) specie nel terzo capitolo; anche nel secondo capitolo vengono presentati in modo originale risultati noti, come quando si fa uso di un teorema di Hjelmslev. Alla fine del paragrafo 9 di quel capitolo si dimostra, appunto con l'uso di quel teorema, una proposizione sui quadrangoli senza servirsi del V° postulato di Euclide. L'A. afferma che tale risultato è stato conseguito solo di recente, e da tale circostanza trae la conclusione che, nonostante le ricerche durate centinaia di anni, è ancora possibile trovare qualche risultato inaspettato in geometria euclidea.

Il volume consta di tre capitoli. Nel primo capitolo, in una quarantina di pagine, viene data una veduta d'insieme (per forza di cose un po' sommaria) della storia della questione delle parellele e del V° postulato di Euclide, fino alla nascita ed allo sviluppo della geometria non-euclidea iperbolica. Il secondo capitolo, di una sessantina di pagine, sviluppa con metodi sintetici elementari la geometria non-euclidea iperbolica del piano e poi dello spazio ordinario. Si giunge a stabilire un risultato fondamentale di Lobatchevski secondo il quale la geometria sulla superficie di una orosfera (subordinata dall'ambiente iperbolico) è una geometria euclidea. L'ultimo capitolo è dedicato ad ulteriori sviluppi della geometria iperbolica ed alla trigonometria iperbolica. Vi è un paragrafo dedicato alla discussione del problema se lo spazio fisico sia euclideo o iperbolico. Si danno cenni sul confronto fra la trigonometria sferica e quella iperbolica e cenni di geometria analitica nel piano iperbolico; infine viene illustrato il noto modello di Klein.

ANNA MARIA GHIRLANDA

Secondo Congresso Matematico Ungherese. Budapest, 24-31 agosto 1960. Voll. I, II. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1961.

Questi due volumi contengono gli estratti delle conferenze pervenute al Comitato Organizzatore del Congresso fino al 31 agosto 1960. Gli estratti delle conferenze sono raggruppati per sezioni nell'ordine e con le notazioni seguenti:

Vol. I - I a) Algebra; I b) Teoria dei numeri; II) Geometria e topologia; III a) Analisi;

Vol. II - III b) Analisi; IV) Calcolo delle probabilità e statistica matematica; V) Fondamenti della matematica e teoria delle macchine matematiche; VI) Applicazioni della matematica; VII) Storia ed insegnamento della matematica.

LAMBERTO CATTABRIGA

Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I - I. M. GELFAND UND G. E. SCHILOW, *Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen*, Veb Deutcher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, pp. 364.

Questa è la traduzione del primo di una serie di volumi dal titolo « Funzioni generalizzate », di cui in edizione russa sono già comparsi cinque volumi, i primi tre di I. M. Gelfand e G. E. Scilov e gli altri del primo di questi in collaborazione con altri autori. La presente traduzione è condotta sulla seconda edizione russa uscita nel 1959.

Gli autori denotano con K lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili in R^n e nulle fuori di un compatto, cioè lo spazio che L. Schwartz indica con $\mathfrak{D}$. Essi non introducono tuttavia in K la topologia di cui questo autore ha dotato lo spazio $\mathfrak{D}$, ma vi definiscono soltanto la convergenza delle successioni. Ciò rivela fin dall'inizio un carattere del libro. Esso non contiene infatti l'esame degli aspetti più specificatamente topologici della teoria che si trovano studiati nel secondo volume della serie offrendo così una esposizione più accessibile delle questioni trattate, corredate di numerosi utili esempi. *Funzione generalizzata* è chiamato ogni funzionale lineare continuo (rispetto alla convergenza delle successioni) definito su K. Le funzioni generalizzate coincidono dunque qui con le distribuzioni di Schwartz. Nel primo capitolo sono esposte le principali proprietà delle funzioni generalizzate. In particolare sono studiati i cambiamenti delle variabili indipendenti (traslazioni, rotazioni ed altre trasformazioni affini) e la rappresentazione mediante funzionali delle funzioni con singolarità non integrabili nell'intorno di un punto (o regolarizzazione degli integrali divergenti). Dettagliatamente sono esaminate le funzioni generalizzate x_+^λ, x_-^λ, $r^\lambda (|r| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2})$. per λ complesso qualunque. Di quest'ultima funzione è data una scomposizione in onde piane che è poi utilizzata per ottenere una scomposizione in onde piane anche della funzione $\delta(x_1, \dots, x_n)$. Il prodotto diretto ed il prodotto di composizione di funzioni generalizzate sono trattati, nel § 5, con applicazioni al potenziale newtoniano, all'integrale di Poisson per l'equazione del calore, al problema di Cauchy e alla derivazione di ordine complesso qualunque di una funzione generalizzata. Nel § 6, utilizzando la scomposizione in onde piane di r e con metodo simile a quello usato da F. John (cfr. Plane waves and spherical means, applied to partial differential equations, New York, 1955), è costruita una soluzione fondamentale per equazioni differenziali a coefficienti costanti di tipo ellittico di ordine 2m. Con lo stesso metodo è costruita una soluzione fondamentale per equazioni differenziali regolari omogenee di ordine qualunque e la soluzione fondamentale del problema di Cauchy per quelle equazioni differenziali del tipo $P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0$, di ordine qualunque rispetto a t, per cui tale problema sia ben posto. In particolare si ritrova la formula di Herglotz-Petrovskiĭ per la soluzione fondamentale del problema di Cauchy per equazioni iperboliche omogenee.

