Bollettino
Unione Matematica Italiana

G. Geymonat

Sulla traccia delle funzioni olomorfe di potenza p-esima sommabile.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.4, p. 369–379.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_4_369_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Sulla traccia delle funzioni olomorfe di potenza p-esima sommabile.

Nota di G. GEYMONAT (a Pavia) (*)

Sunto. - *Si caratterizza la traccia sulla frontiera delle funzioni olomorfe e di potenza p-esima sommabile in un aperto regolare e limitato del piano.*

È noto che il problema della traccia sulla frontiera di una funzione olomorfa in un aperto Ω limitato del piano complesso è stato ed è tuttora ampiamente studiato; non mi risulta però che sia ancora stata data una caratterizzazione della traccia di una funzione olomorfa in Ω ed ivi di potenza p-esima sommabile (p reale, $1 < p < +\infty$). La caratterizzazione che qui ottengo è una estensione di quella classica per una funzione olomorfa in Ω e continua in $\bar{\Omega}$ (v. ad es. MUSKHELISHVILI [6], WALSH [7]).

1. Preliminari.

1.1. Sia Ω un aperto limitato sufficientemente regolare del piano euclideo reale R^2 delle $x = (x_1, x_2)$ di frontiera Γ; noi per semplicità e poichè non abbiamo in vista di dare le condizioni migliori possibili su Ω per la validità dei risultati, supporremo senz'altro che Ω sia di classe C^∞ anche se questa condizione può essere notevolmente ampliata. Possiamo allora supporre che esistano:

a) una famiglia $\{\Omega\}_{0 \leq \tau \leq \tau_0}$ di aperti di classe C^∞ di frontiera Γ_τ dipendente dal parametro τ, $0 \leq \tau \leq \tau_0 < 1$ tale che $\lim\limits_{\tau \to 0} \Omega_\tau = \Omega$;

b) una famiglia $\{O_i\}$ ($i = 1, 2, ..., \mu$) di aperti limitati di R^2 tali che $\Gamma \subset \bigcup\limits_{i=0}^{\mu} O_i$, $\Gamma_\tau \subset \bigcup\limits_{i=0}^{\mu} O_i$, e per $i = 1, 2, ..., \mu$ esista un omeomorfismo g_i (di componenti $g_{i1}(x)$ e $g_{i2}(x)$, indefinitamente differenziabili e a jacobiano $\neq 0$) di $\overline{O}_i$, chiusura di O_i, su $\overline{Q} = [-1.$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 15 ottobre 1962.

$+1]^2$ per cui sia (indicando con $t=(t_1,t_2)$ il punto generico di $\overline{Q}$):

$$g_i(\Gamma \cap O_i) = Q \cap \{t_2 = 0\}, \tag{1.1}$$

$$g_i(\Gamma_\tau \cap O_i) = Q \cap \{t_2 = -\tau\}, \tag{1.2}$$

sussistendo inoltre le abituali condizioni di compatibilità (¹).

Si può ad es. prendere come famiglia di aperti Ω_τ quella degli insiemi Ω_τ così definiti: sia in ogni punto P di Γ, $\nu(P)$ la normale a Γ in P interna ad Ω; sia P_τ il punto che su $\nu(P)$ ha distanza τ da P, $0 \leq \tau \leq \tau_0 < 1$ con τ_0 sufficientenente piccolo; Γ_τ sia l'insieme dei punti P_τ al variare di P su Γ; Ω_τ è allora l'insieme contenuto in Ω che ha come frontiera Γ_τ.

Mediante il sistema $\{O_i, g_i\}$ risulta anche definito un omeomorfismo θ_τ di Γ_τ su Γ ponendo:

$$\theta_\tau(x) = g_i^{-1}(g_{i1}(x), 0) \qquad \forall x \in \Gamma_\tau \cap O_i. \tag{1.3}$$

È immediato allora verificare che θ_τ e l'inverso θ_τ^{-1} sono omeomorfismi di Γ_τ su Γ e di Γ su Γ_τ indefinitamente differenziabili e le cui derivate sono limitate da costanti indipendenti da τ, fissato che ne sia l'ordine.

