Bollettino Unione Matematica Italiana

Ermanno Marchionna

Osservazioni sulla struttura aritmetica degli anelli e degli anelloidi finiti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.3, p. 289–319.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_3_289_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Osservazioni sulla struttura aritmetica degli anelli e degli anelloidi finiti.

Nota di ERMANNO MARCHIONNA (a Torino) (*).

Sunto. - *Un classico teorema di* SYLOW *afferma che, se l'ordine N di un gruppo finito G è divisibile per un numero primo p, e se p^α è la massima potenza di p che divide N, allora G possiede sottogruppi degli ordini p^α, $p^{\alpha-1}$, ... p^2, p.*

Si può stabilire una proprietà analoga per gli anelli finiti?

In questa nota si osserva che una siffatta estensione riesce in generale solo parzialmente.

I risultati in proposito hanno per lo più carattere gruppale e vengono qui enunciati quasi tutti per sistemi a doppia composizione (preanelloidi, anelloidi) retti da postulati più deboli di quelli degli anelli; tuttavia alcuni di essi ammettono dimostrazioni tanto semplici che - a nostro avviso - passono offrire più di uno spunto per complementi ed esercizi del corso d'Algebra del primo anno di Matematica.

Per questo motivo abbiamo dato all'esposizione un tono prevalentemente didattico insistendo in richiami, esempi, ed osservazioni marginali, che i cultori d'Algebra potranno, non a torto, ritenere sovrabbondanti.

CAP. I. - Richiami sui gruppi nilpotenti.

1. Sia G gruppo finito d'ordine

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

(p_1, p_2, ..., p_k sono numeri primi distinti tra loro).

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 15 settembre 1962.

In virtù di un teorema di SYLOW si sa che G possiede almeno un sottogruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots k)$; tale sottogruppo prende il nome di sottogruppo di SYLOW relativo al fattore primo p_i dell'ordine N.

Può accadere che G possieda anche qualche sottogruppo di ordine $\mu = p_i^{\alpha_i} \ldots p_r^{\alpha_r}$ $(\mu < N)$; un sottogruppo siffatto viene comunemente chiamato sottogruppo di HALL (i sottogruppi di SYLOW sono particolari sottogruppi di HALL).

Per questo motivo e per altri che saranno chiari nel seguito, dato un intero $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, chiameremo *fattori di Sylow* e *fattori di Hall* del numero N i suoi divisori del tipo $p_i^{\alpha_i}$ e $p_i^{\alpha_i} \ldots p_r^{\alpha_r}$.

I fattori di SYLOW verranno considerati particolari fattori di HALL.

Ricordiamo ora che un gruppo si dice *nilpotente* oppure *speciale* se la serie centrale ascendente contiene l'intero gruppo come membro. Ogni sottogruppo di un gruppo nilpotente è pure nilpotente. *I gruppi abeliani sono particolari gruppi nilpotenti.*

Nei paragrafi successivi c'interesseremo soltanto di gruppi nilpotenti finiti, e la precedente definizione verrà sostituita dalla sottoindicata condizione caratteristica: *un gruppo finito G è nilpotente se, e solo se, esso è un p-gruppo* (cioè un gruppo avente ordine uguale ad una potenza di un numero primo p) *oppure il prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow* (1).

Ciò equivale al fatto che in corrispondenza di ogni fattore di SYLOW $p_i^{\alpha_i}$ dell'ordine N di G esista un *sottogruppo di Sylow* $S(p_i)$, *d'ordine* $p_i^{\alpha_i}$, il quale sia *normale* in G, e di conseguenza sia l'*unico* sottogruppo d'ordine $p_i^{\alpha_i}$. Il sottogruppo $S(p_i)$ risulta l'insieme di tutti e soli gli elementi di G aventi periodi uguali a potenze del numero primo p_i e contiene certamente elementi di periodo p_i (2). Inoltre in corrispondenza di ogni fattore μ di

(1) Per tutte queste proprietà cfr. ad es:
G. ZAPPA, *Gruppi, corpi, equazioni*, Ed Liguori, Napoli, (1954) pp. 138-141;
H. ZASSENHAUS, *The theory of groups*. Chelsea Publishing Company, New York, (1949), pp. 111-113:
A. G. KUROSH, *Theory of groups*, Chelsea Publishing Company. New York (1955), vol. II, pp. 211-216.

