Bollettino
Unione Matematica Italiana

Piero Bonera

Numero dei nodi delle curve sghembe razionali dotate di quaterna armonica di punti d'iperosculazione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.1, p. 9–15.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_1_9_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Numero dei nodi delle curve sghembe razionali dotate di quaterna armonica di punti d'iperosculazione (*)

Nota di PIERO BONERA (a Bologna) (**)

Sunto. - *Prendendo le mosse da una Nota precedente ed estendendo il procedimento in essa usato, si esaurisce la ricerca dei nodi delle curve nominate.*

1. La ricerca degli eventuali nodi di una curva sghemba razionale di ordine $n > 3$, dotata di quattro punti d'iperosculazione (punti con piano osculatore ad incontro n-punto) formanti gruppo armonico sulla curva, è stata oggetto d'una Nota precedente [1], nella quale il problema è stato ricondotto, con opportuna interpretazione nel piano della variabile complessa z, alla ricerca delle eventuali quaterne appartenenti (totalmente) al gruppo Gn dei vertici dell'n-gono regolare ed armoniche sulla circonferenza circoscritta (che ha il centro in $z = 0$ e raggio unitario), ossia alla ricerca delle eventuali quaterne di distinti interi positivi (non nulli):

$$(n,\ a,\ b,\ c),$$

soddisfacenti l'uguaglianza:

$$(1 \quad \omega^a \quad \omega^b \quad \omega^c) = -1, \tag{1}$$

essendo a, b, c minori di n e $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ $(i = \sqrt{-1})$.

I relativi sviluppi hanno condotto a discussioni, nelle quali giocano essenzialmente i caratteri aritmetici dell'ordine n e la seguente osservazione (pertinente alla Teoria delle equazioni algebriche):

Un'equazione algebrica in z, *se appartiene al corpo di razionalità* [1] *ed è verificata da una data radice* n*-esima primitiva dell'unità, è pur verificata da tutte le rimanenti radici omonime.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca N. 26 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R. (1962).

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 1° dicembre 1962.

(1) BONERA P., *Sui nodi delle curve gobbe razionali dotate di quaterna armonica di punti d'iperosculazione*, « Rend. Ist. Lomb. (Sc. Matematiche e Nat.) », 88, (1955).

Nella Nota cit. il procedimento accennato ha condotto (tra l'altro) al risultato che, se n è dispari, il gruppo G_n è privo di quaterne armoniche (onde la curva è priva di nodi).

D'altronde, ancora nella Nota sopra cit., s'è osservato che, se n è multiplo di 3 e di 4, il gruppo G_n contiene la seguente quaterna armonica:

$$(1,\ i,\ \omega^{n/6},\ i\omega^{n/6}), \tag{2}$$

che è stata detta di *nuovo tipo* (perchè i punti di ciascuna delle due coppie, che si separano armonicamente, non sono estremi di diametro) e s'è dimostrato, col procedimento accennato più sopra, che, se n è multiplo di 2, ma non di 3, il gruppo G_n è, invece, privo di quaterne armoniche di nuovo tipo.

Si è stati allora indotti a chiedersi se, per n multiplo di 2 e di 3, ma non di 4, esistono quaterne armoniche di nuovo tipo e se, per n multiplo di 3 e di 4, esistono quaterne armoniche di nuovo tipo distinte dalle trasformate della quaterna (2) nelle $2n$ proiettività sulla retta complessa, che mutano G_n in sè.

2. Suppongasi dunque che, per n multiplo di 2 e di 3, il gruppo G_n contenga una quaterna armonica di nuovo tipo e che (com'è lecito) il primo punto di questa sia il vertice 1 dell'n-gono regolare.

Allora dovranno coesistere la (1), che, ridotta a forma intera, puo scriversi:

$$2(\omega^a + \omega^{b+c}) - (1 + \omega^a)(\omega^b + \omega^c) = 0, \tag{3}$$

e la:

$$(1 + \omega^a)(\omega^b + \omega^c) \neq 0. \tag{4}$$

Se si scrive z in luogo di ω nella (3), questa diviene un'equazione (algebrica) in z, la quale (num. 1), appartenendo al corpo (di razionalità) [1] ed avendo la radice n-esima primitiva (dell'unità) $z = \omega$, avrà pure le radici n-esime primitive $z = \omega^p$, con $p > 1$ e primo con n.