1.2. $\mathcal{H}(\Omega)$ è lo spazio lineare delle funzioni olomorfe in Ω. $D(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni a valori complessi indefinitamente differenziabili in $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \cdot D(\Gamma)$ è lo spazio delle funzioni a valori complessi indefinitamente differenziabili su Γ.

Noi utilizzeremo anche gli spazi $W^{s,p}(\Gamma)$, s reale, $-1 < s < 1$, p reale, $1 < p < +\infty$, per i quali rinviamo ad es. a LIONS-MAGENES [5]; ricordiamo qui brevemente che gli spazi $W^{s,p}(\Gamma)$, s reale, $0 < s < 1$, possono essere introdotti in vari modi, ad es.: $W^{s,p}(\Gamma)$ è lo spazio delle $u \in L^p(\Gamma)$ (²) tali che:

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}} d\sigma_x d\sigma_y < +\infty$$

(¹) Cioè: se $O_i \cap O_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, esiste un omeomorfismo J_{ij} indefinitamente differenziabile a jacobiano >0 di $g_i(O_i \cap O_j)$ su $g_j(O_i \cap O_j)$ tale che:

$$g_j(x) = J_{ij} g_i(x) \qquad \forall x \in O_i \cap O_j.$$

(²) $L^p(\Gamma) = W^{0,p}(\Gamma)$ p reale, $1 < p < +\infty$, è lo spazio di BANACH delle u di potenza p-esima sommabile su Γ.

con la norma:

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Gamma)} = \left(\| u \|^p_{L^p(\Gamma)} + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{1+ps}} d\sigma_x d\sigma_y \right)^{1/p}$$

Si definisce poi per dualità $W^{s,p}(\Gamma)$ s reale, $-1 < s \leq 0$, ponendo:

$$W^{s,p}(\Gamma) = (W^{s,p'}(\Gamma))' \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Si hanno i seguenti risultati:

PROP. 1.1. (v. [5]). - $\mathfrak{D}(\Gamma)$ *è denso in* $W^{s,p}(\Gamma)$, $-1 < s < 1$.

TEOR. 1.1. (v. [2]). - *Nell'ipotesi del* n. 1.1 *per ogni* p *reale,* $1 < p < +\infty$, *l'applicazione* $u \to \gamma_0 u = u|_\Gamma$ *di* $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ *su* $\mathfrak{D}(\Gamma)$ *si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua ancora indicata con* $u \to \gamma_0 u$ *di* $W^{1,p}(\Omega)$ (3) *su* $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$.

Analogamente a quanto ora fatto si introducono gli spazi $\mathfrak{D}(\Gamma_\tau)$, $W^{s,p}(\Gamma_\tau)$, s reale $-1 < s < 1$, p reale, $1 < p < +\infty$; si ha allora la seguente (v. [4], [3]):

PROP. 1.2. - *Nelle ipotesi del* n. 1.1 *per* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Gamma_\tau)$ *si definisca* $\theta_\tau^* \varphi \in \mathfrak{D}(\Gamma)$ *con*

$$\theta_\tau^* \varphi(x) = \varphi(\theta_\tau^{-1}(x)); \tag{1.4}$$

l'applicazione $\varphi \to \theta_\tau^* \varphi$ *si prolunga allora la continuità in una applicazione lineare e continua* $u \to \theta_\tau^* u$ *di* $W^{s,p}(\Gamma_\tau)$ *in* $W^{s,p}(\Gamma)$ *per ogni* s *reale con* $-1 < s < 1$; *inoltre* θ_τ^* *è un isomorfismo e si ha:*

$$\| \theta_\tau^* \|_{L(W^{s,p}(\Gamma_\tau);\, W^{s,p}(\Gamma))} \leq c_1 \tag{1.5}$$

con c_1 *costante indipendente da* τ.

(3) Indicata con $k = (k_1, k_2)$ una coppia di numeri interi ≥ 0 si pone $|k| = k_1 + k_2$ e

$$D^k u = \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}, \qquad D^{(0,0)} u = u.$$

$L^p(\Omega)$ essendo lo spazio delle u di potenza p-esima sommabile in Ω, $W^{1,p}(\Omega)$ è lo spazio di SOBOLEV delle u tali che $D^k u \in L^p(\Omega)$, $|k| \leq 1$ con la norma abituale. È ben noto che $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$.

