Bollettino
Unione Matematica Italiana

Demetrio Mangeron

Su alcune formole di media per le soluzioni analitiche di certe classi di equazioni differenziali a derivate parziali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.4, p. 380–384.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_4_380_0>

Su alcune formole di media per le soluzioni analitiche di certe classi di equazioni differenziali a derivate parziali (*)

Nota di DEMETRIO MANGERON (a Iasi, RPR) (**)

Sunto. - *Si stabiliscono le formole di media* (3) *e* (5) *per le soluzioni analitiche delle equazioni differenziali a derivate parziali* (2) *oppure* (4) *e si indicano poscia estensioni possibili tenendovisi conto di relazioni che intercedono tra le soluzioni di varie classi di equazioni differenziali a derivate parziali, stabilite dall' A. in* [12], [14].

1. Nell'ambito di una ricca messe di ricerche odierne concernenti svariatissime formule di media, incominciando dai contributi ai teoremi di media per gli integrali multipli [1], [2] e concludendo coi diversi teoremi di media ed i rispettivi metodi spettanti alla meccanica non lineare [3], [6], [8] vi è luogo di sottolineare quelle che si riferiscono alle soluzioni analitiche di varie equazioni differenziali a derivate parziali [7], [9].

In una serie di lavori recenti M. NICOLESCU [11] e M. N. ROSCULET [10] son pervenuti ad un numero di formule di media concernenti le soluzioni analitiche di equazioni del calore e, più generalmente, di equazioni "policaloriche"

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(p)} u=0, \quad p\geq 1. \tag{1}$$

Si espongono qui alcuni risultati alquanto più generali di quelli stabiliti dai detti autori, concernenti le formule di media per le soluzioni analitiche di certe classi di equazioni differenziali a derivate parziali, pur riservando al "*Bollettino dell' Istituto Politecnico di Iasi*" un numero di risultati che se ne deducono in questo ordine di idee se vi si tiene conto delle relazioni stabilite dall' A. tra vari tipi di problemi al contorno per certi classi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Politecnico di Iasi.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. 15 Ottobre 1962.

di equazioni differenziali a derivate parziali d'ordine superiore [12] - [14].

2. Hanno luogo i seguenti teoremi:

TEOREMA I. - *Sia*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p;\ y_1, y_2, \dots, y_m)$$

una funzione analitica nel dominio

$$-\infty < x_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$a_j \leq y_j \leq b_j, \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

e soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\left[\beta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \beta_m \frac{\partial}{\partial y_m} + \alpha_1^* \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_p^* \frac{\partial}{\partial x_p} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{(2)}\right] f = 0, \tag{2}$$

ove

$$\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_1^*, \dots, \alpha_p^* \ \alpha_1, \dots, \alpha_p$$

sono numeri costanti dati.

Ha luogo la formola di media

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p;\ y_1, y_2, \dots, y_m) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(x_1 + \alpha_1 h t + \alpha_1^* h^2, \dots, x_p + \alpha_p h t + \alpha_p^* h^2; \tag{3}$$
$$y_1 + \beta_1 h^2, \dots, y_m + \beta_m h^2)\, dt,$$

ove h è un parametro e

$$a_j \leq y_j + \beta_j h^2 \leq b_j, \qquad j = 1, 2, \dots m.$$

TEOREMA II. - *Sia*

$$f(y: x_{s_1}, x_s, \dots, x_{s_p}) \equiv f(y_1 . y_2, \dots, y_m; x_{11}, \dots, x_{1s_1}, \dots, x_{p1}, \dots, x_{ps_p})$$

una funzione analitica, definita nel dominio

$$-\infty < x_{ki} < +\infty, \qquad a_j \leq y_i \leq b_j,$$

$$i = 1, 2, \ldots, s_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

e soluzione dell'equazione differenziale a derivate parziali

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial y_m} + \sum_{i=1}^{p} \left(\beta_{i1}^* \frac{\partial}{\partial x_{i1}} + \beta_{i2}^* \frac{\partial}{\partial x_{i2}} + \ldots + \right.\right.$$

(4)

$$\left.\left. + \beta_{is_i}^* \frac{\partial}{\partial x_{is_i}} \right) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{p} \left(\beta_{i1} \frac{\partial}{\partial x_{i1}} + \beta_{i2} \frac{\partial}{\partial x_{i2}} + \ldots + \beta_{is_i} \frac{\partial}{\partial x_{is_i}} \right)^{(2)} \right] f = 0,$$

ove

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \ \beta_{i1}^*, \ldots, \beta_{is_i}^*; \ \beta_{i1}, \ldots, \beta_{is_i}, \ i = 1, 2, \ldots, p$$

sono numeri costanti dati.

