Bollettino Unione Matematica Italiana

Salvatore Ciampa

Distanze non necessariamente triangolari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.2, p. 125–137.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_125_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Distanze non necessariamente triangolari (1)

Nota di SALVATORE CIAMPA (a Pisa) (*)

Sunto. - *Precisato il significato di "chiusura topologica indotta da una funzione-distanza" e osservato che, a conoscenza dell'autore, le generalizzazioni dei ben noti assiomi che definiscono una metrica conducono sempre a strutture topologiche uniformi, vien posto il problema della dipendenza di tale fatto dal modo particolare in cui la chiusura è stata definita. Si prova che tale dipendenza non sussiste, fornendo condizioni sufficienti affinché una funzione-distanza induca una topologia nel modo precisato e mostrando che non sempre questa topologia risulta uniformizzabile. Vengono anche stabilite alcune relazioni con le metriche propriamente dette.*

1.1. Introdotta in un insieme, al modo solito, la definizione di "*distanza tra due elementi*" o "*metrica*" (2) si può dare una opportuna precisazione al significato della frase "*elemento a distanza nulla da un sottoinsieme dell'insieme dato*", ottenendo così una relazione tra elementi e sottoinsiemi del dato insieme che ha i caratteri di una "*chiusura* o *aderenza topologica*" (3). Questa relazione, come è noto, permette di munire l'insieme considerato di una struttura di "*spazio topologico*" (4), più precisamente di una struttura di "*spazio metrico*" (2).

Le proprietà di cui gode la funzione che si è chiamata "*distanza tra due elementi*" fanno sì che la struttura di spazio metrico risulti abbastanza ricca: per esempio uno spazio metrico è uno spazio uniforme (5) ed è anche completamente regolare (6) perchè in ogni spazio metrico è verificato l'assioma di HAUSDORFF (7);

(*) Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 16 marzo 1963.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 9 del Comitato per la Matematica del C. N. R. nell'anno accademico 1962-63.

(2) Cfr. [2], § 2, n. 1; [3], cap. 4, pag. 118 (i numeri tra parentesi si riferiscono alla bibliografia annessa).

(3) Cfr. [3], cap. 1, pag. 42; [1], cap. I, § 1, n. 6.

(4) Cfr. [1], cap. I, § 1, n. 1; [3], cap. 1, pag. 37.

(5) Cfr. [1], cap. II, § 1, n. 1; [3], cap. 6.

(6) Cfr. [2], § 1, n. 5; in [3] la terminologia è leggermente differente, cfr. cap. 4, pag. 117.

(7) Cfr. [1], cap. I, § 8, n. 1; [3], cap. 2, pag. 67.

ogni spazio metrico risulta inoltre paracompatto [8] e perciò normale [9] insieme ad ogni suo sottospazio; ecc..

1.2. Si può chiedere a questo punto se la perdita di qualche proprietà dello spazio topologico ottenuto, derivante dalla modifica di qualche assioma nella definizione di "*distanza*", comporta anche la perdita del carattere topologico della struttura stessa, indotta dalla funzione distanza così modificata.

È ben noto che così non è: se, per esempio, si omette la condizione che elementi distinti abbiano distanza non nulla, ferme restando le altre, si ottiene ancora uno spazio topologico uniforme, il quale però non è uno spazio di HAUSDORFF [10]. Si possono modificare anche gli altri assiomi in modo da ottenere ancora uno spazio topologico: un modo è quello indicato dal BOURBAKI [11], lo spazio topologico che si ottiene risulta, però, ancora uno spazio uniforme.

1.3. Si può quindi precisare la domanda posta all'inizio del n. precedente chiedendo se l'uniformità della struttura topologica sia un carattere essenziale delle topologie indotte da funzioni del tipo di una distanza.

Si farà vedere che la risposta a questa domanda è negativa dando delle condizioni sufficienti perchè una funzione — distanza induca una topologia (nn. **4** e **5**) e mostrando che in un caso particolare la topologia che si ottiene non è uniforme (n. **7**).

Alcune relazioni tra gli spazi topologici che così si ottengono e gli spazi metrici sono indicate nel n. **6**.

1.4. Nel seguito con R ed R^0 saranno rispettivamente indicati l'insieme dei numeri reali e quello dei numeri reali non negativi.