Sia ora $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora è anche $u \in W^{1,p}(\Omega_\tau)$ e quindi si può considerare la traccia $\gamma_{0,\tau}u$ su Γ_τ elemento di $W^{1-1/p,\,p}(\Gamma_\tau)$; in virtù della prop. 1.4 $\theta_\tau^*(\gamma_{0,\tau}u)$ è un elemento di $W^{1-1/p,\,p}(\Gamma)$; per comodità si scriverà

$$\tilde{\gamma}_{0,\tau}u = \theta_\tau^*(\gamma_{0,\tau}u);$$

si ha allora la seguente proposizione:

Prop. 1.3. - *Nelle ipotesi del* n. 1.1, *per ogni* p *reale*, $1 < p < +\infty$, *e per ogni* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *si ha:*

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{0,\tau}u - \gamma_0 \|_{W^{1-1/p,\,p}(\Gamma)} = 0. \tag{1.6}$$

1.3. Considerato in $\bar{\Omega}$ l'operatore di Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}$$

seguendo una nomenclatura introdotta da Lions-Magenes (v. [5]) indicheremo con $D_\Delta^{0,p}(\Omega)$, p reale, $1 < p < +\infty$, lo spazio di Banach delle $u \in L^p(\Omega)$ tali che $\Delta u \in L^p(\Omega)$ munito della norma:

$$\| u \|_{D_\Delta^{0,p}(\Omega)} = (\| u \|_{L^p(\Omega)}^p + \| \Delta u \|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}. \tag{1.7}$$

Si hanno i seguenti risultati (v. [5], [3]):

Prop. 1.4. - $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ *è denso in* $D_\Delta^{0,p}(\Omega)$.

Teor. 1.2. - *Nell'ipotesi del* n. 1.1, *per ogni* p *reale*, $1 < p < +\infty$, *l'applicazione* $u \to \gamma_0 u$ *definita per* $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ *si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua ancora indicata* $u \to \gamma_0 u$ *di* $D_\Delta^{0,p}(\Omega)$ *su* $W^{-1/p,\,p}(\Gamma)$ *ed inoltre:*

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{0,\tau}u - \gamma_0 u \|_{W^{-1/p,\,p}(\Gamma)} = 0. \tag{1.8}$$

1.4. Sia $\mathcal{H}^p(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ lo spazio di Banach delle funzioni $w(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$ olomorfe in Ω ed ivi di potenza p-esima sommabile munito della norma

$$\| w \|_{\mathcal{H}^p} = \| w \| \quad ;$$

per le proprietà note delle funzioni olomorfe risulta che $u(x_1, x_2)$ e $v(x_1, x_2)$ sono funzioni di $L^p(\Omega)$ armoniche associate in Ω e quindi $u, v \in D_\Delta^{0,p}(\Omega)$. Dal Teor. 1.2 si ricava allora che $\gamma_0 u$ e $\gamma_0 v$ appartengono a $W^{-1/p,p}(\Gamma)$ e quindi $\gamma_0 w = \gamma_0 u + i\gamma_0 v$ è in $W^{-1/p,p}(\Gamma)$. Risulta così che $w \to \gamma_0 w$ è *una applicazione lineare e continua di* $\mathcal{H}^p(\Omega)$ in $W^{-1/p,p}(\Gamma)$; si pone allora in modo naturale il problema di caratterizzare il codominio di tale applicazione. Tale caratterizzazione verrà data successivamente (v. n. 2.3).