Ha luogo la formula di media

$$f(y; x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_p}) = \pi^{-\frac{p}{2}} \int_{\Omega_\infty} e^{-u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_p^2} \times$$

(5)

$$\times f(y + \alpha h^2; x_{s_1} + \beta_1 u_1 h + \beta_1^* h^2, \ldots, x_{s_p} + \beta_p u_p h +$$

$$\beta_p^* h^2) du_1 du_2 \ldots du_p,$$

ove Ω_∞ *è il dominio definito per mezzo di*

$$-\infty < u_i < +\infty, \ i = 1, 2, \ldots, p$$

ed ove si è posto $y + \alpha h^2$ *per*

$$y_1 + \alpha_1 h^2, \ y_2 + \alpha_2 h^2, \ \ldots, \ y_m + \alpha_m h^2 \quad e \quad x_{s_k} + \beta_k u_k h + \beta_k^* h^2$$

per

$$x_{k1}+\beta_{k1}u_k h+\beta^*_{k1}h^2,\ x_{k2}+\beta_{k2}u_k h+\beta^*_{k2}h^2,\ \ldots,$$

$$x_{ks_k}+\beta_{ks_k}u_k h+\beta^*_{ks_k}h^2,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ p,$$

mentre h *è un parametro e*

$$a_j\leq y_j+\alpha_j h^2\leq b_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

La dimostrazione, se ci si limita data l'analogia dei procedimenti spettanti ad ambedue i teoremi, al caso del teorema I, è basata sulla validità, nelle ipotesi ammesse, dello sviluppo

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}f(x_1+\alpha_1 ht+\alpha_1{}^*h^2,\ \ldots,\ x_p+\alpha_p ht+\alpha_p{}^*h^2\,;\\ &y_1+\beta_1 h^2,\ \ldots,\ y_m+\beta_m h^2)dt=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)+\\ &+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h^{2n}}{n!}\left[\beta_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\ldots+\beta_m\frac{\partial}{\partial y_m}+\alpha_1{}^*\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\alpha_p{}^*\frac{\partial}{\partial x_p}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{4}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\alpha_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{(2)}\right]^{(n)}f,\end{aligned}\tag{6}$$

al quale si perviene tenendovi conto del fatto che si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t^{2n}dt=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\tag{7}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t^{2n+1}dt=0.\tag{8}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. PICONE, G. FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, vol. II, cap. III, Tumminelli Editore, Roma, 1955.

[2] O. COSTINESCU, *Il secondo teorema di media per gli integrali multipli*. (In romeno). Tesi di abilitazione. Università «Al. I. Cuza» di Iasi, 1959.

[3] N. M. KRYLOFF, N. N. BOGOLJUBOFF, *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Free Translation by S. Lefschetz. Princeton University Press, 1947.

[4] JU. A. MITROPOLSKY, *Sur les multiplicités intégrales des systèmes d'équations différentielles non linéaires ayant un petit paramètre*, «Ann. mat. pura ed appl.», [illegible], pp. 181 - 192.

[5] N. MINORSKY, *The Theory of Oscillations*. Nel volume «Dynamics and Nonlinear Mechanics», John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1959, pp. 143 e segg.

[6] D. MANGERON, *The integral equations method in nonlinear mechanics*. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Symposium on Nonlinear Vibrations. «Institute of Mathematics», Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, 1961, pp. 1-4.

[7] D. MANGERON, *L'applicazione del metodo di Picone, della trasformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito, alla teoria delle equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque* «Rend. Accad. d'Italia», Cl. sci. fis., mat. e nat., s. 7-*a*, 1, 1, 1939, pp. 1-9.

[8] G. MANARESI, *Su alcuni teoremi di media nella meccanica non lineare*, «Atti Sem. Mat. e Fis.», Univ. Modena, VI, 1951-52, pp. 3-11.

[9] M. NICOLESCU, *Équation itérée de la chaleur*, Studii si cercetari matematice, Acad. R.P.R., 5, 3-4, 1954, pp. 243-332.

[10] M. N. ROSCULET, *Formules de moyennes pour les solutions analytiques de certaines équations aux dérivées partielles du type parabolique*. Comunic. Acad. Rep. Pop. Romine, XI, 8, 1961, pp. 909-914.

[11] M. NICOLESCU, *Sur quelques propriétés caractéristiques de moyennes de fonctions polycaloriques*. «Comunic. Acad. R. P. Romine», 4, 11-12, 1954, pp. 551-554.

[12] D. MANGERON, *Sur les solutions par composition des équations aux dérivées portielles d'ordre supérieur*. «Bull. Inst. Polytechn.» Jassy. 1, 2, 1946, pp. 295-303.

[13] — —, *Sur les relations entre les différents types de problemes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. «Bul. Inst. Politehn.», Iasi, *n. s.*, 3(7). 1-2, 1957. pp. 39-42.

[14] — —, *O sootnoseniah mezdu reseniami nekotoryh mnogomernyh granicnyh zadac*, «Bul. Inst. Politehn. Iasi,» *n. s.*, 4(8), 1-2, 1958, pp. 61-64.