Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Santoro

Sulla dipendenza continua dai dati iniziali delle soluzioni del problema di Darboux.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.2, p. 148–153.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_148_0>

Sulla dipendenza continua dai dati iniziali delle soluzioni del problema di Darboux

Nota di Paolo Santoro (a Parma) (*) (**)

Sunto. - *Premesse alcune considerazioni sulle condizioni atte ad assicurare la dipendenza continua delle soluzioni del problema di* Darboux *dai dati iniziali, se ne fa un'applicazione.*

1. Indichiamo con:

R il rettangolo $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$;

S lo strato $(x, y) \in R$; $|z|$, $|u|$, $|v| < \infty$;

$f(x, y, z, p, q)$ una funzione continua, definita in S;

$\sigma(x)$, $\tau(y)$ due funzioni continue e derivabili, con derivata continua rispettivamente per $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, e con $\sigma(0) = \tau(0)$.

Sia dato il problema (di Darboux):

$$\text{(E)} \qquad s = f(x, y, z, p, q),$$

$$\text{(C)} \qquad z(x, 0) = \sigma(x), \quad z(0, y) = \tau(y),$$

dove con p, q, s abbiamo indicato rispettivamente $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$ e supponiamo che *il problema* (E) (C), *per ogni coppia* $\sigma(x)$, $\tau(y)$ *ammetta una ed una sola soluzione in* R.

Il seguente esempio dovuto a C. Corduneanu [1] mostra che non sempre a « piccole variazioni » dei valori iniziali corrispondono «piccole variazioni» delle soluzioni del problema (E) (C):

Sia $a = 2\pi$, $b = 1$, $f(x, y, z, p, q) = p \log \mu(x)$ con $\mu(x)$ una funzione continua, positiva in $[0, 2\pi]$ e tale che i suoi coefficienti di

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 6 del Comitato per la matematica del C. N. R. (1962-63)

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 20 marzo 1963.

FOURIER siano

$$a_k = O(k^{-\frac{1}{2}}), \quad b_k = O(k^{-\frac{1}{2}})$$

(tali funzioni esistono cfr. ad es. [2]). Sia poi:

$$(\sigma =) \sigma_k = k^{-\frac{1}{3}} \operatorname{sen} kx \,; \quad (\tau =) \tau_k = 0 \,;$$

allora la soluzione del nostro problema è

$$z_k(x, y) = k^{\frac{3}{2}} \int_0^x \cos kt \; e^{y \log \mu(t)} \, dt$$

e si ha anche $z_k(2\pi, 1) = \pi k^{\frac{3}{2}} a_k$.

Come si può facilmente verificare, $z(x, y) = 0$ in R è la soluzione del nostro problema corrispondente ai valori iniziali $\sigma = \tau = 0$, ma $z_k(x, y)$ non tende uniformemente a zero malgrado che $\sigma_k \longrightarrow 0$ uniformemente in $[0, 2\pi]$, $\tau_k \longrightarrow 0$ uniformemente in $[0, 1]$.

2. *Diremo che $z(x, y)$ dipende con continuità dai valori iniziali $\sigma(x)$ e $\tau(y)$ se, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che se*

$$|\sigma(x) - \bar{\sigma}(x)| + |\sigma'(x) - \bar{\sigma}'(x)| < \delta \text{ in } [0, a] \qquad \left[\sigma'(x) = \frac{d\sigma}{dx}\right]$$

e

$$|\tau(y) - \bar{\tau}(y)| + |\tau'(y) - \bar{\tau}'(y)| < \delta \text{ in } [0, b] \qquad \left[\tau'(x) = \frac{d\tau}{dy}\right]$$

avvenga che

$$|z(x, y) - \bar{z}(x, y)| + |p(x, y) - \bar{p}(x, y)| + |q(x, y) - \bar{q}(x, y)| < \varepsilon \text{ in } R,$$

dove $z(x, y)$ e $\bar{z}(x, y)$ sono le soluzioni di (E) (C) *quando si prendono rispettivamente come valori iniziali $\sigma(x)$ e $\tau(y)$, $\bar{\sigma}(x)$ e $\bar{\tau}(y)$.*

Vogliamo qui far vedere che, come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, i teoremi di dipendenza continua dai valori iniziali nel senso prima detto si possono far discendere dal seguente teorema [1]: *Se* X *ed* Y *sono due spazi metrici e se* X *è un compatto,*