Dal teor. 1.2 si ha anche la seguente formula:

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{0,\tau} w - \gamma_0 w \|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} = 0. \tag{1.9}$$

Poichè la restrizione di w ad Ω_τ appartiene ad $\mathcal{H}(\Omega_\tau) \cap \mathcal{D}(\bar{\Omega}_\tau)$, allora $\gamma_{0,\tau} w \in \mathcal{D}(\Gamma_\tau)$ e quindi si può scrivere, per ogni $z \notin \Gamma_\tau$ ed in particolare per ogni $z \notin \Gamma_\tau \cup \Gamma$, l'integrale:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\tau} \frac{(\gamma_{0,\tau} w)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \forall z \notin \Gamma_\tau \cup \Gamma.$$

Si ha di più la seguente

Prop. 1.5. - *Nelle ipotesi del* n. 1.1, *si ha:*

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\tau} \frac{(\gamma_{0,\tau} w)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} < (\gamma_0 w)(\zeta^*), \quad \frac{1}{\zeta^* - z} > \forall z \notin \Gamma \tag{1.10}$$

ove $<, >$ *rappresenta la dualità fra* $W^{-1/p,p}(\Gamma)$ e $W^{1-1/p',p'}(\Gamma)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *e* ζ^* *la variabile corrente su* Γ.

Dim. - Innanzitutto si ha, applicando la trasformazione (1.4),

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\tau} \frac{(\gamma_{0,\tau} w)(\zeta)d\zeta}{-z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{(\tilde{\gamma}_{0,\tau} w)(\zeta^*) J_\tau(\zeta^*) d\zeta^*}{\zeta^* - z} \qquad \forall z \notin \Gamma_\tau \cup \Gamma$$

ove $J_\tau(\zeta^*)$, per il modo col quale è stata definita la trasformazione θ_τ^* (v. propr. 1.2) e per le *a*) e *b*) del n. 1.1, appartiene a $\mathcal{D}(\Gamma)$, è $\neq 0$ e verifica

$$\begin{aligned} &\lim_{\tau \to 0} \max_{\zeta^* \in \Gamma} | J_\tau(\zeta^*) - 1 | = 0 \\ &\lim_{\tau \to 0} \max_{\zeta^* \in \Gamma} | D(J_\tau(\zeta^*) - 1) | = 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

Si ha allora che per ogni $z \notin \Gamma_\tau \cup \Gamma$.

$$\left| \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\tau} \frac{(\gamma_{0,\tau} w)(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right) - \frac{1}{2i\pi} < (\gamma_0 w)(\zeta^*), \quad \frac{1}{\zeta^* - z} > \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{(\tilde{\gamma}_{0,\tau} w)(\zeta^*) J_\tau(\zeta^*) d\zeta^*}{\zeta^* - z} \right) - \frac{1}{2i\pi} < (\gamma_0 w)(\zeta^*), \quad \frac{1}{\zeta^* - z} > \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{2i\pi} < (\tilde{\gamma}_{0,\tau} w - \gamma_0 w)(\zeta^*), \quad \frac{J_\tau(\zeta^*)}{\zeta^* - z} > \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{2i\pi} < (\gamma_0 w)(\zeta^*), \quad \frac{J_\tau(\zeta^*) - 1}{\zeta^* - z} > \right| \leq$$

$$\leq c_3(z) \, \| \tilde{\gamma}_{0,\tau} w - \gamma_{0,\tau} w \|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} + c_4(z) \, \| J_\tau(\zeta^*) - 1 \|_{W^{1-1/p',p'}(\Gamma)},$$

ove $<,>$ rappresenta la dualità fra $W^{-1/p,p}(\Gamma)$ e $W^{1-1/p',p'}(\Gamma)$, e $c_3(z)$, $c_4(z)$ sono costanti indipendenti da τ; dalla (1.9) e dalla (1.11), segue quindi l'asserto.

2. Caratterizzazione della traccia di una funzione di $\mathcal{H}^p(\Omega)$.

2.1. Nelle ipotesi del n. 1.1 su Ω e su Γ, assegnata $\varphi \in W^{-1/p,p}(\Gamma)$, studiamo alcune proprietà della funzione di variabile complessa $z = x_1 + ix_2$:

$$z \to w(z) = \frac{1}{2i\pi} < \varphi(\zeta), \ \frac{1}{\zeta - z} > \qquad \forall z \notin \Gamma$$

ove $<,>$ rappresenta la dualità fra $W^{-1/p,p}(\Gamma)$ e $W^{1-1/p',p'}(\Gamma)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, e dove $\zeta = \xi + i\eta$.

