
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BRUNO PINI

Alcune stime integrali di soluzioni di certe equazioni ipoellittiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 18
(1963), n.2, p. 112–124.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_112_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Alcune stime integrali di soluzioni di certe equazioni ipoellittiche.

Nota di BRUNO PINI (a Bologna) (*)

Sunto. - Come nel n. 1.

1. Indichiamo con $x = (x_1, \dots, x_r)$ ed $s = (s_1, \dots, s_r)$ punti dell' R^r euclideo reale, con y e σ punti dell' R^1 euclideo reale. Siano m ed n due numeri naturali, m pari ed n dispari, m ed n primi tra loro ed $m > n$. Sia $P_{m(q-k)}(is)$ un polinomio omogeneo di grado $m(q-k)$ in $is_1, \dots, is_r$ a coefficienti costanti. Consideriamo l'equazione

$$(1) \quad L(u) = \sum_{k=0}^q P_{m(q-k)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^{nk} u}{\partial y^{nk}} = 0$$

nell'ipotesi che sia

$$(2) \quad \sum_{k=0}^q P_{m(q-k)} (-is)(-i\sigma)^{nk} \neq 0$$

(i unità immaginaria)

per ogni s e σ con $|s|^2 + \sigma^2 > 0$ ($|s| = (\sum_{k=1}^r s_k^2)^{1/2}$); questa condizione è necessaria e sufficiente affinchè la (1) sia ipoellittica.

L'equazione

$$(3) \quad \sum_{k=0}^q P_{m(q-k)} (-is)^{nk} = 0$$

ha un numero costante, sia M , di radici a parte reale negativa (sempre le stesse al variare di s se $r > 1$). Supponiamo $0 < M < nq$ (per $M = nq$ si presenta il caso cosiddetto parabolico).

Se $h_1, \dots, h_r, k$ sono interi non negativi poniamo $h_1 + \dots + h_r = h$ e

$$D_x^h D_y^k = \frac{\partial^{h_1+\dots+h_r+k}}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_r^{h_r} \partial y^k}.$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 9 marzo 1963.

Se l è un intero non negativo poniamo

$$[f(x)]_l = \max_{l_1 + \dots + l_r = l} \sup_{x \in R^r} |D_x^l f(x)|;$$

se l è positivo e non intero, indicando con $[l]$ il più grande intero minore di l , poniamo

$$[f(x)]_{[l]}^{l-[l]} = \max_{l_1 + \dots + l_r = [l]} \sup_{x', x'' \in R^r} \frac{|D_x^{[l]} f(x') - D_x^{[l]} f(x'')|}{|x' - x''|^{l-[l]}}.$$

Altrove ⁽¹⁾ abbiamo provato che:

Esiste al più una sola funzione $u(x, y)$ di classe C^∞ per $y \geq 0$, $x \in R^r$, tale che

$$u(x, y) = O(|x|^2 + y^{2n/m})^{m(M-1)/2n}$$

per $|x|^2 + y^{2n/m} \rightarrow +\infty$, soluzione di (1) per $y > 0$. Se, inoltre, posto $D_y^j u(x, 0) = f_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, M-1$, riesce

$$[f_j(x)]_{m(M-1-j)/n} < +\infty \quad \text{per} \quad m(M-1-j)/n \quad \text{intero}$$

$$[f_j(x)]_{[m(M-1-j)/n]}^{m(M-1-j)/n - [m(M-1-j)/n]} < +\infty$$

per $m(M-1-j)/n$ non intero,

$j = 0, 1, \dots, M-1$, esiste allora una costante positiva C (indipendente dalla f_j) tale che

$$\sup_{\substack{x \in R^r \\ y > 0}} |D_x^h D_y^k u(x, y)| < \\ < C \left(\sum_{j=0}^{M-1} [f_j(x)]_{m(M-1-j)/n} + \sum_{j=0}^{M-1} [f_j(x)]_{[m(M-1-j)/n]}^{m(M-1-j)/n - [m(M-1-j)/n]} \right)$$

per ogni coppia di interi non negativi h e k per cui $nh + mk =$

⁽¹⁾ B. PINI, *Problema ridotto di Cauchy per certe equazioni pseudoparaboliche*, I, II (Rend. Acc. Scienze dell'Istituto di Bologna, tomo IX, 1962) e III (ibidem, tomo X, in corso di stampa).

