Bollettino
Unione Matematica Italiana

I. Bandić

Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles quasi-homogènes du premier ordre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.1, p. 1–8.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles quasi-homogenès du premier ordre

Nota di I. Bandić (a Beograd) (*)

Résumé. - *On a l'équation* (4) *ou* f, φ *et* θ *sont des fonctions homogènes par rapport a* x *et* y, *à savoir* f *et* φ *de degré* m *et* θ *de degré* p. *En utilisant les dérivées relatives, on effectue ici la transformation de l'equation* (4) *en équation d'*Abel (11). *En appliquant les résultats ainsi obtenus on forme ensuite de nouveaux types intégrables,* (20) *et* (27), *de l'équation* (4), *dont les cas spéciaux sont les équations* (1), (2) *et* (3).

1. En résolvant l'équation différentielle

$$y(x^2 + y^2)dx + x(xdy - ydx) = 0. \tag{1}$$

F. Tisserand, [1], applique un multiplicateur de cette équation et F. Laurenti, [2], transforme (1) au moyen de la substitution $y = x \operatorname{tg} \varphi$, où $\varphi = \varphi(x)$ est la nouvelle fonction inconnue, en une équation différentielle dans laquelle les variables sont séparées.

Par application du même procédé, F. Laurenti a résolu, en suite, l'équation plus générale

$$ay^n(x^2 + y^2)dx + x^n(xdy - ydx) = 0, \tag{2}$$

ainsi que l'équation différentielle

$$ay^n \sqrt{x^2 + y^2}dx + x^{n-1}(xdy - ydx) = 0. \tag{3}$$

Les équations (1), (2) et (3) représentent des cas speciaux de l'équation différentiele quasi-homogène du premier ordre

$$f(x, y)y' + \varphi(x, y) = \theta(x, y), \tag{4}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I il 2 novembre 1962.

dont les coefficients sont des fonctions hamogènes par rapport à x et y, à savoir $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ du m-ième et $\theta(x, y)$ du p-ième degré.

Dans le présent travail on a démontré que l'équation (4) se réduit à l'équation différentielle d'ABEL de forme

$$y' = a_0(x)y^3 + a_1(x)y^2. \tag{5}$$

En appliquant les résultats ainsi obtenus on forme ensuite de nouveaux types intégrables d'équations différentielles (4).

(1.1) Au cours du travail on utilise également les dérivées relatives de M. PETROVIC, [3].

La dérivée relative du n-ième ordre de la fonction $u = u(x)$ est introduite au moyen de la définition

$$\Delta_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}, \qquad \left(u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}\right).$$

De tous les nombreux rapports entre les dérivées relatives qui en résultent, on y a utilisé

$$\Delta_1(uv) = \Delta_1(u) + \Delta_1(v); \qquad \Delta_1\left(\frac{u}{v}\right) = \Delta_1(u) - \Delta_1(v);$$

$$\Delta_1(u^n) = n\Delta_1(u); \qquad \Delta_1\left(\exp\int u dx\right) = \exp\int \Delta_1(u) dx = u,$$

où $u = u(x)$, $v = v(x)$.

(1.2) La notation de la dérivée relative peut être étendue aussi à une fonction de deux variables indépendantes, $u = u(x_1, x_2)$, en introduisant la notion de la dérivée relative partielle du premier ordre, [4]

$$\Delta_1(u)_{x_\nu} = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (\nu = 1,\ 2).$$

Si x_2 est fonction de x_1 on arrive à la dérivée relative totale

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx_1} = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot x_2'\right), \qquad \left(x_2' = \frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

ou bien, d'après la définition précédente

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \triangle_1(u)_{x_1} + \triangle_1(u)_{x_2}\cdot x_2'.$$

2. Lorsqu'on introduit dans (4) la nouvelle fonction inconnue $z = z(x)$ au moyen de la substitution

$$y = xz \tag{6}$$

on arrive à l'équation

$$xz' + z + \mathcal{S}(z) = x^{p-m}\mathcal{Q}(z), \tag{7}$$

où l'on a posé, pour plus de brièveté

$$\mathcal{S}(z) = \frac{\varphi(1, z)}{f(1, z)}, \qquad \mathcal{Q}(z) = \frac{\theta(1, z)}{f(1, z)}. \tag{8}$$

Prenant, ensuite, x pour fonction de l'argument z, l'équation (7) apparait sous forme de

$$[x^{p-m}\mathcal{Q}(z) - (z + \mathcal{S}(z))]\triangle_1(x) = 1.$$

d'où par voie de substitution

$$x = \left[\frac{u + (z + \mathcal{S}(z))}{\mathcal{Q}(z)}\right]^{\frac{1}{p-m}}, \tag{9}$$

où $u = u(z)$ est la nouvelle fonction inconnue, est en appliquant l'opérateur ∇_1 selon la variable z, on obtient

$$u\nabla_1\left[\frac{u + (z + \mathcal{S}(z))}{\mathcal{Q}(z)}\right]_z = p - m,$$

ou, dans sa forme développée

$$uu' = \triangle_1[\mathcal{Q}(z)]u^2 + \left[(p - m) + (z + \mathcal{S}(z))\triangle_1\left(\frac{\mathcal{Q}(z)}{z + \mathcal{S}(z)}\right)\right]u +$$
$$+ (p - m)(z + \mathcal{S}(z)).$$