(2) Le suddette proprietà del sottogruppo di SYLOW $S(p_i)$ sono conseguenze del fatto che questo è *normale* in G e si ottengono applicando i due teoremi di SYLOW. Cfr. ad es. ZAPPA, l. c. in (1) pp. 128-130 e p 122.

HALL dell'ordine N $(\mu = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r})$, il gruppo nilpotente G ammette uno ed un solo sottogruppo avente ordine μ; tale sottogruppo H di HALL risulta prodotto dei sottogruppi di SYLOW $S(p_1)$, ... $S(p_r)$ ed è anch'esso normale in G (3).

Il sottogruppo H è l'insieme di tutti e soli gli elementi di G che hanno periodo del tipo $p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ $(0 \leq \beta_1$, ecc.) (4).

Ricordiamo tra l'altro che se $A_1, \dots, A_h$ sono sottogruppi del gruppo nilpotente G aventi ordini $n_1, \dots, n_h$ ed appartenenti ai sottogruppi di SYLOW $S(p_1), \dots, S(p_h)$, la loro unione è un sottogruppo di G avente ordine $n_1 \dots n_h$ e risulta prodotto diretto di $A_1, \dots, A_h$ (5).

Nel seguito, invece della nomenclatura moltiplicativa, dovremo usare quella additiva. Pertanto, in luogo del prodotto diretto di sottogruppi parleremo di *somma diretta*; l'elemento neutro del gruppo G verrà chiamato *zero* ed indicato col simbolo 0; e il periodo di un elemento verrà chiamato *caratteristica* (6).

(3) Il prodotto dei sottogruppi $S(p_1), \dots, S(p_r)$ è un sottogruppo H di HALL di ordine $\mu = p_1^{\alpha_1}, \dots, p_r^{\alpha_r}$ perchè i sottogruppi fattori sono normali in G ed hanno ordini $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_r^{\alpha_r}$ uguali a potenze di numeri primi distinti. Inoltre il sottogruppo H è normale in G, perchè $S(p_1), \dots, S(p_r)$ sono normali in G. Non può esistere un secondo sottogruppo H' d'ordine μ, perchè il prodotto di H ed H' — che sarebbe certamente un sottogruppo di G in quanto H è normale in G — avrebbe ordine $\mu' = p_1^{\gamma_1} \dots p_r^{\gamma_r} > \mu$, la qual cosa è assurda perchè μ' non è un divisore di N.

(4) È ovvio che gli elementi di H hanno periodo del tipo $p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$. Viceversa ogni elemento g di G avente un periodo siffatto sta in H. In caso contrario il prodotto di H per il sottogruppo ciclico generato da g sarebbe uu sottogruppo di G avente ordine $\mu'' = p_1^{\delta_1} \dots p_r^{\delta_r} > \mu$, la qual cosa è assurda perchè μ'' non è un divisore di N.

(5) Cfr. ad es. ZAPPA, l. c. in (1), p. 145.

(6) Si ricordi che per definizione un elemento g di un gruppo additivo G ha caratteristica eguale ad un intero $\nu > 0$, se si ha

$$\nu g = 0 \tag{1}$$

e se ν è il più piccolo intero positivo per cui la (1) viene verificata. Si dice invece che g ha caratteristica *zero* (od anche infinita) se la (1) è soddisfatta *soltanto* quando l'intero ν è nullo, ed è ben noto che questa seconda eventualità implica che G sia infinito.

Cap. II. - **Problemi "tipo Sylow" relativi ai preanelloidi.**

2. Supponiamo che un insieme R, eventualmente infinito, sia dotato di due leggi di composizione interne, che chiamiamo *somma e prodotto*. Indichiamo come al solito la somma e il prodotto di due elementi x, y di R con i simboli $x + y$ ed $x \cdot y$ (o più semplicemente xy).

Diciamo che R è un *preanelloide destro* se esso soddisfa le seguenti condizioni:

I) *R è un gruppo nilpotente rispetto alla somma.*

II) *Scelti comunque due elementi a, x in R, il loro prodotto ax è un elemento di R; inoltre, indicati con 0 lo zero di R* (cioè l'elemento neutro rispetto alla somma) *e con α la caratteristica di a nel gruppo additivo di R, risulta*

$$\alpha(ax) = 0. \tag{1_2}$$

Si osservi che la (1_2) è senz'altro verificata quando la caratteristica α di a è uguale al numero zero [7] (ed allora il preanelloide è certamente infinito).