$$= m(M-1);$$

$$\sup_{\substack{x \in R^r \\ y', y'' > 0}} \frac{|D_x^h D_y^{[k]} u(x, y') - D_x^h D_y^{[k]} u(x, y'')|}{|y' - y''|^{k-[k]}} < \\ < C \left(\sum_{j=0}^{M-1} [f_j(x)]_{m(M-1-j)/n} + \sum_{j=0}^{M-1} [f_j(x)]_{[m(M-1-j)/n - m(M-1-j)/n]}^{m(M-1-j)/n - [m(M-1-j)/n]} \right)$$

per ogni coppia di numeri positivi h e k , il primo intero e il secondo non intero per cui $nh + mk = m(M-1)$. La Σ' s'intende estesa a tutti quegli j per cui $m(M-1-j)/n$ è intero e la Σ'' ai restanti j .

2. Le righe che seguono forniscono una estensione delle valutazioni precedenti nello spazio L_p . Supponiamo $1 < p < +\infty$.

Se l è un intero non negativo poniamo

$$(4) \quad \|D_x^l f(x)\|_{L_p(R^r)}^p = \sum_{l_1 + \dots + l_r = l} \int_{R^r} |D_x^l f(x)|^p dx;$$

se l è un numero positivo non intero poniamo

$$(5) \quad \|D_x^{[l]} f(x)\|_{W_p^{l-[l]}(R^r)} = \sum_{l_1 + \dots + l_r = [l]} \sum_{j=1}^r \int_0^{+\infty} \int_R \frac{|D_x^{[l]} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_r) - D_x^{[l]} f(x)|^p}{t^{1+p(l-[l])}} dx dt.$$

Se l è intero non negativo e $f(x) \in L_p(R^r)$, $\|D_x^l f(x)\|_{L_p(R^r)} < \infty$ sarà $f(x) \in W_p^l(R^r)$ (spazio di SOBOLEV d'ordine intero l); se l è positivo non intero e $f(x) \in W_p^{[l]}(R^r)$, $\|D_x^{[l]} f(x)\|_{W_p^{l-[l]}(R^r)} < \infty$, sarà $f(x) \in W_p^l(R^r)$ (spazio di SOBOLEV d'ordine non intero l).

Ciò premesso, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ le radici di (3) a parte reale negativa; per semplicità supponiamole tutte semplici.

Una soluzione formale del problema

$$(1) \quad L(u) = 0 \quad \text{per } y > 0$$

$$(6) \quad D_y^j u(x, 0) = f_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, M-1$$

è fornita da

$$(7) \quad u(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^r} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{R^r} G_j(x - \xi, y) f_j(\xi) d\xi$$

ove

$$G_j(x - \xi, y) = \int_{R^r} e^{-i(x-\xi, s)} \frac{V_j(s, y)}{V(s)} ds, \quad (x - \xi, s) = \sum_{k=0}^r (x_k - \xi_k) s_k,$$

$$V(s) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_M \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{M-1} & \dots & \lambda_M^{M-1} \end{vmatrix}, \quad V_j(s, y) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_M \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{j-1} & \dots & \lambda_M^{j-1} \\ \exp(\lambda_1 y) \dots \exp(\lambda_M y) \\ \lambda_1^{j+1} & \dots & \lambda_M^{j+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{M-1} & \dots & \lambda_M^{M-1} \end{vmatrix}$$

Proviamo che:

I. Se $f_j(x) \in W_p^{m(M-1-j)/n}(R^r)$ per $0 \leq j \leq M-1$, allora la (7) è soluzione di (1) per $y > 0$ e riesce

$$(9) \quad \lim_{y \rightarrow 0+} \|D_y^j u(x, y) - f_j(x)\|_{L_p(R^r)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Poniamo

$$u_j(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{R^r} G_j(x - \xi, y) f_j(\xi) d\xi.$$

