Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Determinazione di connessioni prospettive.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.2, p. 101–107.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_101_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Determinazione di connessioni prospettive.

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna) (*) (**)

Sunto. - *Si riferiscono i risultati d'una ricerca nella quale si determinano le connessioni prospettive (in una varietà d'iperpiani) soddisfacenti a condizioni prefissate.*

Summary. - *Some results on the determination of perspective connexions satisfying to given conditions are related.*

1. In questa Nota espongo i risultati di una ricerca su certe connessioni proiettive in una famiglia d'iperpiani d'uno spazio proiettivo; le dimostrazioni, qui sempre omesse, appariranno, insieme a maggiori dettagli sugli argomenti trattati, in un lavoro di prossima pubblicazione negli « Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna ».

Nel seguito, la varietà descritta da un elemento a, A, ... si indicherà con $\{ a \}$, $\{ A \}$, ... rispettivamente.

Consideriamo un insieme d'iperpiani d'uno spazio proiettivo P_n $(n > 1)$, i quali, nello spazio duale Π_n, costituiscano una varietà rappresentabile localmente, in forma parametrica, con funzioni differenziabili di classe C^4; sovente in ciascun iperpiano $\boldsymbol{a}$ si fisserà un punto A (elemento principale). Associando a ciascun $\boldsymbol{a}$ un punto $B \notin \boldsymbol{a}$, detto *polo*, si ha allora in $\{ \boldsymbol{a} \}$ una connessione proiettiva ∇^n, così definita: quando $\boldsymbol{a}$ descrive una varietà $\gamma \infty^1$, per ogni posizione $\boldsymbol{a}_0 \in \gamma$ la tangente alla curva descritta da un punto $M \in \boldsymbol{a}$, nella posizione M_0 relativa ad $\boldsymbol{a}_0$, passa per il polo B_0 associato ad $\boldsymbol{a}_0$ (cioè, con linguaggio infinitesimale, ∇^n si ha proiettando da B su $\boldsymbol{a}$ gli iperpiani infinitamente vicini) ([1]).

Seguendo E. BOMPIANI ed ENEA BORTOLOTTI, tali connessioni si dicono prospettive. Esse sono state per lo più studiate nella ipotesi che gli $\boldsymbol{a}$ siano gli iperpiani tangenti ad una ipersuper-superficie nei rispettivi A, e che B sia intrinsecamente legato

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 28 febbraio 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

([1]) Per la bibliografia, si veda ENEA BORTOLOTTI, *Spazi a connessione proiettiva*, (Cremonese, Roma, 1941); J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus* (Springer, Berlin, 1954).

ad $\{\boldsymbol{a}\}$. In questa ricerca invece, oltre alle ordinarie ipotesi di differenziabilità, non si è fatta alcuna ipotesi né sulla natura o sulla dimensione di $\{\boldsymbol{a}\}$, $\{A\}$, $\{B\}$ (²), né sulle corrispondenze fra tali varietà; può accadere, ad esempio, che ad un $\boldsymbol{a}$ siano associati infiniti A, o infiniti B; allora $\boldsymbol{a}$ andrà pensato come sostegno di infinite fibre. Dalle costruzioni geometriche dei vari tipi più sotto elencati apparirà chiaramente quando ciò si presenta.

Conviene tener separato il caso $n > 2$ dal caso $n = 2$.

2. Ho dimostrato che le connessioni senza torsione (∇_T^n) sono, per $n \geq 3$, le seguenti:

1) *$\{B\}$ è una superficie; a ciascun B si associano, come punti A, i punti d'una curva (o eventualmente un solo punto) del piano tangente a $\{B\}$ in B, in modo che, quando A descrive una curva integrale della varietà anolonoma ottenuta associando A ed $\boldsymbol{a}$, B descriva una curva la cui tangente passa per A.*

2) *$\{A\}$ è una curva, ed i B relativi ad A descrivono una retta per A* (³).