Nel caso $\alpha > 1$ la (1_2) mette in luce che la caratteristica del prodotto ax è uguale ad α oppure ad un suo divisore.

Infine nel caso $\alpha = 1$ l'elemento a coincide con l'elemento 0 di R, e la (1_2) porge, qualunque sia x,

$$0.x = 0 \tag{2_2}$$

(non è detto che debba aversi pure $x.0 = 0$).

In modo del tutto analogo ai preanelloidi destri si definiscono i preanelloidi sinistri: basta sostituire nella II) la relazione (1_2) con la condizione

$$\alpha(xa) = 0. \tag{$1'_2$}$$

Per i preanelloidi sinistri risulta $x.0 = 0$ comunque si scelga l'elemento x.

[7] Si ricordi che, per le convenzioni che definiscono i multipli di un elemento g di un gruppo additivo, si ha $0 \cdot g = 0$ (in questa relazione il primo 0 indica il numero zero, il secondo indica l'elemento neutro del gruppo).

Un insieme R che sia ad un tempo preanelloide destro e preanelloide sinistro (rispetto alle stesse operazioni di somma e prodotto) verrà detto *preanelloide bilatero* (8). In un siffatto sistema R si avrà, per qualunque scelta di x,

$$x.0 = 0.x = 0. \tag{3_2}$$

Introducendo la struttura di preanelloide si è rinunciato quasi del tutto ad alcune delle più importanti proprietà degli anelli ordinari, cioè alla commutatività della somma, all'associatività del prodotto e alla distributività del prodotto rispetto alla somma. Non crediamo che si possa lavorare efficacemente con preanelloidi infiniti (ad esempio, quando gli elementi non nulli di un preanelloide bilatero hanno tutti caratteristica zero, l'unico vincolo per il prodotto è dato dalle (3_2), e le due operazioni sono evidentemente troppo libere!). I preanelloidi finiti sono invece strutture abbastanza vincolate, sebbene il legame tra le due operazioni sia più debole dell'ordinaria legge distributiva. La loro introduzione in questo lavoro ha uno scopo essenzialmente critico (e lo stesso dicasi per i vari anelloidi che compariranno nei paragrafi successivi): si tratta di vedere fino a che punto si possono stabilire teoremi "tipo SYLOW,, per sistemi a doppia composizione; e questo programma sarà realizzato parzialmente fra poco.

Giova tuttavia osservare che *gli anelli ordinari sono particolari preanelloidi bilateri.*

Infatti il gruppo additivo di un anello è certamente nilpotente (perchè abeliano); inoltre, per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. le relazioni

$$\alpha(ax) = (\alpha a)x$$

$$\alpha(xa) = x(\alpha a)$$

sono valide comunque si scelgano l'intero relativo α e gli elementi a, x nell'anello, sicchè quando α è uguale alla caratteristica di a, risulta appunto $\alpha(ax) = \alpha(xa) = 0$ (poichè $\alpha a = 0$).

(8) Dato un gruppo additivo nilpotente esso diventa un preanelloide bilatero ponendo ad es. $a \cdot x = 0$ per qualunque scelta di a ed x; diventa invece un preanelloide destro ponendo ad es. $ax = a$. Un esempio meno banale compare nella successiva nota (18) a piè di pagina.

Introduciamo ora gl'ideali, l'unità ed i divisori dello zero di un preanelloide destro (sinistro) R, in modo che essi si riducano ai ben noti enti dello stesso nome nel caso che R sia un anello.

Un sottoinsieme I di R viene detto *ideale destro* di R se soddisfa le seguenti condizioni:

1) I è un *preanelloide subordinato* di R, cioè gli elementi di I formano un preanelloide destro (sinistro) rispetto alle stesse leggi di composizione definite in R; [9]

2) comunque si scelgano un elemento i di I ed un elemento x in R il prodotto ix appartiene ad I.

Se alla 2) si sostituisce la condizione che l'elemento xi appartenga ad I, diremo che I è un *ideale sinistro* di R; e se l'insieme I è tanto ideale destro quanto ideale sinistro diremo che esso è un *ideale bilatero* o più semplicemente un *ideale* di R.