È immediato verificare che $w \in \mathcal{H}(K)$ per ogni aperto K tale che $K \cap \Gamma = \emptyset$; si ha di più: vale infatti la seguente

PROP. 2.1. - *Nelle ipotesi del* n. 1.1 *su* Ω *e su* Γ, *indicata con* w_1 *la restrizione di* w *ad* Ω, $w_1 \in L^p(\Omega)$.

DIM. - Per dimostrare che $w_1(z)$ appartiene ad $L^p(\Omega)$ è sufficiente dimostrare che per ogni $\psi(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha

$$\left| \int_\Omega w_1(x_1 + ix_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq c \, \| \psi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

con c costante indipendente da ψ.

Posto a tal fine per $(\xi, \eta) \in \bar{\Omega}$

$$(2.3) \qquad f(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \frac{\psi(x_1, x_2)}{(\xi - x_1) + i(\eta - x_2)} dx_1 dx_2$$

per un noto teorema di CALDERON-ZYGMUND (v. [1]) risulta per ogni p', $1 < p' < +\infty$, poichè $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$:

$$\| f \|_{L^{p'}(\Omega)} \leq A \| \psi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq A_1 \| \psi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq A_2 \| \psi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

con A, A_1, A_2 indipendenti da ψ. Risulta quindi in definitiva $f \in W^{1,p'}(\Omega)$ e

$$\| f \|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq c_1 \| \psi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

con c_1 costante indipendente da ψ; per il teor 1.1 esiste infine la traccia $\gamma_0 f$ con $\gamma_0 f \in W^{1-1/p', p'}(\Gamma)$ e vale la maggiorazione:

$$(2.4) \qquad \| \gamma_0 f \|_{W^{1-1/p', p'}(\Omega)} \leq c_2 \| f \|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq c_1 c_2 \| \psi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

con c_2 costante indipendente da ψ.

Riprendendo la (2.2), poichè $\psi(x_1, x_2)$ ha supporto compatto contenuto in Ω, risulta:

$$\int_{\Omega} w_1(x_1 + ix_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_1 =$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{2i\pi} < \varphi(\xi + i\eta), \frac{1}{(\xi - x_1) + i(\eta - x_2)} > \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2i\pi} < \varphi(\xi + i\eta), \gamma_0(f(\xi, \eta)) >$$

dove $<, >$ rappresenta la dualità fra $W^{-1/p, p}(\Gamma)$ e $W^{1-1/p', p'}(\Gamma)$.

Dalla (2.4) si ricava allora per ogni $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$:

$$\left| \int_{\Omega} w(x_1 + ix_2)\psi(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2i\pi} < \varphi(\xi + i\eta), \gamma_0 f(\xi, \eta) > \right| \leq$$

$$\leq c_2 \| \varphi \|_{W^{-1/p, p}(\Omega)} \| \gamma_0 f \|_{W^{1-1/p', p'}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_1 c_3 c_2 \| \varphi \|_{W^{-1/p, p}(\Gamma)} \| \psi \|_{L^{p'}(\Omega)} \leq c_4 \| \psi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

con c_3 e quindi c_4 indipendenti da ψ. c. v. d.

Osservazione 1. - Dalla dimostrazione fatta si ricava anche

$$\| w_1 \|_{\mathcal{H}^p(\Omega)} \leq c_4 \| \varphi \|_{W^{-1/p, p}(\Gamma)}$$

e cioè $\varphi \to w_1$ è *una applicazione lineare e continua di* $W^{-1/p, p}(\Gamma)$ *in* $\mathcal{H}^p(\Omega)$.

Sia ora Ω' un aperto limitato di R^2 di classe C^∞ e di frontiera Γ' tale che $\bar{\Omega}$ sia strettamente contenuto in Ω', sia poi $\Omega'' = \Omega' - \bar{\Omega}$; risulta allora che Ω'' è un aperto di R^2 di classe C^∞ e di frontiera $\Gamma' \cup \Gamma$; evidentemente, indicata con $w_2(z)$ la restrizione di $w(z)$ ad Ω'', tale funzione appartiene ad $\mathcal{H}(\Omega'')$. Si può però con ragionamento analogo a quello svolto nella dimostrazione della prop. 2.1 dimostrare che $w_2 \in L^p(\Omega'')$. Si osservi infine che anche $\varphi \to w_2$ è *una applicazione lineare e continua di* $W^{-1/p, p}(\Gamma)$ in $\mathcal{H}^p(\Omega'')$.