3) *Gli $\boldsymbol{a}$ sono tangenti ad ∞^1 $V_h (1 \leq h \leq n-1)$ nei rispettivi punti A; si ha inoltre un B per ogni V_h.*

4) *$\{A\}$ e $\{B\}$ sono due curve, riferite biunivocamente* (⁴).

5) *$\{B\}$ è una curva, e gli A relativi ad ogni B stanno sulla tangente a $\{B\}$ in B.*

6) *Gli $\boldsymbol{a}$ sono tangenti ad una $V_k (1 \leq k \leq n-1)$ nei rispettivi punti A, o sono iperpiani d'una stella di centro A.*

7) *B è fisso.*

Osservazione. – Fra le ∇_T^n del tipo 1), particolare interesse presentano quelle per cui a ciascun B si associa un solo A; allora, o si ricade in uno dei tipi successivi, oppure si ha questa ∇_T^n:

(²) Tali connessioni rientrano quindi in quelle che sono dette, a volta, spazi di König.

(³) Quando un elemento di ∇^n (qui $\boldsymbol{a}$) non è nominato, s'intende che è arbitrario (purchè $A \in \boldsymbol{a} \not\ni B$).

(⁴) Qui e nel seguito, quando si parla di corrispondenze biunivoche (od univoche), sarà sempre sottinteso «localmente» (quindi, ad es., nel tipo 3), si ha un B per ogni V_h in un'opportuna regione di $\{V_h\}$).

$\{B\}$ ed $\{A\}$ siano due superficie, e su $\{B\}$ si fissi un sistema ∞^1 di curve (γ); a B si associ, come A, l'intersezione di $\{A\}$ con la tangente in B alla curva γ per B. Come $\boldsymbol{a}$ si consideri un arbitrario P_{n-1} contenente la tangente alla curva corrispondente.

3. Indichiamo con ∇_M le connessioni proiettive (necessariamente senza torsione) per le quali l'omografia Ω associata ad un ciclo infinitesimo della base (5) è un'omologia di centro A (6), con ∇_N quelle per Ω è un'omologia speciale di centro A (7), e con ∇_I le connessioni integrabili (per le quali l'omografia associata ad un ciclo omotopo a zero è l'identità) (8); e con $\overset{n}{\nabla}_M$, $\overset{n}{\nabla}_N$, $\overset{n}{\nabla}_I$ le ∇^n dei tipi anzidetti.

Ho dimostrato che:

I. *Le* $\overset{n}{\nabla}_M$ $(n \geq 3)$, *non necessariamente* $\overset{n}{\nabla}_N$, *sono le seguenti:*

1) $\{B\}$ *è una curva non rettilinea, e a ciascun* B *si associano, come* A, *punti della tangente ivi a* $\{B\}$.

2) A *e* B *descrivono la medesima retta, e sono riferiti in tutti i modi possibili.*

3) *Si hanno* ∞^1 $\boldsymbol{a}$, *ciascuno contenente uno o* ∞^1 A; *i* B *relativi ad ogni* $\boldsymbol{a}$ *descrivono una curva, la cui tangente in* B *passa per* A.

4) *In* P_3 *si assuma, come* $\{\boldsymbol{a}\}$, *un inviluppo* ∞^2, *e, come* $\{B\}$, *una superficie, riferiti biunivocamente in modo che rette corrispondenti nella proiettività indotta fra gl'intorni del 1° ordine siano complanari;* A *è il punto di contatto di* $\boldsymbol{a}$ *con il relativo inviluppo.*

(5) Per il modo in cui va preso detto ciclo, cfr. E. Bortolotti, op. cit. in (1), p. 148; E. Cartan, *Sur le variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, « Ann. Ec. Norm. Sup. », (s. 3): t. **40**, pp. 325-412, (1923); t. **41**, pp. 1-25, (1924); t. **42**, pp. 17-88 (1925): v. n. 34.

(6) Con altre parole, si può dire che tutte le rette per A sono unite. Per queste connessioni, cfr. E. Cartan, *Sur les varietés à connexion projective*, « Bull. Soc. Math. France », t. 52, pp. 205-241 (1924); E. Bortolotti, op. cit. in (1), p. 160 e segg.