Se R è un preanelloide destro (sinistro, bilatero), l'elemento 0 costituisce da solo un ideale destro (sinistro, bilatero); l'intero insieme R è pure un ideale di R. Diremo che lo zero ed R sono ideali impropri di R.

Ogni ideale, sinistro o destro che sia, (e cosippure ogni preanelloide subordinato di R) ammette come elemento zero lo zero di R.

Come in teoria degli anelli si verifica facilmente che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un sottoinsieme I di R sia un ideale destro (sinistro) di R è che, scelti comunque due elementi i_1, i_2 in I ed un elemento x in R, appartengano ad I tanto la differenza $i_1 - i_2$ quanto il prodotto ix (il prodotto xi).

Un elemento $u \neq 0$ di R viene detto unità, se si ha

$$xu = ux = x$$

comunque si scelga x in R. Non è detto che un preanelloide R sia sempre dotato di unità; tuttavia se questa esiste è unica.

L'unità u non appartiene ovviamente a nessun ideale proprio (destro o sinistro) del preanelloide [10].

[9] Se R è un anello, i preanelloidi subordinati di R sono gli ordinari sottoanelli.

[10] Quando il preanelloide R è finito tutti i suoi elementi hanno caratteristica positiva; fra le varie caratteristiche ve n'è una massima che è multipla di tutte le altre, e prende il nome di *caratteristica del preanelloide*. L'unità di R, se esiste, ha caratteristica uguale alla suddetta caratteristica massima. Le verifiche di queste proprietà (ovvie estensioni di analoghe proprietà degli anelli) sono molto semplici e le lasciamo al lettore.

Infine diremo che un elemento $a \neq 0$ è un *divisore dello zero* in R, se esiste un elemento $b \neq 0$ (eventualmente coincidente con a) il quale verifichi almeno una delle due relazioni $ab = 0$, $ba = 0$ L'ordine di un insieme sará, come al solito, il numero dei suoi elementi.

3. Entriamo ora nel vivo dell'argomento, dimostrando il

TEOREMA 1. – *Si consideri un preanelloide destro finito R il quale abbia ordine*

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

($k > 1$; $\alpha_i \geq 1$; $p_1, p_2, \dots, p_k$ fattori primi distinti di N).

In corrispondenza di ogni fattore di Sylow $p_i^{\alpha_i}$ dell'ordine N il preanelloide possiede uno ed un solo ideale destro [11] *avente ordine $p_i^{\alpha_i}$* (che chiameremo ideale di SYLOW relativo al fattore p_i ed indicheremo col simbolo $S(p_i)$).

Cosippure, in corrispondenza di ogni fattore μ di Hall dell'ordine N,

$$\mu = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r},$$

il preanelloide possiede uno ed un solo ideale destro d'ordine μ (lo chiameremo ideale di HALL relativo ai fattori primi $p_1, \dots, p_r$ e lo indicheremo col simbolo $H(p_1, \dots, p_r)$)

Essendo i fattori di SYLOW particolari fattori di HALL, basta dimostrare il teorema in relazione ad un fattore μ di HALL.

Poichè il gruppo additivo R^+ del preanelloide R è un gruppo nilpotente, esso possiede un unico sottogruppo H (di Hall) avente ordine uguale a μ, e tale sottogruppo è ovviamente nilpotente come tutti i sottogruppi di R^+ (cfr. il n. 1); pertanto un eventuale ideale d'ordine μ del preanelloide deve necessariamente coincidere con H. Per verificare che gli elementi di H costituiscono un ideale destro di R basta provare che

a) la differenza di due elementi di H appartiene ad H (e ciò è vero perchè H è un sottogruppo di R^+);

b) il prodotto hx di un qualunque elemento h di H per un elemento arbitrario x di R appartiene ad H.

[11] Non si esclude l'eventualità che l'ideale in esame sia bilatero. L'osservazione è valida anche per altri casi simili che si presenteranno nel seguito.

A tale scopo ricordiamo che, detta ν la caratteristica di h, la definizione di preanelloide destro impone che sia

$$\nu(hx) = 0:$$

ciò significa che la caratteristica ν' dell'elemento hx è uguale a ν oppure ad un suo divisore.