[1] Cfr. ad es. [3] p. 60.

se φ *è una funzione definita in* X *è a valori in* Y, *biunivoca e continua, allora* φ *è un omeomorfismo.*

Indicheremo nel seguito con

X^* lo spazio lineare normato delle funzioni $z(x, y)$ con derivate parziali prime continue in R, con la norma definita da:

$$\| z \| = \max_{(x, y) \in R} (| z(x, y) | + | p(x, y) | + | q(x, y) |) ;$$

Y il sottospazio di X^*, costituito dalle funzioni del tipo:

$$W(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0)$$

con $(x, y) \in R$, e quindi norma

$$\| w \| = \| \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0) \| = \max_{(x, y) \in R} \{ | \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0) | +$$

$$+ | \sigma'(x) | + | \tau'(y) | \} ;$$

$\varphi(z) = w$ la funzione che associa ad ogni $z(x, y) \in X^*$ i suoi « valori iniziali »

$$w = z(x, 0) + z(0, y) - z(0, 0).$$

Evidentemente φ è un operatore lineare da X^* in Y, ed inoltre φ è anche continuo. Infatti si ha

$$\| \varphi(z) \| = \| w \|$$

ma essendo per definizione di $\| w \|$ e di $\| z \|$: $\| w \| \leq 3 \| z \|$ si ha anche:

$$\| \varphi(z) \| \leq 3 \| z \|$$

onde $\varphi(z)$ è limitato e quindi continuo.

Indichiamo poi con $X \subset X^*$ un insieme di soluzioni del problema (E) (C). *Se* X *è un compatto,* allora la restrizione di φ ad X, essendo φ continua e, per l'ipotesi di unicità delle soluzioni del problema (E) (C), invertibile, φ *è un omeomorfismo di* X *in* Y, per il teorema prima richiamato. E ciò significa che φ^{-1} è continua, ossia, che le soluzioni appartenenti ad X dipendono con continuità dai valori iniziali.

3. *Si tratta adesso di dare condizioni affinchè un insieme* X *di soluzioni di* (E) (C) *sia un compatto.*

Per tanto osserviamo che se X è un compatto anche $\varphi(X)$ lo è, e quindi tra le condizioni dovrà figurare quella che l'insieme dei valori iniziali assegnati sia un compatto.

D'altronde se si assegna un insieme di valori iniziali A, che sia un compatto, esso sarà chiuso e quindi tale risulta la sua immagine inversa $\varphi^{-1}(A)$, vale a dire l'insieme delle soluzioni di (E) (C) corrispondenti. Resterà quindi da aggiungere, alle ipotesi che A sia un compatto, qualche altra ipotesi sulla f atta a garantire che l'insieme delle soluzioni sia un compatto in X^*, cioè costituito di funzioni equilimitate ed equicontinue insieme alle loro derivate parziali prime.

È facile poi constatare che l'insieme dei valori iniziali nell'esempio prima riportato non è un insieme chiuso per la norma da noi assegnata.

4. Diamo ora un esempio di condizioni sulla $f(x, y, z, p, q)$ atte a garantire l'equicontinuità e l'equilimitatezza delle soluzioni col seguente teorema:

Se $f(x, y, z, u, v)$ *è limitata in* S *e se*

$$f(x, y, z, u, v) - f(x, y, z, \bar{u}, v) \leq \psi_1(x, y)\omega_1(u - \bar{u}),$$

$$f(x, y, z, u, v) - f(x, y, z, u, \bar{v}) \leq \psi_2(x, y)\omega_2(v - \bar{v}),$$

dove $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ *sono funzioni definite in* R *con* $\psi_1(x, y)$ *sommabile rispetto ad* y *in* $[0, b]$ *per* $x \in [0, a]$, $\psi_2(x, y)$ *sommabile rispetto ad* x *in* $[0, a]$ *per* $y \in [0, b]$, *ed inoltre*

$$\psi_i(x, y) > 1 \quad \text{per} \quad (x, y) \in R;$$

$$\int_0^b \psi_1(x, \eta)d\eta \leq L_1; \quad \int_0^a \psi_2(\xi, y)d\xi \leq L_2;$$

e con $\omega_i(h)$ (i $= 1, 2$) *funzioni monotone non decrescenti e tali che*

$$\omega_i(0) = 0; \; \omega_i(h) > 0 \quad \text{per} \quad h > 0; \; \lim_{\mu \to 0} \int_\mu^{h_0} \frac{dh}{\omega_i(h)} = +\infty, \; h_0 > 0;$$

allora le soluzioni del problema (E) (C), *ottenute al variare dei valori iniziali in un insieme compatto, sono funzioni con derivate equilimitate ed equicontinue.*

Intanto notiamo subito che al variare dei valori iniziali in un insieme limitato in Y, per la limitatezza di $f(x, y, z, u, v)$, le soluzioni sono funzioni appartenenti ad un sottoinsieme X_1 di X^* formato da funzioni con derivate parziali prime limitate.