Cette équation, par la substitution

$$u = \frac{\mathcal{Q}(z)}{w}, \tag{10}$$

où $w = w(z)$ représente la nouvelle fonction inconnue, se transforme en équation d'ABEL ayant la forme (5)

$$w' = (m - p)\frac{z + \mathcal{S}(z)}{\mathcal{Q}^2(z)} w^3 + \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{Q}(z)} \left\{ (m - p) + (z + \mathcal{S}(z)) \triangle_1 \left(\frac{z + \mathcal{S}(z)}{\mathcal{Q}(z)} \right) \right\} w^2.$$

(2.1) Soit $w = w(z, c)$ l'intégrale générale de l'équation (11).
Dans ce cas-ci on obtient l'intégrale générale de l'équation (4) dans la forme paramétrique, de (6), (9) et (10)

$$\left. \begin{aligned} x &= [R(z, c)]^{\frac{1}{p-m}} \\ y &= z[R(z, c)]^{\frac{1}{p-m}} \end{aligned} \right\} R(z, c) = \frac{\mathcal{Q}(z) + (z + \mathcal{S}(z)) w(z, c)}{\mathcal{Q}(z) w(z, c)}$$

où z joue le rôle de parametre.

THÉOREME - L'intégrale générale de l'équation différentielle quasi-homogène

$$f(x, y)y' + \varphi(x, y) = \theta(x, y), \tag{12}$$

dont les coefficients sont des fonctions homogènes par rapport à x et y, à savoir $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ de degré m et $\theta(x, y)$ de degré p, est donnée dans la forme paramétrique

$$\left. \begin{aligned} x &= [R(z, c)]^{\frac{1}{p-m}} \\ y &= z[R(z, c)]^{\frac{1}{p-m}} \end{aligned} \right\} R(z, c) = \frac{\mathcal{Q}(z) + (z + \mathcal{S}(z)) w(z, c)}{\mathcal{Q}(z) w(z, c)} \tag{13}$$

avec

$$\mathcal{S}(z) = \frac{\varphi(1, z)}{f(1, z)}, \qquad \mathcal{Q}(z) = \frac{\theta(1, z)}{f(1, z)} \tag{14}$$

où z joue le rôle de paramètre et $w = w(z, c)$ représente l'intégrale générale de l'équation d'ABEL

$$(15)\qquad w' = (m-p)\frac{z+\mathcal{S}(z)}{\mathcal{Q}^2(z)}w^3 +$$

$$+\frac{1}{\mathcal{Q}^2(z)}\left\{(m-p)+[z+\mathcal{S}(z)]\triangle_1\left[\frac{z+\mathcal{S}(z)}{\mathcal{Q}(z)}\right]\right\}w^2$$

3. En utilisant les resultats de (2.1) on peut former de nouvelles équations intégrables de la forme (12), en tenant compte que, d'après (6)

$$(16)\qquad z=\frac{y}{x}$$

et que les coefficients des équations (12) et (15) sont liés par la relations

$$(17)\qquad \mathcal{S}(z)=\frac{\varphi(x,\ y)}{f(x,\ y)},\qquad \mathcal{Q}(z)=x^{m-p}\frac{\theta(x,\ y)}{f(x,\ y)}$$

(3.1) Soit d'abord dans l'équation (15)

$$(18)\qquad z+\mathcal{S}(z)=0.$$

Dans ce cas-ci (15) se réduit à l'équation

$$w'=\frac{m-p}{\mathcal{Q}(z)}w^2,$$

dont l'intégrale générale est

$$(19)\qquad w=\left[c+(p-m)\int\frac{dz}{\mathcal{Q}(z)}\right]^{-1}.$$

Pourtant, de (16), (17) et (18) il s'ensuit

$$\varphi(x,\ y)=-\frac{y}{x}f(x,\ y)$$

et l'équation intégrable (12) devient

$$(xy' - y)f(x,\ y) = x\theta(x,\ y), \tag{20}$$

où $f(x, y)$ et $\theta(x, y)$ sont des fonctions homogènes par rapport à x et y, à savoir $f(x, y)$ de degré m et $\theta(x, y)$ de degré p.

Comme intégrale générale de l'éqoation (20) on trouve de (13)

$$\left.\begin{aligned} x &= [w(z,\ c)]^{\frac{1}{m-p}} \\ y &= z[w(z,\ c)]^{\frac{1}{m-p}} \end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

où $w = w(z, c)$ est donnée par la relation (19).