D'altra parte l'ipotesi che H sia un sottogruppo di HALL di ordine $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ del gruppo nilpotente R^+ ci permette di affermare che la caratteristica ν di un suo elemento h è del tipo $p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ $(0 \leq \beta_1$, ecc.); quindi anche ν' è del tipo $p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$. Ciò basta per concludere che l'elemento hx appartiene anch'esso ad H (Cfr. il n. 1).

OSSERVAZIONE 2. – Se invece di un preanelloide destro si considera un *preanelloide sinistro* R, si ottiene un enunciato del tutto analogo al Teorema 1. *Si hanno allora ideali sinistri di Sylow e di Hall. Se poi R è un preanelloide bilatero gli ideali di Sylow e di Hall sono pure bilateri; ciò avviene, per esempio, quando R è un anello*

OSSERVAZIONE 3. – *Gli eventuali preanelloidi subordinati S_λ ed H_ν di R i quali abbiano ordini del tipo*

$$\lambda = p_1^{\gamma_1} \quad (\gamma_1 < \alpha_1)$$

$$\nu = p_1^{\gamma_1} \dots p_r^{\gamma_r} \quad (0 \leq \gamma_1 \leq \alpha_1 \text{; ecc.}),$$

sono rispettivamente contenuti nell'ideale di Sylow $S(p_1)$ e nell'ideale di Hall $H(p_1, \dots, p_r)$.

Ciò dipende dal fatto che i gruppi additivi di S_λ ed H_ν sono contenuti rispettivamente nei gruppi additivi di $S(p_1)$ $H(p_1, \dots, p_r)$ ([12]). In particolare $S(p_1)$ ed $H(p_1, \dots, p_r)$ sono gli unici preanelloidi subordinati del proprio ordine.

OSSERVAZIONE 4. – In un *preanelloide bilatero* finito R si considerino due elementi h, h' appartenti a due ideali di HALL, H H', aventi ordini μ, μ' primi fra loro (non si esclude che H, ed eventualmente H', sia un ideale di SYLOW).

([12]) Tutto questo perchè gli elementi di S_λ ed H_ν hanno caratteristiche rispettivamente del tipo $p_1^{\beta_1}$ e $p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ (cfr. i richiami preliminari del n. 1).

Il prodotto dei due elementi h ed h' è certamente uguale allo zero di R. In altri termini *gli elementi non nulli di un ideale di Sylow o di Hall sono divisori dello zero* [13].

Infatti, per definizione d'ideale bilatero, l'elemento hh' deve appartenere tanto ad H quanto ad H'; ma poichè H ed H' hanno ordini primi fra di loro, essi hanno in comune soltanto lo zero; di qui l'asserto.

CAP. III. - **Ulteriori osservazioni sugli anelloidi.**

4. Un preanelloide destro (sinistro, bilatero) il cui gruppo additivo sia *abeliano* verrà detto *anelloide* destro (sinistro, bilatero) [14].

Gli anelli sono particolari anelloidi bilateri.

I preanelloidi subordinati di un anelloide R sono anch'essi degli anelloidi, e verranno chiamati *sottoanelloidi*. Se R è un anello, i suoi sottoanelloidi coincidono con i sottoanelli ordinari.

Si verifica senza difficoltà che la condizione caratteristica affinchè un sottoinsieme H di un anelloide R sia un sottoanelloide di R è che, scelti comunque due elementi h, h' di H, la differenza $h - h'$ ed il prodotto hh' appartengano ad H.

Diremo che un anelloide è *commutativo* se il prodotto di due suoi elementi qualsiansi gode della proprietà commutativa.

Dimostriamo ora una proprietà molto semplice che si rivelerà utile nella parte finale della trattazione e servirà tra l'altro a mettere in luce che un anelloide finito può possedere talvolta, accanto agl'ideali di SYLOW e di HALL, qualche altro ideale.

LEMMA 5. - *Si consideri un anelloide destro R, eventualmente infinito, e si supponga che esso possegga almeno un elemento* g *avente caratteristica* $\nu > 1$ [15].

(13) Non è detto però che gli elementi in esame siano i soli divisori dello zero di R. Cfr. per questo il successivo n. 7 (teorema 8).

(14) I nostri anelloidi non coincidono con gli enti dello stesso nome che compaiono in N. BOURBAKI, *Algèbre, Chapitre I: Structures algébriques*, Hermann, Paris (19 2); p. 138.

