Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sull'elemento del terz'ordine di una curva sghemba.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.2, p. 145–147.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_145_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Sull'elemento del terz'ordine di una curva sghemba.

Nota di Mario Villa (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si dà una rappresentazione dell'elemento del terz'ordine di una curva sghemba mediante l'elica di curvatura e un ulteriore punto.*

1. In una Memoria del 1930, il Levi-Civita e il Fubini (1) si occuparono di una «questioncella» relativa ai primi elementi della geometria differenziale. Più precisamente, in tale Memoria, «si prende in considerazione l'intorno del terz'ordine di una curva, esaminando i vari tipi di curve, nonchè una configurazione (dovuta al Blaschke e pure pubblicata nella Memoria) atta a rappresentare l'intorno in modo geometricamente espressivo».

Dopo aver esaminato vari tipi di curve iperosculatrici una data curva in un punto dato, curve nel caso generale non del tutto elementari, gli Autori pongono col Blaschke la questione in un modo un po' diverso: «dato l'elemento di terz'ordine d'una curva, trovare una figura geometrica composta di punti e di rette invariantemente legata coll'elemento del terz'ordine e caratteristica per questo». E inoltre indicano una configurazione siffatta.

2. D'altra parte, nel II° Volume delle mie *Lezioni di Geometria* (2), dopo aver dato al Capitolo sui contatti di curve piane, di curve e superficie nello spazio, quel posto che effettivamente gli compete per gli studi locali sulle curve, sulle superficie e sulle trasformazioni, ho raccolto sotto un punto di vista unitario i primi elementi di carattere locale, della geometria differenziale metrica e proiettiva, che spesso nei trattati propedeutici vengono introdotti, direi di volta in volta, mentre provengono in definitiva tutti da quella nozione di contatto.

Come la flessione di una curva sghemba (o la curvatura di una curva piana) si può definire mediante il cerchio osculatore, così

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 20 marzo 1963.

(1) T. Levi - Civita e G. Fubini, *Sulle curve analoghe al circolo osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini,* « Annali di Matematica », Ser. IV, Tomo VII, pp. 193-211 (1930).

(2) M. Villa, *Lezioni di geometria,* Vol. II, Cedam, Padova, 1962.

ho definito la torsione di una curva sghemba mediante quella di una certa elica circolare (che ho chiamata *elica di curvatura*) determinata da opportuni contatti [3] [4].

Più precisamente, ho dimostrato che:

Esistono ∞^1 eliche circolari che osculano una data curva sghemba $\mathcal{C}$ in un punto semplice ordinario (proprio) O di questa [5]. E fra queste ne esiste una sola (l'elica di curvatura) la cui proiezione ortogonale sul piano rettificante (in O) ha contatto del 3° ordine in O con la proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ su tale piano.

Se la curva $\mathcal{C}$, riferita al triedro principale in O (asse x la tangente, asse y la normale principale, asse z la binormale), è rappresentata, nell'intorno di O, dagli sviluppi

$$
(1) \qquad \begin{aligned} y &= a_2x^2 + a_3x^3 + [4] \\ z &= \qquad\quad b_3x^3 + [4] \end{aligned}
$$

(le a, b costanti reali e indicando con [4] l'insieme dei termini di grado > 3), le equazioni dell'elica di curvatura a $\mathcal{C}$ in O sono

$$
\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(r^2 \operatorname{sen} u + h^2u) \\ y &= r(\cos u - 1) \\ z &= \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}}(-\operatorname{sen} u + u), \end{aligned}
$$

dove

$$
r = -\frac{2a_2^3}{4a_2^4 + 9b_3^2}, \qquad h = \frac{3a_2b_3}{4a_2^4 + 9b_3^2} \quad [6].
$$

[3] Si premette naturalmente la definizione della torsione di un'elica circolare.

[4] Si veda, oltre al mio libro già citato, la mia Nota: M. VILLA, *Sulla definizione della torsione di una curva sghemba*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Ser. III, Vol. XV, p. 47 (1960).

[5] Per punto ordinario s'intende un punto semplice nel quale la tangente ha esattamente contatto del 1° ordine con la curva (cioè un punto semplice non di flesso).

[6] Seguono le $\frac{r}{r^2 + h^2} = -2a_2$, $\frac{hr}{(r^2 + h^2)^2} = -6b_3$. Si noti che essendo O non di flesso è $a_2 \neq 0$. Quando (e solo quando) il punto O è stazionario ($b_3 = 0$), cioè la curva è piana o localmente piana, l'elica di curvatura si riduce al cerchio osculatore.

3. Il problema da me posto e risolto nel lavoro citato e che mi ha portato alla considerazione dell'elica di curvatura (*n.* 2) è diverso dal problema-considerato dal LEVI-CIVITA e dal FUBINI-consistente nell'assegnare una rappresentazione geometrica dell'E_3 analoga a quella data per l'E_2 dal cerchio osculatore, ma è chiaro che l'elica di curvatura con l'aggiunta di un altro elemento dà una soluzione anche di tale problema.

Infatti l'elica di curvatura determina i coefficienti a_2 e b_3 delle (1). Basterà pertanto un ulteriore elemento che determini l'a_3 per avere una rappresentazione dell'E_3 di $\mathcal{C}$ in O.

Ciò si ottiene assai facilmente considerando, ad esempio, nel piano osculatore, l'E'_3 in O della curva $\mathcal{C}'$ proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ su tale piano e la proiettività determinata da tale E'_3 fra la tangente in O e il fascio di raggi di centro O (7). In tale proiettività alla normale principale corrisponde il punto V di ascissa $\frac{a_2}{a_3}$, sicchè V determina appunto l'a_3.

Raccogliendo:

L'E_3 *di una curva sghemba in un punto* O *è determinato dall'elica di curvatura (in* O*) e dal punto* V *della tangente che corrisponde alla normale principale nella proiettività determinata dall'* E'_3 *proiezione ortogonale dell'* E_3 *sul piano osculatore* (8).

(7) La proiettività è quella subordinata dalla polarità rispetto ad una (qualsiasi) delle ∞^1 coniche contenenti l'E'_3. Si veda: E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. VI, vol. XXII, p. 486 (1935).

(8) Se l'E_3 é stazionario, l'elica di curvatura si riduce al cerchio osculatore (n. 2).

Si osservi che un E_3 curvilineo (non di flesso, nè stazionario) sta sempre in uno spazio lineare S_3 in quanto l'E_3 di una curva $\mathfrak{L}$ di uno spazio lineare $S_n (n > 3)$, si può sempre pensare appartenente ad una curva $\mathcal{C}$ dell'$S(3) = S_3$ osculatore in O che abbia un contatto del 3° ordine in O con la curva $\mathfrak{L}$. Quando (e solo quando) $a_3 = 0$, il punto V è il punto improprio.