Se:

$$f : A \to B, \qquad g : B \to C$$

sono due applicazioni, con $g \circ f$ verrà indicata l'applicazione

$$A \to C$$

tale che:

$$g \circ f(a) = g[f(a)], \qquad \text{per ogni } a \in A.$$

(10) Cfr. [2], § 2, n. 1.
(11) Cfr. [2], § 1, exerc. 2.
(8) Cfr. [2], § 4, nn. 4 e 5; [3], cap. 5, pag. 156.
(9) Cfr. [2], § 4, nn. 1 e 4; [3], cap. 4, pag. 112 e cap. 5, pag. 159.

2.1. Si consideri un insieme S e sia T un sottoinsieme del prodotto $S \times S$. Se è assegnata una funzione a valori reali:

$$\varphi : T \to R$$

si possono dare le seguenti definizioni:

2.1.1. *Se* $a \in \mathrm{S}$ *e* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S}$,

$a * \mathrm{A}$ *significa che per ogni numero reale* $\lambda > 0$ *esiste un elemento* $b \in \mathrm{A}$ *tale che:*

$$\varphi(b, a) < \lambda;$$

2.1.2. *Se* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S}$:

$$\overline{A} = \{ a : a \in S \text{ ed } a * A \}.$$

2.2. Osserviamo ora che se si richiede che la funzione:

$$\varphi : T \to R$$

assuma soltanto valori non negativi, non si lede con ciò la generalità.

Posto infatti, per ogni $(a, b) \in T$:

$$\chi(a, b) = \max [0, \varphi(a, b)],$$

per ogni numero reale $\lambda > 0$ e per ogni $(a, b) \in T$ si ha:

$$\chi(a, b) < \lambda \iff \varphi(a, b) < \lambda$$

e quindi, per ogni $a \in S$ e per ogni $A \subseteq S$,

$$a * A \text{ [rispetto alla funzione } \varphi] \iff$$
$$\iff a * A \text{ [rispetto alla funzione } \chi].$$

Nel seguito pertanto s'intenderà:

$$\varphi(a, b) \geq 0, \qquad \text{per ogni } (a, b) \in T,$$

cioè:

$$\varphi : T \to R^0.$$

3. Una ben nota condizione sufficiente perchè l'applicazione:

$$A \to \overline{A}, \qquad \text{per ogni } A \subseteq S,$$

(cfr. defin. **2.1.2.**) sia una chiusura topologica è che la funzione:

$$\varphi : T \to R^0$$

sia uno "*scarto*" [12], cioè sia tale che:

(*a*) $T = S \times S$;

(*b*) per ogni a, b, c in $S : \varphi(a, c) \leq \varphi(a, b) + \varphi(c, b)$;

(*c*) $a \in S \Rightarrow \varphi(a, a) = 0$;

e si ottiene, come già si è rilevato, uno spazio uniforme non necessariamente completamente regolare, cosa che accade invece se si tratta di una "*distanza*", cioè se la proposizione (*c*) viene sostituita dalla seguente:

(*c'*) per ogni a, b in $S : a = b \Leftrightarrow \varphi(a, b) = 0$.

4. Si consideri ora una funzione:

$$\varphi : T \to R^0$$

qualsiasi e prendiamo in considerazione separatamente i quattro assiomi di Kuratowski [13].

4.1. *L'applicazione:*

$$A \to \overline{A}, \textit{ per ogni } A \subseteq S,$$

definita nel n. **2.1.2.**, *è tale che:*

(*a*) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(*b*) *per ogni* $A, B \subseteq S : \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

L'affermazione (*a*) segue immediatamente dalla definizione: nei riguardi dell'altra si ha:

se $a \in \overline{A} \cup \overline{B}$, per esempio $a \in \overline{B}$, accade che: per ogni numero reale $\lambda > 0$ esiste un elemento $b \in B \subseteq A \cup B$ per cui:

$$\varphi(a, b) < \lambda,$$

(12) Cfr. [2], § 1, n. 1; in [3], cap. 4, pag. 119, si trova anche il termine "*pseudometrica*".

(13) Cfr. [3], cap. 1, pag. 43.

perciò $a \in \overline{A \cup B}$;
se $a \in \overline{A \cup B}$, per ogni numero reale $\lambda > 0$ esiste un elemento b_λ nell'insieme $A \cup B$ tale che:

$$\varphi(b_\lambda, a) < \lambda;$$

ora, se esiste un numero reale $\nu > 0$ per cui:

$$0 < \lambda \leq \nu \Rightarrow b_\lambda \notin A,$$

si ha:

$$b_\lambda \in B, \text{ per } 0 < \lambda \leq \nu$$

e perciò, posto $c_\lambda = b_\sigma$ essendo σ il più piccolo tra i due numeri reali λ e ν, per ogni numero reale $\lambda > 0$ accade che:

$$c_\lambda \in B \text{ e } \varphi(c_\lambda, a) < \lambda,$$

quindi $a \in \overline{B}$ e l'asserto è provato.

