Bollettino Unione Matematica Italiana

S. Guerra

Osservazioni su un noto teorema di Jackson.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.1, p. 57–64.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_1_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Osservazioni su un noto teorema di Jackson

Nota di S. GUERRA (a Pisa) (*) (**)

Sunto. - *È noto il classico teorema d'approssimazione di Jackson relativo a polinomi algebrici. Esso assicura che, se* f(x) *è continua in* $[-1,1]$ (¹) *e* $\omega(\delta)$ *è il modulo di continuità della* f(x), *relativo al tratto* δ, *fissato l'intero* n, *esiste almeno un* $P_n(x)$, *di ordine non superiore ad* n, *e una costante* M *tale che*

$$| f(x) - P_n(x) | \leq M\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Questo teorema può leggersi nei trattati di teoria dell'approssimazione (²).

La letteratura sull'argomento lascia aperta, per quanto io sappia, la questione dell'ottimizzazione della costante. In recenti teoremi, dati nella bella monografia di Korovkin (³), *si trova* $M = 1 + \frac{\pi^2}{2}$ *che nell'uso pratico è poi arrotondato in* $M = 6$.

Scopo di questa breve nota è di far vedere come, utilizzando la medesima tecnica di Korovkin, si può effettivamente costruire, con l'uso dei coefficienti di Fourier della f(x), *un polinomio* $P_n(x)$ *che verifichi la disuguaglianza soprascritta con* $M = 1$ (*come è dimostrato nel teorema del n°* 3).

1. Richiamiamo per semplicità di esposizione alcune notazioni e risultati riferiti in [2].

Sia $f(x)$ una funzione continua su $[-\pi, \pi]$ e sia

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \operatorname{sen} ix)$$

la sua serie di FOURIER.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 16 febbraio 1963.

(**) Indirizzo dell'autore: Istituto Matematico dell'università di Pisa.

(¹) Usiamo la parentesi quadra per significare intervallo chiuso.

(²) Cfr. ad es. nella bibliografia (in fondo alla nota): [1] alla p. 361; [2] alla p. 84; [3] alla p. 304.

(³) Cfr. L'opera indicata in [2].

Consideriamo, con KOROVKIN, l'operatore lineare, di ordine n,

(1) $$\sigma_n(f,\ x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} \rho_i^{(n)}(a_i \cos ix + b_i \operatorname{sen} ix) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i^{(n)} \cos i(t-x) \right\} dt$$

essendo $\rho_i^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots ; i = 1, 2, \dots, n$) un'arbitraria matrice di numeri (4).

Se la funzione $f(x)$ ha periodo 2π l'operatore (1) può scriversi nella forma

(2) $$\sigma_n(f,\ x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u + x)\varphi_n(u)du$$

essendo

$$\varphi_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \rho_i^{(n)} \cos iu \ (5).$$

PROP. I° (6).

Se $\varphi_n(u) \geq 0$, $u \in [-\pi, \pi]$, vale la disuguaglianza

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | u | \varphi_n(u)du \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \rho_1^{(n)}}.$$

PROP. II° (7).

Esiste un polinomio trigonometrico pari di ordine n,

$$\varphi_n(u) = \frac{1}{2} + \rho_1^{(n)} \cos u + \dots + \rho_n^{(n)} \cos nu$$

godente delle proprietà:

a) $\varphi_n(u) \geq 0$, b) $\rho_1^{(n)} = \cos \dfrac{\pi}{n+2}$.

(4) Cfr. [2] alla p. 68.
(5) Cfr. [2] alle pp. 70 e 71.
(6) Cfr. [2] alle pp. 71 e 72.
(7) Cfr [2] alle pp. 75 e 77.

Indicheremo, con KOROVKIN, col simbolo $A_n(f, x)$ l'operatore (2) corrispondente ad un tale scelta di $\varphi_n(u)$.

2. Avvertiamo che in questo numero ci riferiremo sempre a funzioni continue col periodo $\pi/2^{r-1}$, essendo r un intero non negativo assegnato, anche se ciò non sarà esplicitamente detto.

OSSERVAZIONE I° [8]

Se per la $f(x)$ risulta

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \operatorname{sen} ix),$$

allora:

$$a_i = b_i = 0 \quad \text{per ogni} \quad i \not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2^r).$$

LEMMA I°.