(15) Si verifica facilmente che in un anelloide destro (sinistro) *infinito* la totalità degli elementi aventi caratteristica diversa da zero costituisce un ideale destro (sinistro).

Per la dimostrazione basta ricordare che in un gruppo abeliano additivo R^+ l'insieme degli elementi aventi caratteristica positiva è un sottogruppo di R^+.

L'insieme G degli elementi di R le cui caratteristiche sono divisori dell'intero ν (inclusi i numeri 1 e ν) *è un ideale destro di* R [16].

Siano g, g' due elementi qualsiansi di G ed x un elemento arbitrario di R. Per dimostrare il Lemma occorre verificare che gli elementi $g-g'$ e gx appartengono a G.

Per ipotesi si ha

$$\nu g = 0, \qquad \nu g' = 0,$$

quindi $\nu(g-g') = 0$ [17], epperò $g-g'$ ha caratteristica uguale ad un divisore di ν ed appartiene a G.

D'altra parte se g ha caratteristica α deve essere $\alpha(gx) = 0$ (ciò perchè g ed x sono elementi di R, e questo è un particolare preanelloide destro; si ricordi la definizione di preanelloide data all'inizio del n. 2). Ne segue che l'elemento gx ha caratteristica uguale ad α oppure ad un suo divisore; ed essendo α un divisore di ν per ipotesi, la caratteristica di gx risulta un divisore di ν.

Si conclude che gx appartiene a G.

OSSERVAZIONE 6. - È ovvio che, se invece di un anelloide destro si considera un anelloide sinistro (bilatero) R, si ottiene un enunciato del tutto analogo al Lemma 5. L'insieme G risulta allora un ideale sinistro (bilatero) di R.

DEFINIZIONE. - Chiameremo *anelloide ciclico* un anelloide (destro o sinistro che sia) avente il gruppo additivo ciclico [18].

[16] Quando l'anelloide R ha ordine finito N, l'ordine λ di G non dipende soltanto da ν e da N, ma anche dalla base del gruppo additivo R^+ dell'anelloide (si pensi ad es. al caso $N=4$, $\nu=2$). E poichè R^+ è somma diretta dei suoi sottogruppi di SYLOW, il problema di valutare l'ordine λ viene ricondotto all'analogo problema per un gruppo abeliano additivo d'ordine p^α (p primo). La relativa soluzione può essere trovata in R. CARMICHAEL, *Introduction to theory of groups of finite order*, Dover Publ., New York, (1956) p. 103.

[17] Qui gioca l'ipotesi che il gruppo additivo di R è abeliano.

[18] Nel n. 9 dimostreremo che ogni anelloide *distributivo* ciclico è un anello commutativo. Pertanto conviene dare un esempio di anelloide finito ciclico che non sia distributivo e quindi non sia un anello. Consideriamo l'insieme R formato da quattro elementi a, b, c, 0, i quali formino un gruppo additivo ciclico del 4° ordine generato da a ed avente l'ele-

OSSERVAZIONE 7. – *Sia R un anelloide ciclico il quale abbia ordine finito N. In corrispondenza di ogni divisore ν dell'ordine N l'anelloide possiede un unico sottoanelloide d'ordine ν.*

Più precisamente: ogni sottogruppo G del gruppo additivo di R è un sottoanelloide di R, ed a seconda che R sia un anelloide destro, sinistro, bilatero, il sottoanelloide G risulta un ideale destro, sinistro, bilatero (come al solito dicendo "ideale destro", o sinistro, non escludiamo che l'ideale stesso possa essere bilatero).

Per la dimostrazione si osservi che il gruppo additivo R^+ dell'anelloide, essendo ciclico, possiede un unico sottogruppo G d'ordine ν in corrispondenza di ogni divisore ν di N. Il sottogruppo G è anch'esso ciclico ed è l'insieme di tutti gli elementi di R che hanno caratteristica uguale a ν o ad un divisore di ν. In virtù del Lemma 5 possiamo dunque affermare che G è un ideale di R.

Se invece l'anelloide ciclico R è infinito, non è detto che esso possieda un sottoanelloide in corrispondenza di ogni sottogruppo del suo gruppo additivo (a meno che non s'introducano ulteriori ipotesi, come nel successivo teorema 9).