È essenziale la seguente maggiorazione relativa al nucleo G_j :

Per ogni coppia di interi non negativi h e k con $k \leq M$ esiste una costante positiva C_{hk} tale che

$$(10) \quad |D_x^h D_y^k G_j(x, y)| < C_{hk} \frac{1 + \lg \left(1 + \frac{|x|}{y^{n/m}} \right)}{y^{n(r+h)/m+k-j} \left(1 + \frac{|x|^2}{y^{2n/m}} \right)^{(r+h+m(M-j)/n)/2}}$$

per $y > 0$, $x \in R^r$.

Per $y > 0$ si ha

$$|D_x^h D_y^k u_j(x, y)| < C y^{-(k+nh/m)+j} \int_{R^r} \frac{|f_j(\xi)|}{y^{nr/mp} |H(|x-\xi|, y)|^{(r+m/n)p}} \cdot \\ \cdot \frac{K(|x-\xi|, y)}{y^{nr(p-1)/mp} |H(|x-\xi|, y)|^{(p-1)(r+m/n)p}} d\xi,$$

avendo posto per comodità

$$H(|x-\xi|, y) = (1 + |x-\xi|^2/y^{2n/m})^{1/2}, \\ K(|x-\xi|, y) = 1 + \lg(1 + |x-\xi|/y^{n/m}).$$

Ne segue

$$\|D_x^h D_y^k u_j(x, y)\|_{L_p(R^r)}^p < C' y^{-p(k+nh/m)+pj} \cdot \\ \cdot \int_{R^r} dx \int_{R^r} \frac{|f_j(\xi)|^p}{|H(|x-\xi|, y)|^{r+m/n}} \frac{d\xi}{y^{nr/m}} \cdot \\ \cdot \left(\int_{R^r} \frac{|K(|x-\xi|, y)|^{p/(p-1)}}{|H(|x-\xi|, y)|^{r+m/n}} \frac{d\xi}{y^{nr/m}} \right)^{p-1} < \\ < C'' y^{-p(k+nh/m)+pj} \int_{R^r} |f_j(\xi)|^p d\xi \int_{R^r} \frac{1}{|H(|x-\xi|, y)|^{r+m/n}} \frac{d\xi}{y^{nr/m}}$$

da cui

$$(11) \quad \|D_x^h D_y^k u_j(x, y)\|_{L_p(R^r)}^p < C y^{-p(k+nh/m)+pj} \|f_j(x)\|_{L_p(R^r)}^p,$$

con C costante positiva dipendente solo da h e k . In particolare si ha

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow 0+} \|D_y^k u_j(x, y)\|_{L_p(R^r)} = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, j-1.$$

Poichè $C_0^\infty(R^r)$ è denso in $L_p(R)$, esiste una successione $\{\varphi_{nj}(x)\}$ di funzioni $\in C_0^\infty$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_{nj}(x) - f_j(x)\|_{L_p(R^r)} = 0$.

Si ha

$$\begin{aligned}
 & \| D_y^j u_j(x, y) - f_j(x) \|_{L_p(R^r)} \leq \\
 & \leq \| \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{R^r} D_y^j G_j(x - \xi, y) [f_j(\xi) - \varphi_{nj}(\xi)] d\xi \|_{L_p(R^r)} + \\
 & + \| \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{R^r} D_y^j G_j(x - \xi, y) \varphi_{nj}(\xi) d\xi - \varphi_{nj}(x) \|_{L_p(R^r)} + \\
 & + \| \varphi_{nj}(x) - f_j(x) \|_{L_p(R^r)}.
 \end{aligned}$$

Il terzo addendo a secondo membro $\rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$; a causa della (11), ove si ponga $h=0$, $k=j$ e $f_j - \varphi_{nj}$ al posto di f_j , si ha che anche il primo addendo $\rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$; per ogni fissato n il secondo addendo $\rightarrow 0$ per $y \rightarrow 0+$ (perchè