4.2. *Con riferimento alle notazioni introdotte, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(a) *per ogni* $A \subseteq S$, $A \subseteq \overline{A}$;

(b) *l'insieme* T *e la funzione* φ *sono tali che:*
per ogni $a \in S$ *si ha*

$$(a, a) \in T \text{ e } \varphi(a, a) = 0.$$

Che $(b) \Rightarrow (a)$ segue dalle definizioni, il viceversa si prova considerando sottoinsiemi $A \subseteq S$ costituiti da un solo elemento.

4.3. Nei riguardi del rimanente assioma osserviamo che in generale non accade che:

$$\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}, \text{ per ogni } A \subseteq S.$$

Si consideri il seguente esempio:
sia I l'intervallo chiuso costituito dai numeri reali compresi tra 0 ed 1 e sia J l'insieme costituito dal solo numero reale 2; si ponga:

$$S = I \cup J$$

e si definisca la funzione:

$$\varphi : S \times S \rightarrow R^0$$

come segue:

$$\varphi(a,\ b) = |\ a - b\ |, \qquad \text{per ogni } (a,\ b) \in I \times I \cup J \times J,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{n},\ 2\right) = \varphi\left(2,\ \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \qquad \text{per ogni intero positivo } n,$$

$$\varphi(a,\ b) = 1, \qquad \text{per ogni coppia } (a,\ b) \in S \times S \text{ non considerata precedentemente;}$$

posto allora:

$$A = \left\{ a : a \in I \text{ e, per ogni intero positivo } n,\ a \neq \frac{1}{n} \right\},$$

si ha:

$$\overline{A} = I \text{ mentre } \overline{\overline{A}} = S.$$

4.4. *Con riferimento alle definizioni del n.* **2.1.** *si ha: la proposizione*:

(a) *l'insieme T e la funzione φ sono tali che: esiste un numero reale $\rho > 0$ in modo che, per ogni $a, b, c,$ in* S, *se*:

$$(a,\ b) \in T, \quad (b,\ c) \in T$$

allora:

(a.1) $(a,\ c) \in T$;

(a.2) $a \neq c \Longrightarrow \varphi(a,\ c) \geq \rho \min\,[\varphi(a,\ b),\ \varphi(b,\ c)]$;

(a.3) $a \neq c,\ \varphi(b,\ c) = 0 \Longrightarrow \varphi(a,\ b) \leq \varphi(a,\ c)$;

(a.4) $a \neq b,\ \varphi(a,\ b) < \varphi(a,\ c) \Longrightarrow (c,\ b) \in T$;

implica la seguente:

(b) *per ogni* $A \subseteq S,\ \overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$.

Sia $a \in \overline{\overline{A}}$, allora per ogni coppia di numeri reali positivi λ e μ esistono due elementi $b_\lambda \in \overline{A}$ e $c_{\lambda\mu} \in A$ in modo che:

$$\varphi(b_\lambda,\ a) < \lambda \text{ e } \varphi(c_{\lambda\mu},\ b_\lambda) < \mu.$$

Mostreremo ora che per ogni numero reale $\nu > 0$ ne esistono altri due λ e μ tali che:

$$\varphi(c_{\lambda\mu},\ a) < \nu$$

provando così che $a \in \overline{A}$.

La cosa è evidente se per ogni $\nu > 0$ esistono λ e μ in modo che:

$$0 < \lambda < \nu \text{ e } c_{\lambda\mu} = b_\lambda .$$

Supponiamo quindi che esista un numero reale $\sigma > 0$ per cui:

$$0 < \lambda < \sigma,\ 0 < \mu \Rightarrow c_{\lambda\mu} \neq b_\lambda .$$

Osservato poi che da quanto si è detto segue che:

$$(c_{\lambda\mu},\ a) \in T, \text{ per ogni valore di } \lambda \text{ e } \mu,$$

se quanto stiamo dimostrando non fosse vero dovrebbe esistere un numero reale $\nu > 0$ tale da aversi:

$$\varphi(c_{\lambda\mu},\ a) \geq \nu, \text{ per ogni valore di } \lambda \text{ e } \mu.$$