(7) Sono cioè uniti in Ω sia A che i punti del suo intorno del 1° ordine.

(8) Si dimostra che se l'immagine tangenziale di un sistema di curve uscenti da A (che riempiano una regione di $\{A\}$) in una fibra ha dimensione ≥ 3, e se in Ω vi sono m rette indipendenti unite ($m =$ dimensione delle fibre), ∇ è integrabile: cfr. risultati analoghi nelle op. cit. in (6).

II. *Le* ∇_N^n $(n \geq 3)$, *non necessariamente* ∇_I^n, *sono le seguenti*:

1) $\{A\}$ *e* $\{B\}$ *sono due curve, riferite biunivocamente in modo che la tangente a* $\{B\}$ *in* B *passi per* A.

2) A *è fisso, e* B *descrive una retta per* A.

3) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *sono* ∞^1, *a ciascuno essendo associati* ∞^1 A *contenuti nel* P_{n-2} *caratteristico; a ciascun* $\boldsymbol{a}$ *si associano, come* B, *i punti d'una curva riferiti agli* A *in modo che la tangente a* $\{B\}$ *in* B *passi per* A.

4) $\{A\}$ *è una curva d'un* P_k $(1 \leq k \leq n-2)$, *e gli* $\boldsymbol{a}$ *sono* ∞^1 P_{n-1} *per* P_k, *associati agli* A *in tutti i modi possibili. Per ogni* $\boldsymbol{a}$, *i* B *relativi descrivono una curva la cui tangente in* B *passa per* A.

5) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *sono* ∞^1 P_{n-1}; *ciascuno contiene un solo* A *ed è ivi tangente ad* $\{A\}$. *I* B *relativi ad* $\boldsymbol{a}$ *descrivono una retta per* A.

6) $\{\boldsymbol{a}\}$ *è un inviluppo conico* ∞^1, $\{B\}$ *una* V_2*-cono, entrambi di vertice* A; *ad ogni* $\boldsymbol{a}$ *si associano i* B *d'una generatrice.*

III. *Le* ∇_I^n *sono le seguenti:*

1) B *è fisso.*

2) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *sono* ∞^1, *e si ha un* B *per ogni* $\boldsymbol{a}$.

3) $\boldsymbol{a}$ *è fisso.*

Si constata che per i tipi 1) e 3) di ∇_I^n il gruppo d'olonomia G si riduce all'identità, mentre nel tipo 2) G è omomorfo al gruppo fondamentale della base (si possono dare esempi in cui G consiste dell'identità, come pure esempi in cui ciò non accade).

4. Una connessione proiettiva tale che, allorchè $\boldsymbol{a}$ si porta in $\boldsymbol{a}'$, A si porti nell'elemento principale relativo ad $\boldsymbol{a}'$, si dirà centro proiettiva (∇_C). Le connessioni ∇_C prospettive (∇_C^n) sono le seguenti:

1) A *descrive una curva, ed i* B *da associare a ciascun* A *si trovano sulla tangente ivi ad* $\{A\}$.

2) A *e* B *descrivono la medesima retta, e sono riferiti in tutti i modi possibili* (è un caso particolare del precedente).

3) A *è fisso.*

5. Se in ogni fibra F di uno spazio a connessione proiettiva ∇ esiste un iperpiano b_F, il quale, allorchè F si porta in $\overline{F}$, si porta in $b_{\bar{F}}$, si avrà (assunto b_F come iperpiano improprio di F) che ∇ è una connessione affine ∇_A [9]. Sui vettori delle fibre F ∇_A induce una connessione lineare: quando questa è integrabile, ∇_A è a curvatura nulla (∇_{AK}). Sulle direzioni non orientate delle F ∇_A induce una connessione proiettiva: quando questa è integrabile, ∇_A è a parallelismo assoluto locale (∇_{AP}).