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{R^r} D_y^j G_j(x - \xi, y) \varphi_{nj}(\xi) d\xi = \varphi_{nj}(x).$$

Pertanto

$$(13) \quad \lim_{y \rightarrow 0+} \| D_y^j u_j(x, y) - f_j(x) \|_{L_p(R^r)} = 0.$$

Sia ora $j < k \leq M-1$. Supponiamo dapprima $m(M-1-j)/n$ intero. Posto

$$D_y^k G_{jk}(x - \xi, y) = \int_{R^r} e^{-i(x-\xi, s)} \frac{1}{|s|^{m(M-1-j)/n}} \frac{D_y^k V_j(s, y)}{V(s)} ds$$

si ha

$$(14) \quad D_y^k G_j = (-1)^{m(M-1-j)/2n} \Delta_x^{m(M-1-j)/2n} D_y^k G_{jk} \quad \left(\Delta_x = \sum_{h=1}^r \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \right)$$

e quindi

$$| D_y^k u_j(x, y) | = \left| \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{R^r} \Delta_x^{m(M-1-j)/2n} D_y^k G_{jk}(x - \xi, y) f_j(\xi) d\xi \right| <$$

$$< C \Sigma \int_{R^r} |D_y^k G_{jk}(x - \xi, y)| |D_\xi^{m(M-1-j)/n} f_j(\xi)| d\xi,$$

intendendo con Σ una somma di un numero finito di addendi del tipo di quello scritto; poichè

$$|D_y^k G_{jk}(x - \xi, y)| < C_k \frac{y^{M-1-k} K(|x - \xi|, y)}{y^{nr/m} |H(|x - \xi|, y)|^{r+m/n}}$$

si ha

$$|D_y^k u_j(x, y)|^p < C y^{p(M-1-k)} \Sigma \int_{R^r} \frac{|D_\xi^{m(M-1-j)/n} f_j(\xi)|^p}{y^{nr/m} |H(|x - \xi|, y)|^{r+m/n}} d\xi \cdot \\ \cdot \left(\int_{R^r} \frac{|K(|x - \xi|, y)|^{p/(p-1)}}{y^{nr/m} |H(|x - \xi|, y)|^{r+m/n}} d\xi \right)^{p-1}$$

onde

$$\|D_y^k u_j(x, y)\|_{L_p(R^r)}^p < C y^{p(M-1-k)} \|D_x^{m(M-1-j)/n} f_j(x)\|_{L_p(R^r)}^p$$

e quindi

$$(15) \quad \lim_{y \rightarrow 0+} \|D_y^k u_j(x, y)\|_{L_p(R^r)} = 0, \quad j < k < M-1.$$

D'altra parte se $\varphi(x) \in C_0^\infty$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \int_{R^r} D_y^{M-1} G_j(x - \xi, y) \varphi(\xi) d\xi = 0$$

onde, approssimando $D_x^{m(M-1-j)/n} f_j(x)$ con funzioni di classe C_0^∞ nella metrica $L_p(R^r)$, si ottiene, con un ragionamento analogo a quello fatto sopra,

$$(15') \quad \lim_{y \rightarrow 0+} \|D_y^{M-1} u_j(x, y)\|_{L_p(R^r)} = 0.$$

Supponiamo ora $j < k \leq M-1$ e $m(M-1-j)/n$ non intero. Poniamo $m(M-1-j)/2 = nl + \lambda$, $0 < \lambda < n$ e

$$D_y^k G_{jk}^*(x - \xi, y) = \int_{R^r} e^{-i(x-\xi, s)} \frac{1}{|s|^{2l+2}} \frac{D_y^k V_j(s, y)}{V(s)} ds$$

onde

$$(16) \quad D_y^k G_j = (-1)^{l+1} \Delta_x^{l+1} D_y^k G_{jk}^*.$$

$2\lambda/n$ è non intero; se $0 < 2\lambda/n < 1$ è $2l = [m(M-1-j)/n]$ e in questo caso si può scrivere