Exemples - Les équations (1), (2) et (3) représentent des cas spéciaux de l'équation (20).

1) L'équations (1) peut être exprimée sous la forme de

$$x^2y' - xy = -y(x^2 + y^2), \tag{22}$$

où $m = 2$, $p = 3$, $\mathcal{Q}(z) = -z(1 + z^2)$, $\mathcal{F}(z) = -z$.

De (19) on obtient

$$w = \left(c - l_n \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}\right)^{-1}$$

et l'intégrale générale de l'équation (22) est, à la base de (21)

$$x = c - ln\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}, \qquad y = z\left(c - ln\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right),$$

d'où l'on trouve immédiatement

$$e^x y = c\sqrt{x^2 + y^2}.$$

2) De l'équation (2), laquelle apparaît sous la forme de

$$x^{n+1}y' - x^n y = -ay^n(x^2 + y^2) \tag{23}$$

on trouve $m=n+1$, $p=n+2$, $\mathcal{Q}(z)=-az^n(1+z^2)$, $\mathcal{S}(z)=-z$.
Dans ce cas-ci de (19) on obtient

$$w=\left\{c-\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^n(1+z^2)}\right\}^{-1}$$

et l'intégrale générale de l'équation (23) est, d'après (21)

$$x=c-\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^n(1+z^2)},\qquad y=z\left(c-\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^n(1+z^2)}\right).$$

3) L'équation (3) peut être exprimée sous la forme

$$x^ny'-x^{n+1}y=-ay^n\sqrt{x^2-y^2}, \tag{24}$$

où $m=n$, $p=n+1$, $\mathcal{Q}(z)=z^n\sqrt{1-z^2}$, $\mathcal{S}(z)=-z$.
De (19) on obtient

$$w=\left(c-\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^n\sqrt{1-z^2}}\right)^{-1}$$

et l'intégrale générale de l'équation (24) est, à la base de (21)

$$x=c-\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^n\sqrt{1-z^2}},\qquad y=c\left(c-\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^n\sqrt{1-z^2}}\right),$$

(3.1) Soit maintenant

$$z+\mathcal{S}(z)=\alpha\mathcal{Q}(z),\qquad (\alpha=\text{const.}). \tag{25}$$

Dans ce cas-ci (15) se réduit à l'équation

$$w'=\frac{(m-p)w^2(\alpha w+1)}{\mathcal{Q}(z)},$$

dont l'intégrale générale est

$$\alpha ln\frac{\alpha w+1}{\alpha w}-\frac{1}{w}=c+(m-p)\int\frac{dz}{\mathcal{Q}(z)}, \tag{26}$$

Pourtant, de (16), (17) et (25) on obtient

$$f(x, y)y + \varphi(x, y)x = \alpha x^{\nu}\theta(xy), \qquad (\nu = m - p + 1)$$

et l'équation intégrable (12) apparaît sous la forme

$$(27) \qquad (y - xy')\varphi(x, y) = (y - \alpha x^{\nu} y')\theta(x, y),$$

où $\varphi(x, y)$ et $\theta(x, y)$ sont des fonctions homogènes par rapport à x et y, à savoir $\varphi(x, y)$ du m-ième et $\theta(x, y)$ du p-ième degré.

Comme intégrale générale de l'équation (27) on trouve de (13)

$$(28) \qquad \left.\begin{aligned} x &= [R(z, c)]^{\frac{1}{p-m}} \\ y &= z[R(z, c)]^{\frac{1}{p-m}} \end{aligned}\right\}, \qquad R(z, c) = \frac{1 + \alpha w(z, c)}{w(z, c)}$$

où $w = w(z, c)$ est donnée par la relation (26).

Exemple - L'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(29) \qquad (y - xy')(y^3 - x^3) = (y - \alpha x^3 y')(y + x)$$

dans laquelle est $m = 3$, $p = 1$, résulte de (28), où d'après (26)

$$\alpha ln \frac{\alpha w + 1}{\alpha w} - \frac{1}{w} = c + z\left(\frac{2}{3}z^2 - z + 2\right) - 4l_n(z + 1).$$

LITTÉRATURA

[1] F. Tissérand, *Recueil complémentaire d'Exercices sur le calcul infini tésimal*, p. 167, (1896), Paris.

[2] F Laurenti, *Sopra alcune notevoli equazioni differenziali*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», Ser. III, N° 1, (1962), Bologna.

[3] M. Petrovic, *Un algoritme différentiel et ses applications*, «Monographie de l'Académie Serbe des Sciences», Vol. CXI, (1936), Beograd.

[4] I. Bandic, *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre*, «Bullettin de la Société des math. et phys. de la R. P. de Serbie», X, 1-4, (1958), Beograd.