2.2. In virtù delle considerazioni svolte in 1.3, 1.4 poichè $w_1 \in \mathcal{H}^p(\Omega)$ esiste la traccia $\gamma_0^+ w$ di w_1 su Γ e $\gamma_0^+ w \in W^{-1/p, p}(\Gamma)$; analogamente $w_2 \in \mathcal{H}^p(\Omega'')$ ed esiste la traccia di w_2 su $\Gamma \cup \Gamma'$, detta $\gamma_0^- w$ la traccia di w_2 su Γ si ha $\gamma_0^- w \in W^{-1/p, p}(\Gamma)$.

Si pone allora in maniera naturale il problema di sapere se esistano relazioni fra $\gamma_0^+ w$, $\gamma_0^- w$ e φ; in particolare se sia possibile dimostrare la classica formula (v. ad es. [6])

$$\gamma_0^+ w - \gamma_0^- w = \varphi, \tag{2.5}$$

valida, come è noto, se φ è sufficientemente regolare, per es. se $\varphi \in \mathfrak{D}(\Gamma)$ (e quindi anche $\gamma_0^+ w$ e $\gamma_0^- w$ sono in $\mathfrak{D}(\Gamma)$).

Il problema ora posto viene risolto dalla seguente

Prop. 2.2. - *Nelle ipotesi del* n. 1.1 *per* φ *e quindi per* $\gamma_0^+ w$ *e* $\gamma_0^- w$ *in* $W^{-1/p,p}(\Gamma)$ *si ha la formula*:

$$\gamma_0^+ w - \gamma_0^- w = \varphi \qquad \text{in } W^{-1/p,p}(\Gamma) \tag{2.5}$$

Dim. - Sia $\varphi \in W^{-1/p,p}(\Gamma)$, allora per la prop. 1.1 esiste una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni $\varphi_n \in \mathfrak{D}(\Gamma)$ che converge in $W^{-1/p,p}(\Gamma)$ a φ.

Ad ogni φ_n si associ poi la funzione:

$$w_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\varphi_n(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \qquad \forall z \notin \Gamma; \tag{2.6}$$

llora per il ragionamento sopra fatto, esistono $\gamma_0^+ w_n$ e $\gamma_0^- w_n$, e inoltre

$$\| \gamma_0^+ w_n - \gamma_0^+ w \|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} \leq c_5 \| \varphi_n - \varphi \|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)}$$
$$\| \gamma_0^- w_n - \gamma_0^- w \|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} \leq c_6 \| \varphi_n - \varphi \|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)}$$

quindi per $n \to \infty$ $\gamma_0^+ w_n$ tende a $\gamma_0^+ w$ e $\gamma_0^- w_n$ tende a $\gamma_0^- w$ in $W^{-1/p,p}(\Gamma)$; poichè infine per ogni n risulta $\gamma_0^+ w_n - \gamma_0^- w_n = \varphi_n$ si ha, passando al limite per $n \to \infty$:

$$\gamma_0^+ w - \gamma_0^- w = \varphi \qquad \text{in } W^{-1/p,p}(\Gamma), \text{ c. v. d.}$$

2.3. Siamo ora in grado di risolvere il problema posto nel n. 1.4 e cioè di caratterizzare il codominio della applicazione $w \to \gamma w$ di [illegible]

Teor. 2.2. - *Nelle ipotesi del* n. 1.1:

1) *se* $w \in \mathcal{H}^p(\Omega)$ *allora esiste la traccia* $\gamma_0 w = \varphi \in W^{-1/p, p}(\Gamma)$ *e verifica la*

$$< \varphi(\zeta), \frac{1}{\zeta - z} > = 0 \qquad \forall z \notin \Omega; \tag{2.7}$$

2) *viceversa, se* $\varphi \in W^{-1/p, p}(\Gamma)$ *e verifica la* (2.7) *allora la funzione*

$$w_1(z) = \frac{1}{2i\pi} < \varphi(\zeta), \frac{1}{\zeta - z} > \qquad \forall z \in \Omega$$

appartiene ad $\mathcal{H}^p(\Omega)$ *ed è tale che* $\gamma_0 w_1 = \varphi$.