$$\begin{aligned} |D_y^k u_j(x, y)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{R^r} \Delta_x D_y^k G_{jk}^*(x - \xi, y) \Delta_\xi^l f_j(\xi) d\xi \right| < \\ &< C \sum \sum_{h=1}^r \int_{R^r} \left| \frac{\partial}{\partial x_h} D_x D_y^k G_{jk}^*(x - \xi, y) \right| |D_\xi^{2l} f_j(\xi) - \\ &- D_\xi^{2l} f_j(\xi_1, \dots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \dots, \xi_r)| d\xi \end{aligned}$$

poichè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_h} D_x D_y^k G_{jk}^*(x - \xi, y) d\xi_h = 0.$$

D'altra parte

$$|D_x^2 D_y^k G_{jk}^*(x - \xi, y)| < C_k \frac{y^{2ln/m-k+j} K(|x - \xi|, y)}{y^{nr/m} |H(|x - \xi|, y)|^{r+m(M-j)/n-2l}}$$

onde

$$\begin{aligned} |D_y^k u_j(x, y)|^p &< C y^{p(M-1-k)} \sum_{h=1}^r \sum_{t \neq h}^r \cdot \\ &\cdot \int_{R^r} \frac{|D_\xi^{2l} f_j(\xi) - D_\xi^{2l} f_j(\xi_1, \dots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \dots, \xi_r)|^p}{|x_h - \xi_h|^{1+p(m(M-1-j)/n-2l)}} \cdot \\ &\cdot \frac{d\xi}{y^{n(r-1)/m} \left\{ H \left(\sqrt{\sum_{t=1}^r (x_t - \xi_t)^2}, y \right) \right\}^{r-1+m/n}} \cdot \\ &\cdot \left(\int_{R^r} \left(\frac{|x_h - \xi_h|}{y^{n/m}} \right)^{p(1/p+m(M-1-j)/n-2l)(p-1)} \right). \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{|K(|x - \xi|, y)|^{p(p-1)}}{|H(|x - \xi|, y)|^{r-1+m|n+(1+m(M-1-j))/n-2l)p|(p-1)}} \frac{d\xi}{y^{nr|m}})^{p-1}$$

Perciò

$$\|D_y^k u_j(x, y)\|_{L_p(R^r)}^p < C' y^{p(M-1-k)} \sum_{h=1}^r \sum_{h=1}^r .$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx_h \int_{R^r} \frac{|D_{\xi}^{2l} f_j(\xi) - D_{\xi}^{2l} f_j(\xi_1, \dots, \xi_{h-1}, x_h, \xi_{h+1}, \dots, \xi_r)|^p}{|x_h - \xi_h|^{1+p(m(M-1-j)|n-2l)}} d\xi .$$

$$\cdot \int_{R^{r-1}} \frac{dx_1 \dots dx_{h-1} dx_{h+1} \dots dx_r}{y^{n(r-1)|m}} \left\{ H\left(\sqrt{\sum_{\substack{t=1 \\ t \neq h}}^r (x_t - \xi_t)^2}, y\right) \right\}^{r-1+m|n} <$$

$$< C y^{p(M-1-k)} \|D_x^{2l} f_j(x)\|_{W_p^{m(M-1-j)|n-2l}(R^r)}^p .$$

Di qui seguono nuovamente le (15) e (15').

Infine se è $1 < 2\lambda/n < 2$ riesce $2l+1 = [m(M-1-j)/n]$; analogamente al caso ora esaminato si ha

$$|D_y^k u_j(x, y)| < C \sum_{h=1}^r \sum_{h=1}^r \left| \int_{R^r} \frac{\partial}{\partial x_h} D_y^k G_{jk}^*(x - \xi, y) D_{\xi}^{2l+1} f_j(\xi) d\xi \right| ;$$

procedendo come sopra si arriva al medesimo risultato.

II. Se per $y > 0$ è $L(u) = 0$; per ogni $y > 0$ è $D_y^j u(x, y) \in W_p^{m(M-1-j)/n}(R^r)$ e $\|D_y^j u(x, y)\|_{L_p(R^r)} \rightarrow 0$ per $y \rightarrow 0+$, $0 \leq j \leq M-1$; se $\|u(x, y)\|_{L_p(R^r)} = O(y^{M-1})$ per $y \rightarrow +\infty$; allora $u(x, y) \equiv 0$.