Ad esempio si supponga che R sia l'insieme dei numeri interi relativi e che la somma sia l'addizione ordinaria. Il prodotto di due elementi x, y di R venga definito dalle seguenti leggi: sia

mento 0 come elemento neutro; più precisamente supponiamo che sia

$$b = 2a \quad , \quad c = 3a \quad , \quad 0 = 4a.$$

Introduciamo in R un prodotto, in guisa che risulti

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad , \quad b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0 \quad , \quad c \cdot 0 = 0 \cdot c = 0 \quad , \quad 0 \cdot 0 = 0 \quad :$$

ed inoltre si abbia

$$\begin{array}{lll} a^2 = a \quad , & ab = b \quad , & ac = a \\ ba = b \quad , & b^2 = 0 \quad , & bc = b \\ ca = 0 \quad , & cb = 0 \quad , & c^2 = b. \end{array}$$

L'insieme R diventa allora un anelloide bilatero ciclico del 4° ordine (lasciamo al lettore le relative verifiche), ma il prodotto in esso definito non solo non è commutativo, ma non è nè associativo, nè distributivo rispetto alla somma. Infatti risulta

$$ac \neq ca \ , \quad (ac)b \neq a(cb) \ , \quad a(b+c) \neq ab + ac \ , \quad (b+c) \cdot a \neq ba + ca$$

uguale a zero se almeno uno dei due fattori è nullo; sia uguale ad un numero dispari se i due fattori sono entrambi non nulli.

L'insieme R è un anelloide bilatero, ed il suo gruppo additivo R^+ è ciclico. Tuttavia il sottogruppo di R^+ costituito dall'insieme dei numeri pari non è un sottoanelloide di R.

Cap. IV - **Proprietà degl'ideali di Sylow di un anelloide distributivo finito.**

5. Chiamiamo *anelloide distributivo* un insieme R (eventualmente infinito) nel quale siano ovunque definite due leggi di composizione interne – somma e prodotto – in guisa che:

I) R sia un gruppo abeliano rispetto alla somma.

II) Valgano le due proprietà distributive (destra e sinistra) del prodotto rispetto alla somma.

Gli anelli ordinari sono particolari anelloidi distributivi caratterizzati dal fatto che in essi il prodotto è anche associativo (vari Autori riservano il nome di "anello non associativo" ad un anelloide distributivo che non sia un anello).

Gli anelloidi distributivi rientrano nella classe degli anelloidi bilateri ([19]).

I sottoanelloidi di un anelloide distributivo sono anch'essi anelloidi distributivi.

Diciamo *centro* di un anelloide R l'insieme degli elementi che sono permutabili (rispetto al prodotto) con un qualsiasi elemento di R. È noto che quando R è un anello il centro è un sottoanello di R. Ricordiamo pure che *se R è un anello privo di divisori dello zero accade che*:

1) *i suoi elementi non nulli hanno tutti la stessa caratteristica; questa è uguale al numero zero, oppure ad un numero primo p.*

2) *Se R è finito, esso ha ordine uguale ad una potenza p^α di un numero primo p.*

Queste due proprietà si estendono agli anelloidi distributivi privi di divisori dello zero ([20]).

([19]) La verifica è del tutto simile a quella indicata nel n 2 per provare che un anello è un particolare preanelloide bilatero.

([20]) Sebbene la cosa qui non interessi, osserviamo che le proprietà 1) e 2) rimangono valide anche lasciando cadere l'ipotesi che il gruppo

Ricordiamo infine che *un anello finito privo di divisori dello zero è un corpo* (anzi un campo) ([21]); questa proprietà non si può estendere agli anelloidi; esistono infatti anelloidi distributivi finiti privi di divisori dello zero i quali non sono anelli, e quindi non sono corpi ([22]).

6. Definiamo ora la somma diretta di sottoanelloidi di un anelloide in modo del tutto analogo a quanto si fa per la somma diretta di sottoanelli di un anello ([23]).