Dim. - 1) Sia $w(z) \in \mathcal{H}^p(\Omega)$; per quanto visto nel n. 1.4 esiste $\gamma_0 w \in W^{-1/p, p}(\Gamma)$ ed inoltre $\gamma_{0,\tau} w \in \mathcal{D}(\Gamma_\tau)$; vale quindi la formula integrale di Cauchy per ogni $z \notin \bar{\Omega}_\tau$ ed in particolare ogni $z \notin \bar{\Omega}$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\tau} \frac{(\gamma_{0,\tau} w)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \qquad \forall z \notin \bar{\Omega}. \tag{2.8}$$

Per la Prop. 1.5 si ha che per $\tau \to 0$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\tau} \frac{(\gamma_{0,\tau} w)(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

tende a

$$\frac{1}{2i\pi} < (\gamma_0 w)(\zeta^*), \frac{1}{\zeta^* - z} >$$

per ogni $z \notin \Gamma$ e quindi dalla (2.8) per $\tau \to 0$ si ha la (2.7).

2) Dato $\varphi \in W^{-1/p, p}(\Gamma)$ che verifica la (2.7) si costruisca la funzione $w(z)$:

$$w(z) = \frac{1}{2i\pi} < \varphi(\zeta), \frac{1}{\zeta - z} > \qquad \forall z \notin \Gamma.$$

Per la (2.7) risulta

$$w(z) = 0 \qquad \forall z \notin \bar{\Omega}$$

e quindi detta w_2 la restrizione di $w(z)$ ad Ω'' si ha $w_2 = 0$ in Ω''; quindi:

$$\gamma_0^- w = 0 \quad \text{in} \quad W^{-1/p,p}(\Gamma).$$

Risulta allora per la prop. 2.1 e per la prop. 2.2 che detta w_1 la restrizione di w ad Ω, $w_1 \in \mathcal{H}^p(\Omega)$ e $\gamma_0 w_1 = \gamma_0^+ w = \varphi$ in $W^{-1/p,p}(\Gamma)$. c. v. d.

Osservazione. – Per le ipotesi fatte nel n. 1.1, Γ risulta composto da un contorno esterno Γ_0 e da un numero finito di contorni $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ a due a due senza punti comuni, tutti di classe C^∞.

Fissati il punto $z^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$ nell'aperto limitato di frontiera Γ_h, sia $\{\omega_k(\zeta)\}$ la successione costituita da tutte le funzioni ζ^ν, $\dfrac{1}{(\zeta - z^{(h)})^\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots,; \ h = 1, 2, \ldots, p)$. Con il ragionamento abituale che si usa anche nel caso classico si dimostra allora che la (2.7) equivale alle seguenti condizioni

$$\langle \varphi, \omega_k \rangle = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

che dunque possono essere prese come condizioni caratteristiche per la traccia su Γ delle funzioni di $\mathcal{H}^p(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Calderon - A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, « Acta Math. », 88 (1952) pp. 85-139.

[2] E. Gagliardo, *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, « Rend. Sem. Mat. Padova », 27 (1957), pp. 284-305.

[3] G. Geymonat, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche*, « An. Sc. Norm. Sup. Pisa », Vol. XVI (1962), pp. 225-284.

[4] J. L. Lions - E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes* (II), « Ann. Inst. Fourier 11 » (1961), pp. 137-178.

[5] J. L. Lions - E. Magenes, *Problemi ai limiti non omogenei* (III), « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », vol. XV (1961), pp. 41-103.

[6] N. I. Muskelishvili, *Singular integral equations* (translated from Russian) P. Noordhoff. N. V. 1953.

[7] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Coll. Pubbl. vol. XX, « Am. Math. Soc. », 1933.