Inoltre si ha che, fissato $\varepsilon > 0$, si può determinare $\delta > 0$ in modo tale che per $|x - \bar{x}| < \delta$, $|y - \bar{y}| < \delta$, qualunque sia $z \in X_1$, si ha:

$|z(x, y) - z(\bar{x}, y)| < \varepsilon$ uniformemente in y per $x, \bar{x} \in [0, a]$; $y \in [0, b]$;

$|z(x, y) - z(x, \bar{y})| < \varepsilon$ uniformemente in x per $x \in [0, a]$; $y, \bar{y} \in [0, b]$;

$|p(x, y) - p(x, \bar{y})| < \varepsilon$ uniformemente in x per $x \in [0, a]$; $y, \bar{y} \in [0, b]$;

$|q(x, y) - q(\bar{x}, y)| < \varepsilon$ uniformemente in y per $x, \bar{x} \in [0, a]$; $y \in [0, b]$.

Il nostro teorema si consegue se mostriamo che è anche, qualunque sia $z \in X_1$

(1) $|p(x, y) - p(x, \bar{y})| < \varepsilon$ uniformemente in y per $x, \bar{x} \in [0, a]$; $y \in [0, b]$;

(2) $|q(x, y) - q(x, \bar{y})| < \varepsilon$ uniformemente in x per $x \in [0, a]$; $y, \bar{y} \in [0, b]$.

Osserviamo allora che da noti teoremi, per le ipotesi poste, il problema differenziale ordinario

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{du(x, y)}{dy} = f(x, y, z, u, q) \\ u(x, 0) = \sigma'(x) \end{cases}$$

per ogni z (e quindi q), fissata e soluzione unica del problema (E) (C) con valori iniziali $\sigma(x)$ e $\tau(y)$ fissati, e per ogni x fissato, ammette una sola soluzione.

Analogamente il problema differenziale ordinario

$$
\text{(II)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dv(x, y)}{dx} = f(x, y, z, p, v) \\ v(0, y) = \tau'(y) \end{cases}
$$

per ogni z (e quindi p), fissata e soluzione unica del problema (E) (C) con valori iniziali $\sigma(x)$ e $\tau(y)$ fissati, e per ogni y fissato, ammette una sola soluzione.

Perciò dimostrare la (1) [oppure la (2)] qualunque sia $z \in X_1$ equivale a dimostrare che la soluzione del problema (I) [ovvero del problema (II)] descrive un insieme di funzioni equicontinue in x [in y] al variare di $\sigma(x)$ e $\tau(y)$ in un compatto e quindi di $\sigma'(x)$ [di $\tau'(y)$] in un insieme di funzioni equicontinue.

Tale dimostrazione si consegue a meno di semplici modifiche seguendo un ragionamento di C. CILIBERTO [4] (cfr. anche A. ZITAROSA [5]).

Notiamo infine che le ipotesi del teorema sono soddisfatte ad esempio se $f(x, y, z, u, v)$ soddisfa ad una condizione di LIPSCHITZ sia rispetto ad u che a v.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CORDUNEANU, *Le dépendance des solutions des équations hyperboliques par rapport aux coéfficients et aux données sur les caractéristiques*, « Rev. Math. Pures Appl. », 1 (1956), 41-44.

[2] A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*, « Monogr. Matem. »; Warszawa (1935).

[3] A. N. KOLMOGOROV - F. V. FOMIN, *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Vol. I: *Metric and normed spaces*, ROCHESTER N. Y. (1957).

[4] C. CILIBERTO, *Il problema di Darboux per una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, « Ricerche Mat. », 4 (1955), 15-29.

[5] A. ZITAROSA, *Alcune osservazioni su certi teoremi di compattezza e sul problema di Darboux*, « Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Soc. Naz. Sci. Lett. Arti Napoli », (4) 27 (1960) 25-35.