Ordunque la (1) sussiste ancora mutando ω in ω^p, ossia la quaterna $(1, \omega^{ap}, \omega^{bp}, \omega^{cp})$ è ancora armonica, ma pure di nuovo tipo [2].

Posto ciò, suppongasi n non multiplo di 4 e pongasi $p = \frac{n}{2} + 2$, cioè $\omega^p = -\omega^2$.

Allora si prova anzitutto che a, b, c non possono esser tutti dispari.

Invero, se a, b, c fossero tutti dispari, l'eliminazione di $\omega^b + \omega^c$ dall'uguaglianza (3) e da quella dedotta da essa mutando ω in $-\omega^2$, porgerebbe:

$$(3 - \omega^a)\omega^{2(b+c)} - (1 - \omega^a)^3 \omega^{b+c} - \omega^{2a}(3\omega^a - 1) = 0,$$

donde le:

$$\omega^{b+c} = \omega^{2a}, \quad \omega^{b+c} = \frac{1 - 3\omega^a}{3 - \omega^a},$$

la prima delle quali, mercè ancora la (3), condurrebbe alle:

$$\omega^a = \omega^b = \omega^c,$$

manifestamente inaccettabili, e la seconda, per confronto colla uguaglianza dedotta da essa mutando ω in $-\omega^2$, condurrebbe alle $\omega^a = \pm 1$, pure manifestamente inaccettabili.

Si osservi, peraltro, che a, b, c non possono esser neppure tutti pari, altrimenti la quaterna $(1, \omega^a, \omega^b, \omega^c)$ apparterrebbe altresì al gruppo $G_{n/2}$, con $n/2$ dispari, contro un risultato già acquisito (num. 1).

3. Dal num. 2 risulta che dei tre interi a, b, c o due son pari e l'altro è dispari o due son dispari e l'altro è pari; non potendo, però, presentarsi la prima alternativa [3], restano da considerare la terna (a, b, c), con a pari e b, c entrambi dispari e la terna (a, b, c) con a, c (o a, b) entrambi dispari e b (o c) pari.

[2] Invero, se la quaterna armonica dedotta nel modo suddetto non fosse di nuovo tipo, dovrebbe sussistere l'uguaglianza:

$$(1 + \omega^{ap})(\omega^{bp} + \omega^{cp}) = 0,$$

la quale, ripetendo argomentazioni sopra svolte, sussisterebbe pure mutando ω^p in ω, onde sarebbe $(1 + \omega^a)(\omega^b + \omega^c) = 0$, in contrasto con la (4).

[3] Infatti, se, ad es., a, b fossero entrambi pari e c dispari, ruotando l'n-gono regolare intorno al centro fino a portare il vertice ω^c nel vertice 1, la quaterna $(1, \omega^a, \omega^b, \omega^c)$ si muterebbe in un'altra (pure armonica di nuovo tipo), in cui a, b, c sarebbero tutti dispari.

Orbene, se si considera la prima delle due terne (a, b, c), indi si elimina $\omega^a + \omega^{b+c}$ dall'uguaglianza (3) e da quella dedotta da essa mutando ω in $-\omega^2$, ed infine si divide per ω^{2c} l'uguaglianza così ottenuta, si ha:

$$(5)\quad (3\omega^{2a} + 2\omega^a + 3)\omega^{2(b-c)} + 2(1 - \omega^a)^2\omega^{b-c} + 3\omega^{2a} + 2\omega^a + 3 = 0.$$

Ora, se si elimina ω^{b-c} dall'uguaglianza (5) e da quella dedotta da essa mutando ancora ω in $-\omega^2$, indi si pone:

$$(6)\qquad \rho = \omega^a + \omega^{-a},$$

risulta l'equazione (algebrica) in ρ:

$$(7)\qquad 3\rho^4 + 2^2 \cdot 3\rho^3 - 2\rho^2 - 2^3\rho + 2^3 = 0.$$

L'equazione (7), ove si scriva $z^a + z^{-a}$ in luogo di ρ e si riduca a forma intera, diviene un'equazione (algebrica) in z, la quale (num. 1), appartenendo al corpo [1] ed avendo la radice n-esima primitiva (dell'unità) $z = \omega$, avrà pure le radici n-esime primitive $z = -\omega^2$, $z = -\omega^4$, ecc., ossia l'equazione (7), avendo la radice reale (6), avrà pure le radici reali:

$$\rho_1 = \omega^{2a} + \omega^{-2a},\quad \rho_2 = \omega^{4a} + \omega^{-4a},\ \text{ecc.}$$