Se per la f(x) *risulta*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \operatorname{sen} ix)$$

allora l'operatore (2), *di ordine* $N = 2^r n$, *relativo alla* f(x), *assume la forma*

$$\sigma_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{u}{2^r} + x\right) \varphi_n(u) du \quad [9] \tag{3}$$

essendo

$$\varphi_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos ku. \tag{4}$$

Poichè

$$a_{k2^r} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k2^r x dx = \frac{2^r}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2^r}}^{\frac{\pi}{2^r}} f(x) \cos k2^r x dx$$

(8) Ne omettiamo la facile dimostrazioue.

(9) È su questa forma assunta da σ_N, per ogni r fissato, che si fonda il teorema del n° 3.

e

$$b_{k2^r} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} k2^r x dx = \frac{2^r}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2^r}}^{\frac{\pi}{2^r}} f(x) \operatorname{sen} k2^r x dx \ (^{10})$$

risulta

$$\sigma_N(f,\ x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \mid a_{k2^r} \cos k(2^r x) + b_{k2^r} \operatorname{sen} k(2^r x) \mid =$$

$$= \frac{2^r}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2^r}}^{\frac{\pi}{2^r}} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos k(2^r(t-x)] \right\} dt$$

e quindi, posto $2^r(t-x) = u$ ([11]), e tenendo cento della pos. (4),

$$\sigma_N(f,\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{u}{2^r}+x\right)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)} \cos ku\right\} du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{u}{2^r}+x\right)\varphi_n(u)du.$$

LEMMA II°.

Se $\varphi_n(u) \geq 0,\ u \in [-\pi,\ \pi]$, *allora*

$$\mid \sigma_N(f,\ x) - f(x) \mid \leq \omega\left(\frac{1}{m}\right)\left\{ 1 + \frac{m}{2^r}\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\rho_1^{(n)}} \right\} \tag{5}$$

essendo $\omega(\delta)$ *il modulo di continuità della* f(x), *relativo al numero* $\delta > 0$, *ed* m *un intero positivo qualsiasi.*

([10]) Queste due uguaglianze seguono facilmente. Basta tener conto che la funzione continua $f(x)$ è periodica di periodo $\pi/2^{r-1}$ e osservare che l'intervallo $[-\pi,\ \pi]$ contiene 2^r intervalli ciascuno di ampiezza $\pi/2^{r-1}$.

([11]) Per la periodicità della funzione integranda, chiamiamola $\lambda(u)$, risulta

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \lambda(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u)du.$$

cfr. [2] alle pp. 70 e 71

Poichè dalla (4) riesce subito

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(u)du=1$$

si può scrivere

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_n(u)du$$

e quindi

$$\sigma_N(f,\ x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(\frac{u}{2^r}+x\right)-f(x)\right]\varphi_n(u)du.$$

Seguendo un ragionamento di KOROVKIN ([12]) si ha allora, dalle ipotesi e per note proprietà del modulo di continuità ([13]),

$$|\sigma_N(f,\ x)-f(x)|\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(\frac{u}{2^r}+x\right)-f(x)\right|\varphi_n(u)du\leq$$

$$\leq\int_{-\pi}^{\pi}\omega\left(\frac{|u|}{2^r}\right)\varphi_n(u)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega\left(\frac{m}{2^r}|u|\frac{1}{m}\right)\varphi_n(u)du\leq\omega\left(\frac{1}{m}\right)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{m}{2^r}|u|+1\right)\varphi_n(u)du=$$

$$=\omega\left(\frac{1}{m}\right)\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(u)du+\frac{m}{2^r}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u|\varphi_n(u)du\right\}$$

e quindi, per la Prop. I°, segue il Lemma II°.

([12]) Cfr. [2] alla p. 73.
([13]) Cfr. [1] alla p 60.

COROLLARIO.

Risulta

$$| A_N(f,\ x) - f(x) | < \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{2^{r+1}}\right)$$

essendo $A_N(f,\ x)$ *l'operatore* (3) *corrispondente al polinomio* $\varphi_n(u)$ *definito nella Prop.* II°.

Dalla (5), posto $m = n$, si ha infatti

$$| A_N(f,\ x) - f(x) | \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left\{1 + \frac{n}{2^r}\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{n+2}}\right\} =$$

$$= \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{n}{2^r}\pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+4}\right) \leq$$

$$\leq \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{n}{2^r}\pi\frac{\pi}{2n+4}\right) < \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{n}{2^r}\pi\frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{2^{r+1}}\right).$$

OSSERVAZIONE II°.