La trasformata di Fourier di funzioni generalizzate è definita e studiata nel secondo capitolo. Con Z è indicato lo spazio delle trasformate di Fourier delle funzioni di K. La trasformata di Fourier di un funzionale sullo spazio K è poi definita per dualità, estendendo la validità della formula di Parseval, come funzionale sullo spazio Z. Il capitolo è arricchito di molti esempi di trasformate di Fourier di funzioni generalizzate in una e più variabili, in particolare di quelle studiate nel primo capitolo, e di applicazioni alle equazioni differenziali. La trasformazione di Fourier negli spazi S ed S' è invece studiata completamente soltanto nel secondo volume.

Il capitolo terzo contiene uno studio dettagliato di alcuni tipi speciali di funzioni generalizzate, riprendendo in parte un lavoro di Gelfand e Z. Ya. Sciapiro (Uspechi mat. nauk, 10, 3, 1955). Nel primo paragrafo gli autori definiscono certe particolari funzioni generalizzate concentrate su una varietà S di equazione $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, con P indefinitamente differenziabile e $\operatorname{grad} P \neq 0$ su S. Queste funzioni, che sono indicate con $\delta(P)$, $\delta'(P), \dots \delta^{(k)}(P)$, hanno, fra le funzioni concentrate su S, un ruolo analogo a quello della funzione $\delta(x)$ e delle sue derivate nel caso unidimensionale. Considerata la forma differenziale ω di ordine n-1, tale che $dP.\ \omega = dx_1 \dots dx_1$, già introdotta da Leray e che risulta univocamente determinata su S, la funzione generalizzata $\delta(P)$ è definita da $(\delta(P),\varphi) = \int\limits_{P=0} \varphi(x)\omega$. Sono poi introdotte le forme differenziali di ordine n-1

$$\omega_0(\varphi) = \varphi\omega, d\omega_0(\varphi) = dP\omega_1(\varphi), \dots, d\omega_{k-1}(\varphi) = dP\omega_k(\varphi), \dots,$$

Esistono delle forme verificanti queste relazioni; a differenza della forma ω, queste nuove forme non sono però univocamente determinate dalla funzione P sulla varietà S. È invece univocamente determinato l'integrale delle forme $\omega_h(\varphi)$ su S. Le funzioni generalizzate $\delta^{(n)}(P)$ sono perciò definite intrinsecamente dalle $(\delta^{(n)}(P), \varphi) = (-1)^h \int\limits_{P=0} \omega_1(\varphi)$, $k = 0,1, \dots$ Le definizioni date sono poi estese al caso in cui la varietà S abbia dimensione inferiore ad n-1. Oltre a vari esempi ed applicazioni è trattato dettagliatamente (§ 2) il caso in cui P sia la forma quadratica $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$, $p + q = n$. In tal caso S ha un punto singolare nell'origine delle coordinate e non è quindi del tipo considerato sopra. È poi definita per λ complesso la funzione generalizzata $\mathcal{G}^\lambda$, ove $\mathcal{G}$ è una forma quadratica a coefficienti complessi con parte immaginaria definita positiva, e ne sono determinati i poli ed i residui come funzione analitica di λ, generalizzando classici teoremi di M. Riesz (Acta math., 81, 1949). I risultati ottenuti sono applicati alla costruzione di una soluzione fondamentale per operatori ultra-iperbolici L, con $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \dfrac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}$, $p + q = n$.

I due ultimi paragrafi sono dedicati allo studio delle funzioni generalizzate omogenee e delle potenze con esponente complesso di una arbitraria funzione indefinitamente differenziabile. Alla fine del volume si trova una tabella di trasformate di Fourier delle più frequenti funzioni generalizzate in una e più variabili.

LAMBERTO CATTABRIGA

M. A. NAÏMARK, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, di pagine 371, (trad. dal russo), Ed. Dunod, Parigi, 1962, senza indicazione di prezzo.

L'opera appartiene alla serie « Travaux et recherches mathématiques » diretta da A. Lichnerowiz. La traduzione dal russo è effettuata da G. Lochak, incaricato di ricerche presso il C.N.R.S. francese. Consta di una introduzione, quattro capitoli, complementi finali ed, inoltre, di una ampia bibliografia.