Allora, per ogni coppia di numeri reali positivi λ e μ, da:

$$\mu \leq \nu$$

seguirebbe:

$$\varphi(c_{\lambda\mu},\ a) \geq \nu \geq \mu > \varphi(c_{\lambda\mu},\ b_\lambda)$$

e quindi:

$$0 < \lambda < \sigma \Rightarrow (a,\ b_\lambda) \in T.$$

Ora, per ogni fissato valore di λ tra zero e σ, non può accadere che:

$$\varphi(a,\ b_\lambda) = 0$$

altrimenti, essendo $(c_{\lambda\mu},\ a) \in T$, risulterebbe:

$$\nu \leq \varphi(c_{\lambda\mu},\ a) \leq \varphi(c_{\lambda\mu},\ b_\lambda) < \mu, \text{ per ogni } \mu > 0,$$

e questo è impossibile per l'arbitrarietà di μ. D'altra parte, sempre per l'arbitrarietà di μ, non può accadere nemmeno il contrario, giacchè allora, essendo:

$$c_{\lambda\mu} \neq b_\lambda, \text{ per ogni } \mu > 0,$$

si avrebbe:

$$0 < \rho \min[\nu,\ \varphi(a,\ b_\lambda)] \leq \rho \min[\varphi(c_{\lambda\mu},\ a),\ \varphi(a,\ b_\lambda)] \leq \varphi(c_{\lambda\mu},\ b_\lambda) < \mu.$$

Risulta così provato quanto avevamo asserito.

5.1. Si può quindi concludere affermando che:

Dato un insieme S ed un sottoinsieme T del prodotto $S \times S$ sul quale sia definita una funzione φ a valori reali non negativi, perchè l'applicazione:

$$A \rightarrow \bar{A}$$

definita per ogni $A \subseteq S$ nel n. **2.1.2.** *sia una chiusura topologica è sufficiente che siano vere le proposizioni* **4.2.** (b) *e* **4.4.** (a).

5.2. L'ultima condizione citata, tuttavia, non è necessaria perchè la funzione φ induca nel modo detto una topologia in S: basta osservare che la proposizione **4.4.** (a.2) è falsa se la funzione φ coincide con la metrica euclidea in R.

Rimane altresì provato che le distanze propriamente dette (cfr. n. **3.**) non sono un caso particolare delle funzioni del tipo considerato nell'enunciato precedente.

Che le topologie indotte da queste ultime, poi, con l'aggiunta della proprietà simmetrica per gli argomenti e della proprietà espressa dalla proposizione (c') del n. **3.**, non sempre rientrano tra le topologie indotte da una distanza, verrà provato con un esempio nel successivo n. **7.**.

6. Seguono ora alcune proposizioni che permettono di stabilire qualche relazione tra le funzioni φ del tipo descritto nel n. **5.1.** e le distanze, cioè le funzioni φ per cui valgono le proprietà (a), (b), (c′) del n. **3.**.

Fissato un sottoinsieme T del prodotto $S \times S$ in modo che, per ogni scelta degli elementi a, b, c in S si abbia:

(a) $(a, a) \in T$;

(b) $(a, b) \in T$ e $(b, c) \in T \Rightarrow (a, c) \in T$;

si indichi con:
$\Phi(T)$: l'insieme di tutte le funzioni:

$$\varphi : T \rightarrow R^0$$

per cui sono soddisfatte le condizioni sufficienti indicate nel n. **5.1.**; per ogni funzione φ siffatta sia ρ_φ l'estremo superiore di tutti i numeri reali ρ per i quali la proposizione **4.4.** (a) risulta vera;

$\Delta(T)$: l'insieme di tutte le funzioni:

$$\delta : T \to R^0$$

tali che:

I) $\delta(a, a) = 0$, per ogni $a \in S$,

II) $(a, b) \in T$ e $(b, c) \in T \Rightarrow \delta(a, c) \leq \delta(a, b) + \delta(b, c)$;

$\mathcal{F}$: l'insieme di tutte le funzioni:

$$f : R^0 \to R^0$$

tali che:

I) $f(0) = 0$;

II) per ogni coppia di numeri reali λ e μ si ha:

$$0 < \lambda \leq \mu \Rightarrow f(\lambda) \geq f(\mu).$$

Si ha allora:

6.1. *Per ogni coppia di funzioni* $\varphi \in \Phi(T)$ *e* $f \in \mathcal{F}$ *si ha:*

$$\rho_\varphi \geq 1 \Rightarrow f \circ \varphi \in \Delta(T).$$

Basta evidentemente dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se $(a, b) \in T$ e $(b, c) \in T$ con $a = c$, la disuguaglianza è ovvia; se invece risulta $a \neq c$, da:

$$0 < \min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)] \leq \varphi(a, c)$$

segue:

$$f \circ \varphi(a, c) \leq f[\min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)]] =$$

$$= \max[f \circ \varphi(a, b), f \circ \varphi(b, c)] \leq f \circ \varphi(a, b) + f \circ \varphi(b, c);$$

se poi:

$$\varphi(a, c) = \min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)] = 0,$$

la disuguaglianza è immediata risultando:

$$f \circ \varphi(a, c) = 0.$$

Se, infine,

$$\varphi(a, c) > \min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)] = 0,$$

allora, non potendo essere:

$$\varphi(a, b) = 0$$

altrimenti, per **4.4.** (a), la coppia (c, b) sarebbe in T e perciò:

$$0 = \varphi(a, b) \geq \min [\varphi(a, c), \varphi(c, b)]$$

da cui:

$$\varphi(c, b) = 0 \text{ e } \varphi(a, c) \leq \varphi(a, b) = 0$$

contro il supposto, si avrà:

$$a = b \text{ oppure } \varphi(b, c) = 0.$$

Nel primo caso la disuguaglianza è ovvia; nel secondo, poichè già sappiamo che:

$$\varphi(a, b) \neq 0,$$

si ha:

$$0 < \varphi(a, b) \leq \varphi(a, c)$$

e quindi:

$$f \circ \varphi(a, b) \geq f \circ \varphi(a, c).$$

6.1.1. *Se l'insieme T coincide con $S \times S$, per ogni coppia di funzioni $\varphi \in \Phi(T)$ e $f \in \mathcal{F}$ tali che:*

(a) $\varphi(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$;

(b) *per ogni coppia* $(a, b) \in T$: $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$;

(c) $\rho_\varphi \geq 1$;

(d) $f(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$;

accade che la funzione f $\circ \varphi$ *è una distanza in* S.

Segue immediatamente dalla proposizione precedente dopo aver osservato che la funzione composta $f \circ \varphi$ risulta simmetrica ed è nulla solo se gli argomenti coincidono se lo stesso accadeva per la funzione φ.

6.2. *Per ogni coppia di funzioni $\varphi \in \Phi(T)$ e $f \in \mathcal{F}$ per cui risulta:*

$$f \circ \varphi \in \Delta(T),$$

posto:

$$E = \{ \lambda : \lambda \textit{ reale positivo tale che: } 0 < \mu \in R^0 \Rightarrow f(\lambda\mu) > 2f(\mu) \},$$

si ha:

$$E \neq \emptyset \Rightarrow \rho_\varphi \geq \sup E.$$

Basta evidentemente dimostrare che:
per ogni $(a, b) \in T$ e $(b, c) \in T$,

$$a \neq c, \; \lambda \in E \Rightarrow \varphi(a, c) \geq \lambda \min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)].$$

Se:

$$\min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)] = 0$$

la cosa è immediata, altrimenti:

$$f \circ \varphi(a, c) \leq f \circ \varphi(a, b) + f \circ \varphi(b, c) \leq 2 \max[f \circ \varphi(a, b); f \circ \varphi(b, c)] =$$
$$= 2f[\min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)]] < f[\lambda \min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)]]$$

e quindi:

$$\varphi(a, c) > \lambda \min[\varphi(a, b), \varphi(b, c)].$$

6.3. *Se la funzione:*

$$\delta : T \to R^0$$

è una distanza in S *e se* $f \in \mathfrak{F}$, *allora dalle proposizioni:*

(a.1) *esiste un numero reale positivo* λ *tale che*

$$f(2\mu) \geq \lambda f(\mu), \; per \; ogni \; \mu \in R^0;$$

(a.2) $f(\mu) = 0 \Rightarrow \mu = 0$

segue che:

$$f \circ \delta \in \Phi(T).$$

Inoltre nella topologia indotta in S *dalla funzione composta* $f \circ \delta$ *gli insiemi finiti risultano chiusi.*

Le proprietà espresse dalle proposizioni **4.2.** (b), **4.4.** (a.1) e **4.4.** (a.4) sono evidentemente verificate.