Sia $U(x - \xi, y - \eta)$ soluzione fondamentale relativa all'operatore L ; fissato un numero $\rho > 0$, poniamoci nel semipiano $y > \rho^{m|n}$. Poniamo $\delta(x - \xi, y - \eta) = (|x - \xi|^2 + |y - \eta|^{2m|n|})^{1/2}$ e indichiamo con $e(x - \xi, y - \eta)$ una funzione tale che $e(x - \xi, y - \eta) \in C_0^\infty$, $e = 1$ per $\delta(x - \xi, y - \eta) \leq \rho/2$, $e = 0$ per $\delta(x - \xi, y - \eta) \geq \rho$, $0 < e < 1$ per $\rho/2 < \delta(x - \xi, y - \eta) < \rho$. Indicando con L^* l'aggiunto di L si ha

$$u(x, y) = \int_{\rho/2 \leq \delta(x - \xi, y - \eta) \leq \rho} u(\xi, \eta) L^*(U(x - \xi, y - \eta) e(x - \xi, y - \eta)) d\xi d\eta$$

da cui, sostituendo u con $D_x^h D_y^k u$,

$$|D_x^h D_y^k u(x, y)| < \left(\int_{\delta(x-\xi, y-\eta) \leq \rho} |D_x^h D_y^k u(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\rho/2 \leq \delta(x-\xi, y-\eta) \leq \rho} |L^*(U(x-\xi, y-\eta) e(x-\xi, y-\eta))|^{p(p-1)} d\xi d\eta \right)^{(p-1)/p}$$

onde

$$|D_x^h D_y^k u(x, y)| < C(\rho) \sup_{|y-\eta| \leq \rho^{m/n}} \left(\int_{R^r} |D_x^h D_y^k u(\xi, \eta)|^p d\xi \right)^{1/p}$$

ove $C(\rho)$ è una costante dipendente da ρ che non interessa esplicitare. Si ha anche

$$|u(x, y)| < C(\rho) \sup_{|y-\eta| \leq \rho^{m/n}} \|u(x, \eta)\|_{L_p(R^r)} < C'(\rho) y^{M-1}$$

per $y \rightarrow +\infty$. Poichè l'equazione (1) è ipoellittica riesce $u(x, y) \in C^\infty$ per $y \geq \rho^{m/n}$; è $|u(x, y)| = O(|x|^2 + y^{2n|m| m(M-1)/2n})$ per $|x|^2 + y^{2n|m|} \rightarrow +\infty$. Per il teorema di unicità e per l'ipotesi che $D_y^j u(x, y) \in W_p^{m(M-1-j)|n|}(R^r)$ per $y > 0$, la $u(x, y)$ si può, per $y > \varepsilon > 0$, rappresentare mediante la formola

$$u(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{R^r} G_j(x - \xi, y - \varepsilon) D_y^j u(\xi, \varepsilon) d\xi.$$

L'ulteriore ipotesi che $\|D_y^j u(x, y)\|_{L_p(R^r)} \rightarrow 0$ per $y \rightarrow 0 +$ assicura che $u(x, y) \equiv 0$.

Proviamo ora che:

III. - Nelle ipotesi di I. se $nh + mk = m(M-1)$ con h intero non negativo e k non negativo intero oppure no, se $1 < p < +\infty$, $p(k - [k]) > 1$ per tutti i k non interi per cui $nh + mk = m(M-1)$, allora esiste una costante positiva C tale che, essendo $u(x, y)$ la funzione (7), riesce

$$\|D_x^h D_y^k u(x, y)\|_{L_p(R^r)} < C \left(\sum_{j=0}^{M-1} \|D^{m(M-1-j)|n|} f_j(x)\|_{L_p(R^r)} + \sum_{j=0}^{M-1} \|D_x^{[m(M-1-j)|n|]} f_j(x)\|_{W_p^{m(M-1-j)|n|-[m(M-1-j)|n|]}(R^r)} \right)$$