Il primo capitolo è su due paragrafi dedicati, rispettivamente, al gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni ed al gruppo di Lorentz. Il secondo capitolo, nel quale si tratta delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni, consta di quattro paragrafi: il primo, dedicato alle nozioni generali elementari riguardanti la teoria delle rappresentazioni finite; il secondo, dedicato alla forma infinitesimale delle rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni; il terzo concernente la realizzazione delle rappresentazioni finite irriducibili del gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni; il quarto dedicato alla decomposizione in rappresentazioni irriducibili di una rappresentazione data del gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni.

Il terzo capitolo, suddiviso in dieci paragrafi, tratta delle rappresentazioni lineari del gruppo proprio e del gruppo completo di Lorentz e si conclude con la descrizione di tutte le rappresentazioni completamente irriducibili del gruppo proprio di Lorentz e di tutte le rappresentazioni, pure completamente irriducibili, del gruppo completo di Lorentz. In tale terzo capitolo appare anche la descrizione delle rappresentazioni spinoriali.

Il quarto ed ultimo capitolo del volume è dedicato alla teoria delle equazioni invarianti e consta di quattro paragrafi. Il primo di essi tratta delle equazioni invarianti rispetto alle rotazioni dello spazio a tre dimensioni; il secondo delle equazioni invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo proprio di Lorentz; il terzo delle equazioni invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo completo di Lorentz; il quarto delle equazioni che derivano da una funzione invariante di Lagrange.

Il volume è indirizzato ai Fisici ed ai Matematici. I primi vi possono trovare utile ausilio al completamento della loro preparazione relativistica e quantistica; i secondi vi vedranno un atteggiamento di pensiero assai generale, connesso con la continua ricerca dei mezzi espositivi il più possibile semplici.

ANTONIO PIGNEDOLI

C. CORDUNEANU: *Functii aproape-periodice*: Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1961. (Funzioni quasi-periodiche).

Il libro di Corduneanu che ora recensiamo è il primo in lingua rumena su tale argomento. Esso comprende 6 Capitoli:

I. Funzioni numeriche quasi-periodiche; II. Funzioni quasi-periodiche che dipendono da parametri; III. Funzioni analitiche quasi-periodiche; IV. Soluzioni quasi-periodiche di certe equazioni differenziali. V. Soluzioni q.p. di certe equazioni a derivate parziali; VI. Generalizzazione delle funzioni quasi-periodiche.

Nel primo capitolo sono esposti le nozioni e i teoremi fondamentali. Diversamente di quanto si fa nelle monografie di Favard, Bohr, Levitan, etc., l'autore definisce le funzioni quasi-periodiche (q.p) come elementi della chiusura dell'insieme dei polinomi trigonometrici $\sum_{1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t}$, rispetto alla convergenza uniforme su $(-\infty < t < +\infty)$. Si dimostra ulteriormente che tale definizione equivale con quelle classiche di Bohr e di Bochner: ciò è reso comodo dalla profonda dimostrazione data da Bogoliubov al teorema fondamentale. Si continua con l'analisi armonica fatta nel modo abituale. L'ultimo §, il sesto, contiene alcune nozioni sulle funzioni q.p di una variabile discreta.

Il secondo capitolo tratta due esempi di funzioni q.p a valori vettoriali, nello spazio delle funzioni continue e nello spazio $L^2(D)$. La teoria generale di tali funzioni sarà ripresa nel Capitolo VI, dove saranno esposti teoremi dovuti a Bochner (1933).

Il capitolo III si occupa di funzioni analitiche q.p.

Il capitolo quarto è il più consistente. Sono dimostrati tra l'altro i seguenti risultati:

1. Se $f(t)$ è un vettore quasi-periodico, A una matrice costante, $u(t)$ un vettore limitato (in R^n), e se $u'(t) = A\, u(t) + f(t)$, allora $u(t)$ è q.p (Bochner, Bohr-Neugebauer).

2. La generalizzazione dovuta ad Amerio del primo teorema di Favard, al caso dei sistemi non lineari $Y'(t) = f(t, Y(t))$, con un'applicazione dovuta a Langehop e Seifert, all'equazione $x''(t) + f(t)\, x'(t) + g(x) = ke(t)$, con $e(t)$ q.p e $|e(t)| \leq 1$.

Nel Cap. V si danno nozioni preliminari sulla quasi-periodicità per alcune equazioni a derivate parziali: precisamente, si considerano le funzioni armoniche quasi-periodiche (Favard), e si dà qualche cenno sull'equazione omogenea della corda vibrante.

Il Cap. VI è dedicato alla teoria di Bochner delle funzioni q.p a valori vettoriali; è esposta anche la teoria delle funzioni q.p su gruppi astratti.

Il libro contiene una ricca bibliografia (453 titoli) veramente utile, arrestata al 1959.

S. Zaidman