Siano ora a, b, c elementi dell'insieme S:
se $a \neq c$ e $f \circ \delta(b, c) = 0$ anche $\delta(b, c) = 0$ e quindi:

$$0 < \delta(a, c) \leq \delta(a, b)$$

perciò:

$$f \circ \delta(a, c) \geq f \circ \delta(a, b),$$

risultando così provata la proposizione **4.4.** (a.3).

Nei riguardi della proposizione **4.4.** (a.2) osserviamo che, supposto $a \neq c$, si ha:

$$0 < \delta(a, c) \leq \delta(a, b) + \delta(b, c)$$

e quindi:

$$f \circ \delta(a, c) \geq f[\delta(a, b) + \delta(b, c)] \geq f[2 \max [\delta(a, b), \delta(b, c)]] \geq$$
$$\geq \lambda f[\max [\delta(a, b), \delta(b, c)]] = \lambda \min [f \circ \delta(a, b), f \circ \delta(b, c)].$$

Infine, risultando:

$$f \circ \delta(a, b) = 0 \text{ solo se } a = b,$$

segue che l'insieme $A = \{a\}$, costituito dal solo elemento a, coincide con la propria chiusura; gli insiemi finiti, quindi, sono chiusi.

7. Mostriamo ora, con un esempio, che la struttura topologica indotta da una funzione φ per la quale valgano le condizioni sufficienti indicate nel teorema del n. **5.1.** ed inoltre sia tale che:

(a) $T = S \times S$;

(b) per ogni $(a, b) \in T$: $\quad \varphi(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$;

(c) per ogni $(a, b) \in T$: $\quad \varphi(a, b) = \varphi(b, a)$;

può non essere una struttura uniformizzabile ed in tal caso nessuna distanza in S può indurre la stessa topologia.

Sia S l'insieme dei numeri interi e sia:

$$\delta : S \times S \to R^0$$

la metrica euclidea in S, cioè:

$$\delta(a, b) = | a - b |, \text{ per ogni coppia } (a, b) \in S \times S.$$

Sia:

$$f : R^0 \to R^0$$

la funzione per cui:

I) $f(0) = 0$

II) $f(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$ per ogni numero reale $\lambda > 0$.

Allora, osservato che per la funzione f ora definita si ha:

$$f(2\lambda) \geq \frac{1}{2} f(\lambda), \qquad \text{per ogni } \lambda \in R^0,$$

il teorema del n. **6.3.** permette di affermare che la funzione composta:

$$f \circ \delta : S \times S \to R^0$$

induce in S una topologia nella quale gli insiemi finiti sono chiusi.

È subito visto che nello spazio topologico così ottenuto ogni insieme non finito contenuto propriamente in S non può essere chiuso, risultando denso in S. Ne segue che sono insiemi chiusi soltanto l'intero spazio ed i suoi sottoinsiemi finiti. Conseguenza di ciò è che due insiemi aperti contenuti in S non possono essere disgiunti se nessuno dei due è vuoto: il complementare di un insieme aperto non vuoto è finito e quindi non può contenere nessun insieme aperto non vuoto altrimenti lo spazio S risulterebbe costituito da un numero finito di elementi.

Considerata quindi una funzione:

$$g : S \to R,$$

questa non può risultare continua se non è costante; se, infatti, esistessero elementi b ed a in S tali che:

$$g(b) \neq g(a),$$

detti E e F due sottoinsiemi aperti di R contenenti rispettivamente $g(b)$ e $g(a)$ e disgiunti, i sottoinsiemi di S:

$$\overset{-1}{g}(E) \quad \text{e} \quad \overset{-1}{g}(F)$$

risulterebbero aperti, non vuoti e disgiunti.

Nello spazio S quindi non esiste nessuna funzione continua che assuma valori distinti su un elemento e su un insieme chiuso che non contiene quest'ultimo, la topologia di S non è pertanto uniformizzabile (14)

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Chap. 1 et 2 - III édit. « Act. Scient. Industr. » n. 1142 - Hermann, Paris, 1961.

[2] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Chap. 9 - II édit. « Act. Scient. Industr. », n. 1045 - Hermann, Paris, 1958.

[3] J. L. KELLEY, *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

(14) Cfr. [2], § 1, n. 5, teor. 2; [3], cap. 6, n. 17.