Poichè, d'altra parte, l'equazione (7) non ha più di due radici reali (come può riconoscersi, ad es., col teorema di Sturm). ne segue che deve sussistere almeno una delle uguaglianze:

$$\rho = \rho_1,\quad \rho = \rho_2,\quad \rho_1 = \rho_2,$$

ossia risp.:

$$\omega^a + \omega^{-a} = \omega^{2a} + \omega^{-2a},\quad \omega^a + \omega^{-a} = \omega^{4a} + \omega^{-4a},\quad \omega^{2a} + \omega^{-2a} = \omega^{4a} + \omega^{-4a}.$$

Ma ai valori di ω^a, che soddisfanno le uguaglianze precedenti, la (6) fa corrispondere valori (reali) di ρ, che non soddisfanno la (7) e pertanto la terna (a, b, c) considerata non è accettabile.

Considerata, ora, la seconda terna (a, b, c), con a, c entrambi dispari e b pari, ad essa è applicabile (con ovvie modificazioni, ma con maggior complicazione formale) il procedimento seguito per giungere alla (7) e così risulta l'equazione (algebrica) in ρ:

$$(7')\quad 2^5\cdot 3\rho^6 - 2^4\cdot 3\cdot 7\rho^5 + 2^5\cdot 5\rho^4 + 2^2\cdot 5^2\rho^3 - 2^3\cdot 5\rho^2 + 2^4\cdot 59\rho - 3\cdot 83 = 0.$$

L'equazione (7′), essendo a coefficienti reali e presentando *una* permanenza, ha *una* radice negativa ρ_1 ed almeno una radice positiva ρ_2, che risultano risp. interne agli intervalli $-\sqrt{2} \vdash -1$ e $0 \vdash 1$, mentre essa è priva di radici (positive) interne all'intervallo $1 \vdash 2$.

Poichè, d'altra parte, delle radici reali della (7') si devono considerare, per la (6), soltanto quelle soddisfacenti la $|\rho| \leq 2$, se almeno uno dei valori ρ_1 o ρ_2 soddisfa la (6), la (7') avrà, corrispondentemente, la radice:

$$\rho'_1 = -(\omega^{4a} + \omega^{-4a}),$$

cioè:

$$\rho'_1 = -\rho_1^4 + 4\rho_1^2 - 2,$$

o la radice:

$$\rho'_2 = -(\omega^{2a} + \omega^{-2a}),$$

cioè:

$$\rho'_2 = -\rho_2^2 + 2,$$

le quali, però, risultano entrambe interne all'intervallo $1 \vdash 2$, contro un rilievo precedente.

Pertanto anche la seconda terna (a, b, c) non è accettabile.

4. – Ora suppongasi n multiplo (di **3** e) di **4** e prendasi $p = \frac{n}{2} + 1$, cioè $\omega^p = -\omega$.

Allora a, b, c non possono esser tutti dispari, altrimenti il confronto dell'uguaglianza (3) con quella dedotta da essa mutando ω in $-\omega$, condurrebbe alle $\omega^a = \omega^b = \omega^c$, manifestamente inaccettabili.

È lecito, peraltro, supporre a, b, c non tutti pari.

Invero, se a, b, c son tutti pari, detta 2^μ (con $\mu > 0$) la massima potenza di **2** comune ad n, a, b, c e posto:

$$n_1 = \frac{n}{2^\mu}, \quad a_1 = \frac{a}{2^\mu}, \quad b_1 = \frac{b}{2^\mu}, \quad c_1 = \frac{c}{2^\mu}, \quad \omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{n_1}},$$

la quaterna data potrà scriversi:

$$(1, \omega_1^{a_1}, \omega_1^{b_1}, \omega_1^{c_1})$$

e perciò essa apparterrà pure al gruppo dei vertici dell'n_1-gono regolare, ma gl'interi a_1, b_1, c_1 non saranno, però, tutti pari, giacchè l'intero n_1, per un risultato già acquisito (num. 1), deve essere pari.

Restano dunque da considerare le due terne (a, b, c), già indicate al principio del num. 3 [4], di cui, però, la prima, cioè la

[4] Cfr. [3].

terna $(a, b. c)$ con a pari e b, c entrambi dispari, non è accettabile [5].