se h e k sono interi,

$$\left(\int_{R^r} \frac{|D_x^h D_y^{[k]} u(x, y+t) - D_x^h D_y^{[k]} u(x, y)|^p}{t^{p(k-[k])}} dx \right)^{1/p} < \\ < C \left(\sum'_{j=0}^{M-1} \| D_x^{m(M-1-j)/n} f_j(x) \|_{L_p(R^r)} + \right. \\ \left. + \sum''_{j=0}^{M-1} \| D_x^{[m(M-1-j)/n]} f_j(x) \|_{W_p^{m(M-1-j)/n - [m(M-1-j)/n]}(R^r)} \right)$$

se k è non intero, essendo le somme Σ' e Σ'' estese a quei valori di j per cui $m(M-1-j)/n$ è rispettivamente intero oppure no ($t > 0$).

Se $nh + mk = m(M-1)$, k intero ed $m(M-1-j)/n$ intero, allora si ha

$$\| D_x^h D_y^k u_j(x, y) \|_{L_p(R^r)} < C \| D_x^{m(M-1-j)/n} f_j(x) \|_{L_p(R^r)};$$

se $nh + mk = m(M-1)$, k intero ed $m(M-1-j)/n$ non intero, si ha

$$\| D_x^h D_y^k u_j(x, y) \|_{L_p(R^r)} < \\ < C \| D_x^{[m(M-1-j)/n]} f_j(x) \|_{W_p^{m(M-1-j)/n - [m(M-1-j)/n]}(R^r)};$$

se $nh + mk = (M-1)$, k non intero, si maggiore nel modo indicato, rispettivamente per $m(M-1-j)/n$ intero ed $m(M-1-j)/n$ non intero, la quantità

$$\left(\int_{R^r} \frac{|D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y+t) - D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y)|^p}{t^{p(k-[k])}} dx \right)^{1/p}.$$

Proviamo l'affermazione nel caso più complicato che k ed $m(M-1-j)/n$ non siano interi. Ci limitiamo a supporre $k \leq j$; nel caso di $k > j$ si possono fare ragionamenti analoghi utilizzando relazioni del tipo (14) e (16).

Posto per comodità $m(M-1-j)/n = \alpha$ si ha

$$| D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y+t) - D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y) | = \\ = \left| \int_0^t \frac{ds}{(2\pi)^r} \int_{R^r} D_x^{h-[k]} D_y^{[k]+1} G_j(x-\xi, y+s) D_\xi^{[k]} f_j(\xi) d\xi \right|$$

e poichè $h - [\alpha] > 1$ (essendo $m(M - 1 - j)/n$ non intero necessariamente è $k < j$), se $D_x^{h-[\alpha]} = \frac{\partial}{\partial x_1} D_x^{h-1-[\alpha]}$, come si può sempre supporre,

$$= \left| \int_0^t \frac{ds}{(2\pi)^r} \int_{R^r} D_x^{h-[\alpha]} D_y^{[k]+1} G_j(x - \xi, y + s) [D_\xi^{[\alpha]} f_j(\xi) - D_\xi^{[\alpha]} f_j(x_1, \xi_2, \dots, \xi_r)] d\xi \right| <$$

$$< C \int_0^t \frac{ds}{(y + s)^{1-k+[k]}}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \int_{R^r} \frac{|D_\xi^{[\alpha]} f_j(\xi) - D_\xi^{[\alpha]} f_j(x_1, \xi_2, \dots, \xi_r)|}{|x_1 - \xi_1|^{(1+p(\alpha-[\alpha]))p} (y + s)^{n(r-1)mp} \left\{ H \left(\sqrt{\sum_{l=2}^r (x_l - \xi_l)^2}, y + s \right) \right\}^{(r-1+m|n|)p}} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{|x_1 - \xi_1|}{(y + s)^{n|m|}} \right)^{(1+p(\alpha-[\alpha]))p} \cdot \\ & \cdot \frac{K(|x - \xi|, y + s)}{(y + s)^{nr(p-1)mp} \{ H(|x - \xi|, y + s) \}^{(r+m|n|)(p-1)p+h+(1+p(\alpha-[\alpha]))p}} d\xi \end{aligned}$$