Detto $\tilde{F}$ lo spazio duale di F, indichiamo con $\tilde{\nabla}$ la connessione indotta da ∇ in $\{\tilde{F}\}$. Come elemento principale in $\tilde{F}$ assumiamo b_F. Si constata allora che:

Una ∇_A *è una* ∇ *la cui* $\tilde{\nabla}$ *sia* ∇_C, *e viceversa.*

Una ∇_{AP} *è una* ∇ *la cui* $\tilde{\nabla}$ *sia* ∇_C *e* ∇_M, *e viceversa.*

Una ∇_{AK} *è una* ∇ *la cui* $\tilde{\nabla}$ *sia* ∇_C *e* ∇_N, *e viceversa.*

Una ∇_{AI} (connessione affine integrabile) *è una* ∇ *la cui* $\tilde{\nabla}$ *sia* ∇_C *e* ∇_I, *e viceversa.*

Nelle ∇^n affini ($\overset{n}{\nabla}_A$), indichiamo con $\boldsymbol{a}^0$ il P_{n-1} congiungente B con il P_{n-2} improprio di $\boldsymbol{a}$. Allora ogni $\overset{n}{\nabla}_A$ è individuata da una certa configurazione $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^0, B\}$: eseguendo, in tale configurazione, le sostituzioni

$$\boldsymbol{a} \rightarrow B, \quad \boldsymbol{a}^0 \rightarrow A, \quad B \rightarrow \boldsymbol{a},$$

si ha una configurazione che dà una $\overset{n}{\nabla}_C$. Se la $\overset{n}{\nabla}_A$ è una $\overset{n}{\nabla}_{AP}$, o $\overset{n}{\nabla}_{AK}$, o $\overset{n}{\nabla}_{AI}$, la $\overset{n}{\nabla}_C$ è pure una $\overset{n}{\nabla}_M$, $\overset{n}{\nabla}_N$, $\overset{n}{\nabla}_I$ rispettivamente; e viceversa.

Ho dimostrato, facendo uso di questa osservazione, che:

I. *Le* $\overset{n}{\nabla}_A$ *sono le seguenti:*

1) *Gli* $\boldsymbol{a}^0$ *formano un inviluppo* ∞^1, *e gli spazi impropri* (degli $\boldsymbol{a}$) *ne sono i* P_{n-2} *caratteristici;*

2) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *formano un fascio improprio,* cioè hanno tutti il medesimo P_{n-2} improprio (è un caso particolare del precedente);

3) $\boldsymbol{a}^0$ *è fisso* (quindi lo spazio ambiente è un spazio affine, ed iperpiani infinitamente vicini sono riferiti per proiezione parallela).

[9] Usiamo il termine «connessione affine» nel senso di E. Cartan, op. cit. in [5] (prescindendo da relazioni fra le dimensioni della base e delle fibre); cfr. A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie* (Cremonese, Roma, 1955), p. 88 e segg.

II. *Le* ∇^n_{AP} $(n \geq 3)$, *non necessariamente* ∇^n_{AI}, *sono le seguenti:*

1) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *costituiscono un fascio improprio.*

2) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *costituiscono* ∞^1 *fasci impropri, tali che lo spazio tangente ad* $\{[\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0]\}$ *lungo ogni* $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0]$ *sia un* P_{n-1}. *Per tutti gli* $\boldsymbol{a}$ *d'un medesimo fascio improprio si assuma, come polo, uno stesso* B *nel* P_{n-1} *relativo al fascio.*

III. *Le* ∇^n_{AK} $(n \geq 3)$, *non necessariamente* ∇^n_{AI}, *sono le seguenti:*

1) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *costituiscono un fascio improprio; i poli relativi ad ogni* $\boldsymbol{a}$ *variano in un iperpiano del medesimo fascio.*

2) *In uno spazio affine, si considerino* ∞^1 *fasci impropri, e, per ogni fascio, un polo improprio.*

IV. *Le* ∇^n_{AI} *sono le seguenti:*

1) *In uno spazio affine, si assuma come polo un punto improprio fisso.*

2) *Si hanno* ∞^1 $\boldsymbol{a}$, *ed un polo per ciascuno di essi;* $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0]$ *è fisso, oppure descrive un sistema* ∞^1, *ed, in questo caso, lo spazio tangente ad* $\{[\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0]\}$ *lungo* $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0]$ *è* $\boldsymbol{a}^0$.