5. – Se, ora, si considera la seconda terna (a, b, c), cioè quella con a, c entrambi dispari e b pari, indi l'uguaglianza (3) e quella da essa dedotta mutando ω in $-\omega$, una volta si sommano ed un'altra volta si sottraggono tra loro membro a membro, si ottengono (con opportune trasformazioni) risp. le uguaglianze:

$$\omega^{a-b+c} = -1 \tag{8}$$

e:

$$\left(1\ \omega^{\frac{n}{3}}\ \omega^{b+\frac{n}{6}}\ \omega^{c-a+\frac{n}{6}}\right) = -1, \tag{9}$$

nella seconda delle quali la quaterna:

$$\left(1,\ \omega^{\frac{n}{3}},\ \omega^{b+\frac{n}{6}},\ \omega^{c-a+\frac{n}{6}}\right), \tag{9'}$$

se, come si supporrà, è costituita da punti tutti distinti, appartiene (totalmente) al gruppo G_n ed è armonica di nuovo tipo [6].

Essendo $n/3$, $b+n/6$, $c-a+n/6$ tutti pari, si può procedere come al num. 4, cioè detta 2^μ (con $\mu > 0$) la massima potenza di 2 comune a n, $n/3$, $b+n/6$, $c-a+n/6$ e posto:

$$n_1 = \frac{n}{2^\mu},\quad a_1 = \frac{n}{2^\mu \cdot 3},\quad b_1 = \frac{b+\frac{n}{6}}{2^\mu},\quad c_1 = \frac{c-a+\frac{n}{6}}{2^\mu},\quad \omega_1 = \omega^{\frac{2\pi i}{n_1}} \tag{10}$$

[5] Invero, se fossero a pari e b, c entrambi dispari, l'eliminazione di $\omega^a + \omega^{b+c}$ dall'uguaglianza (3) e da quella dedotta da essa mutando ω in $-\omega$, condurrebbe subito a scrivere:

$$(1+\omega^a)(\omega^b+\omega^c) = 0,$$

in contrasto con la (4).

[6] Se la quaterna armonica (9') non fosse di nuovo tipo, dovrebbe esser:

$$(1+\omega^{n/3})(\omega^{b+n/6} + \omega^{c-a+n/6}) = 0$$

e quindi:

$$\omega^{a+b-c} = -1,$$

dal cui confronto con la (8) si dedurrebbero le $\omega^a = \pm 1$, manifestamente inaccettabili.

la quaterna (9') potrà scriversi:

$$(1,\ \omega_1^{a_1},\ \omega_1^{b_1},\ \omega_1^{c_1}),$$

ma gli interi a_1, b_1, c_1 non saranno, però, tutti pari, giacchè (num. 1) l'intero n_1 dev'essere pari, anzi (num.i 2 e 3) multiplo di **3** e di **4**.

Allora a_1, per le prime due delle (10), sarà pari e quindi b_1 e c_1, secondo precede, o saranno entrambi dispari od uno pari e l'altro dispari, in contrasto con precedenti risultati (num. 4).

Pertanto la quaterna (9'), contrariamente all'ipotesi, non può esser costituita da punti tutti distinti e perciò essa (essendo $\omega^{n/3} \neq 1$) possiede punto triplo (non quadruplo), ossia coesistono le:

$$\omega^{n/3} = \omega^{b+n/6} = \omega^{c-a+n/6},$$

donde, ricordata la (8) (ed assunti, com'è lecito, $a < n/2$, $b < 3n/4$, $|b-c| < n/2$):

$$a = \frac{n}{4},\ b = \frac{n}{6},\ c = \frac{5n}{12}.$$

Ritrovasi dunque la quaterna armonica di nuovo tipo (2).

Concludendo:

Se e soltanto se n *è multiplo di* 3 *e di* 4, *il gruppo* G_n *contiene quaterne armoniche di nuovo tipo e queste son tutte e soltanto le trasformate della quaterna* (2) *nelle* 2n *proiettività (sulla retta complessa) mutanti il gruppo* G_n *in sè.*

Dopo di ciò, dalla Nota cit. in (1) deducesi il seguente:

Teorema (*generale*). - *Una curva sghemba razionale di ordine* $n > 3$, *dotata di quattro punti d'iperosculazione formanti gruppo armonico sulla curva, possiede* $n+1$ *nodi, se* n *è multiplo di* 3 *e di* 4 (7); $n-2$ *nodi, se* n *è multiplo di* 2, *ma non di* 4 (8); $n-3$ *nodi, se* n *è multiplo di* 4, *ma non di* 3 (9).

(7) Cfr (1) num. 4, teorema (esistenziale) 1°.

(8) Cfr (7).

(9) Cfr (1). num. 6.