da cui

$$|D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y + t) - D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y)|^p < C \left[\int_0^t \frac{ds}{(y + s)^{1-k+[k]}} \right.$$

$$\left. \cdot \left(\int_{R^r} \frac{|D_\xi^{[\alpha]} f_j(\xi) - D_\xi^{[\alpha]} f_j(x_1, \xi_2, \dots, \xi_r)|^p}{|x_1 - \xi_1|^{1+p(\alpha-[\alpha])} (y + s)^{n(r-1)m} \left\{ H \left(\sqrt{\sum_{l=2}^r (x_l - \xi_l)^2}, y + s \right) \right\}^{r-1+m|n|}} d\xi \right)^{1/p} \right]^p <$$

$$< C' \int_0^t ds.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \int_{R^r} \frac{|D_\xi^{[\alpha]} f_j(\xi) - D_\xi^{[\alpha]} f_j(x_1, \xi_2, \dots, \xi_r)|^p}{|x_1 - \xi_1|^{1+p(\alpha-[\alpha])} (y + s)^{n(r-1)m} \left\{ H \left(\sqrt{\sum_{l=2}^r (x_l - \xi_l)^2}, y + s \right) \right\}^{r-1+m|n|}} d\xi \cdot \\ & \cdot \left(\int_0^t \frac{ds}{(y + s)^{p(1-k+[k])/(p-1)}} \right)^{p-1} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 & \int_{R^r} \frac{|D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y+t) - D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y)|^p}{t^{p(k-[k])}} dx < \\
 & < \frac{C}{t^{p(k-[k])}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdot \\
 & \cdot \int_{R^{r-1}} \frac{|D_\xi^{[\alpha]} f_j(\xi) - D_\xi^{[\alpha]} f_j(x_1, \xi_2, \dots, \xi_r)|^p}{|x_1 - \xi_1|^{1+p(\alpha-[\alpha])}} d\xi_2 \dots d\xi_r \cdot \\
 & \cdot \int_0^t ds \int_{R^{r-1}} \frac{dx_2 \dots dx_r}{(y+s)^{n(r-1)|m|} \left\{ H \left(\sqrt{\sum_{l=2}^r (x_l - \xi_l)^2}, y+s \right) \right\}^{r-1+m|n|}} \cdot \\
 & \cdot \left(\int_0^t \frac{ds}{(y+s)^{p(1-k+[k])/(p-1)}} \right)^{p-1} < C' \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdot \\
 & \cdot \int_{R^{r-1}} \frac{|D_\xi^{[\alpha]} f_j(\xi) - D_\xi^{[\alpha]} f_j(x_1, \xi_2, \dots, \xi_r)|^p}{|x_1 - \xi_1|^{1+p(\alpha-[\alpha])}} d\xi_2 \dots d\xi_r \cdot \\
 & \cdot \frac{t}{t^{p(k-[k])}} \left(\int_0^t \frac{ds}{(y+s)^{p(1-k+[k])/(p-1)}} \right)^{p-1}.
 \end{aligned}$$

L'ultimo integrale si maggiora ponendò 0 al posto di y (poichè è $p(k-[k]) > 1$); quindi

$$\frac{t}{t^{p(k-[k])}} \left(\int_0^t \frac{ds}{(y+s)^{p(1-k+[k])/(p-1)}} \right)^{p-1} < \left(\frac{p-1}{p(k-[k])-1} \right)^{p-1}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 & \int_{R^r} \frac{|D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y+t) - D_x^h D_y^{[k]} u_j(x, y)|^p}{t^{p(k-[k])}} dx < \\
 & < C \| D_x^{[m(M-1-j)|n]} f_j(x) \|_{W_p^{m(M-1-j)|n-[m(M-1-j)|n]}(R^r)}^p.
 \end{aligned}$$