3) $\boldsymbol{a}$ *ed* $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^0]$ *sono fissi.*

Osservazione. – Le ∇^n_{AP} che siano pure ∇^n_T sono date, fra le ∇^n_{AP} sopra elencate, dalle seguenti condizioni ulteriori:

per il 1° tipo: *per ogni* $\boldsymbol{a}$, B *descrive una curva la cui tangente passa per* A.

per il 2° tipo: *come* A *in ciascun* $\boldsymbol{a}$, *si assuma l'intersezione con la tangente a* $\{B\}$ *in* B.

6. Per quanto riguarda il caso $n = 2$, è subito visto, anzitutto, che ogni ∇^2_T è pure ∇^2_M. Ho dimostrato poi che:

Le ∇^2_T *sono le seguenti:*

1) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *sono tangenti ad una curva nei rispettivi* A; *oppure sono rette del fascio* A.

2) $\{A\}$ *è una curva; per ogni* A, B *descrive una retta per* A, *o resta fisso.*

3) *Nel piano, è data un'arbitraria corrispondenza* $B \rightarrow A$;

come $\boldsymbol{a}$, *si assuma la tangente alla curva trasformata della curva principale* (10) *del piano* $\{B\}$ *passante per* B.

4) $\{B\}$ *è una curva; ad ogni* B *si associano, come* A, *punti della tangente a* $\{B\}$ *in* B.

5) *Dato un sistema* ∞^1 *di curve, ad ogni* A *si associ come* $\boldsymbol{a}$ *la tangente ivi alla curva passante per* A. *Si fissi un* B *per ogni curva.*

6) B *è fisso.*

Le $\overset{2}{\nabla}_N$, *non necessariamente* $\overset{2}{\nabla}_I$, *sono:*

1) *Si consideri un'arbitraria corrispondenza dualistica parabolica* (11) $B \to \boldsymbol{a}$, *e come* A *si assuma il punto caratteristico dell'inviluppo canonico cui appartiene* $\boldsymbol{a}$.

2) *Come* $\{A\}$, $\{B\}$ *si assumano due curve, riferite biunivocamente in modo che la tangente a* $\{B\}$ *in* B *passi per* A.

3) *Gli* $\boldsymbol{a}$ *costituiscono un inviluppo* ∞^1, *e gli* A *sono i relativi punti caratteristici: quando* $\boldsymbol{a}$ *resta fisso,* B *descrive una retta per* A.

7. Per quanto riguarda le $\overset{2}{\nabla}_C$ e le $\overset{2}{\nabla}_A$, oltre ai risultati dei nn. 4, 5 valevoli per n qualsiasi, si osservi che ogni $\overset{2}{\nabla}_A$ è $\overset{2}{\nabla}_{AP}$. Risulta inoltre che *le* $\overset{2}{\nabla}_{AK}$, *non necessariamente* $\overset{2}{\nabla}_{AI}$, *sono le seguenti:*

1) *Si assuma, come corrispondenza* $B \to \boldsymbol{a}$, *una corrispondenza dualistica parabolica, le cui curve canoniche siano rette tali che il punto caratteristico del relativo inviluppo sia, su ognuna di esse, l'intersezione con il relativo* $\boldsymbol{a}$, *e tale punto si assuma come punto improprio di* $\boldsymbol{a}$.

2) *Le* $\boldsymbol{a}$ *formano un fascio improprio: i poli relativi ad ogni* $\boldsymbol{a}$ *stanno su una retta del medesimo fascio.*

3) *in un piano affine, per ogni fascio improprio si ha un unico polo improprio.*

(10) Cfr. L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti*, « Boll. U. M. I. », (s. 3), v. **9**, pp. 360-366 (1954).

(11) Cfr. F. SPERANZA, *Proprietà proiettive delle trasformazioni dualistiche*, « Boll. U. M. I. », (s. 3), v. **12**, pp. 552-565 (1957).