Se per la funzione continua $\varphi(\theta)$ risulta

$$\varphi(\theta) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{k2^r} \cos k(2^r\theta) + b_{k2^r} \operatorname{sen} k(2^r\theta) \}$$

e $\varphi(\theta)$ è pari allora

$$A_N(\varphi,\ \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} a_{k2^r} \cos k(2^r\theta). \tag{6}$$

LEMMA III°.

L'operatore (6) *può rappresentarsi, qualunque sia* r, *nella forma* $P_n(\cos 2^r\theta)$, *essendo* $P_n(x)$ *un polinomio algebrico di grado* n.

Posto

$$\cos 2^r\theta = x$$

si ha

$$\cos k(2^r\theta) = T_k(\cos 2^r\theta) = T_k(x),$$

essendo $T_k(x)$ il polinomio di TCHEBYSCHEV, di prima specie, di grado k, e allora risulta

$$A_N(\varphi,\ \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} a_{k2^r} T_k(\cos 2^r\theta) = P_n(\cos 2^r\theta).$$

LEMMA IV°.

Se $\omega(\mathrm{f},\ \delta)$ *è il modulo di continuità detla* $\mathrm{f(x)}$ *continua in* $[-1,\ 1]$ *e* $\omega(\varphi,\ \delta)$ *è il modulo di continuità della*

$$\varphi(\theta) = f(\cos 2^r\theta),\ \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2^r},\ \frac{\pi}{2^r}\right]$$

risulta

$$\omega(\varphi,\ \delta) \leq \omega(f,\ \delta)$$

Poichè

$$|\,x_2 - x_1\,| = |\cos 2^r\theta_2 - \cos 2^r\theta_1\,| \leq 2^r\,|\,\theta_2 - \theta_1\,|$$

si ha infatti

$$\omega(\varphi,\ \delta) = \max_{2^r\,|\,\theta_2-\theta_1\,| \leq \delta} |\,\varphi(\theta_2) - \varphi(\theta_1)\,| = \max_{2^r\,|\,\theta_2-\theta_1\,| \leq \delta} |\,f(\cos 2^r\theta_2) -$$

$$- f(\cos 2^r\theta_1)\,| \leq \max_{|\,x_2-x_1\,| \leq \delta} |\,f(x_2) - f(x_1)\,| = \omega(f,\ \delta).$$

3. Siamo a questo punto in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA

Se la funzione $\mathrm{f(x)}$ *è continua in* $[-1,\ 1]$ *esiste un polinomio algebrico* $\mathrm{P}_n(\mathrm{x})$, *di grado non superiore ad* n, *tale che*

$$|\,f(x) - P_n(x)\,| \leq \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \tag{7}$$

essendo $\omega(f,\ \delta)$ *il modulo di continuità della* $\mathrm{f(x)}$ *relativo al numero* $\delta > 0$.

La sostituzione

$$x = \cos 2^r \theta$$

muta l'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ nell'intervallo $-\frac{\pi}{2^r} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2^r}$ e la $f(x)$ in una funzione $\varphi(\theta) = f(\cos 2^r \theta)$, pari, continua col periodo $\pi|2^{r-1}$.

Per il corollario del LEMMA II° si ha

$$| A_N(\varphi, \theta) - \varphi(\theta) | < \omega\left(\varphi, \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{2^{r+1}}\right);$$

poichè, per il LEMMA III°

$$| A_N(\varphi, \theta) - \varphi(\theta) | =$$

$$= | P_n(\cos 2^r\theta) - f(\cos 2^r \theta | = | P_n(x) - f(x) |$$

e, per il LEMMA IV°,

$$\omega\left(\varphi, \frac{1}{n}\right) \leq \omega\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

risulta

$$| f(x) - P_n(x) | < \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{2^{r+1}}\right).$$

Questa disuguaglianza vale qualunque sia r; poichè n non dipende da r, passando al limite per $r \to \infty$, segue la (7).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, G. SANSONE parte II, Zanichelli, Bologna 1946.

[2] P. P. KOROVKIN, *linear operators and approximation theory*, Hindustan Publishing Corp. (India), 1960, (tradotto dalla edizione russa, 1959).

[3] G. ALEXITIS, *Convergence problems of orthogonal series*, Pergamon Press, 1961.