Siano dati $k > 1$ *sottoanelloidi* $S_1, S_2, \ldots, S_k$ di un anelloide distributivo R, ciascuno dei quali abbia più di un elemento. Diciamo che un *sottoinsieme* K *di* R (eventualmente coincidente

additivo dell'anelloide distributivo sia abeliano. La dimostrazione della 1) è identica a quella che si adduce di solito per gli anelli nei vari trattati (ad es. in JACOBSON, *Lectures in abstract algebra*, Van Nostrand, New York (1951), p. 74) La (2) è una conseguenza immediata del teorema di CAUCHY (si allude a un noto corollario del 1° teorema di SYLOW; cfr. ad es KUROSH. l. c. in ([1]), vol. II, p. 150).

([21]) Cfr. ad es. B. SEGRE, *Lezioni di Geometria Moderna*, Zanichelli, Bologna, (1948), p. 15.

([22]) Si consideri un anelloide R formato da 4 elementi $0, a, b, c$, tali che il gruppo additivo di R abbia l'elemento 0 come elemento neutro e sia un gruppo abeliano non ciclico del 4° ordine (si avrà dunque $2a = 2b = 2c = 0$, $a + b = c$, $b + c = a$, $c + a = b$). Introduciamo il prodotto in modo che si abbia:

$$0 \cdot 0 = 0 \quad , \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad , \quad b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0 \quad , \quad c \cdot 0 = 0 \cdot c = 0.$$

Inoltre il prodotto degli elementi non nulli sia dato dalla tabella:

$$\begin{array}{ccccc} a^2 = b & , & ba = a & , & ca = c \\ ab = a & , & b^2 = c & , & cb = b \\ ac = c & , & bc = b & , & c^2 = a. \end{array}$$

Si verifica facilmente che R è un anelloide distributivo (ovviamente commutativo e privo di divisori dello zero) il quale non è un anello perchè il prodotto non è associativo. Risulta infatti $(ab)b \neq a(bb)$; inoltre R *non possiede sottoanelloidi di ordine* 2, poichè a^2 non coincide nè con a nè con 0; ecc.... Quest'ultima proprietà ci servirà nel seguito.

([23]) Cfr. ad es. ZARISKI-SAMUEL, *Commutative Algebra*, Van Nostrand, New York, (1958), Vol. I, p. 175; o anche N. BOURBAKI, l. c. in ([14]), p 133.

Il BOURBAKI preferisce chiamare la somma diretta di sottoanelli col termine « composé direct de sous-anneaux ».

con R) *è somma diretta di* $S_1, \dots, S_k$, *se sono soddisfatte le due condizioni sottoindicate* A) *e* B):

A) *L'insieme* K *è la totalità degli elementi* x *di* R *che si possono rappresentare in uno ed un solo modo come somma di* k *elementi* $x_1, x_2, \dots, x_k$ *estratti rispettivamente da* $S_1, S_2, \dots, S_k$.

Inoltre ogni elemento di ciascuno degli insiemi $S_1, S_2, \dots, S_k$ *deve essere permutabile rispetto alla somma con ogni elemento di ciascuno dei rimanenti sottoinsiemi* (questa condizione di permutabilità è superflua nel caso degli anelloidi distributivi che stiamo ora trattando, perchè la somma è supposta *commutativa*; la condizione è però necessaria per certe estensioni di cui parleremo nel n. 8).

Tenuta presente la definizione di somma diretta di sottogruppi di un gruppo additivo ([24]), *la condizione* A) *equivale alla proprietà che l'insieme* K *sia un sottogruppo del gruppo additivo* R^+ *di* R *e sia somma diretta dei gruppi additivi dei sottoanelloidi* $S_1, S_2, \dots, S_k$.

B) *Per ogni coppia di elementi* x_i, y_h *estratti da due sottoanelloidi* S_i, S_h $(i \neq h)$ *dev'essere* $x_i y_h = 0$.

Gli elementi $x_1, x_2, \dots, x_k$ vengono detti componenti di x rispetto ai sottoanelloidi $S_1, S_2, \dots, S_k$.

Due elementi di K

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_k \tag{1_4}$$

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_k \tag{2_4}$$

sono uguali se, e solo se, risulta $x_i = y_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$.

L'elemento 0 appartiene ovviamente a K ed ha tutte le componenti nulle.

Un elemento x_r di S_r appartiene pure a K ed ha nulle tutte le componenti all'infuori dell'r^{ma}, che è appunto uguale ad x_r. Dalla condizione A) si deduce che due sottoanelloidi distinti S_i, S_h hanno in comune soltanto lo zero di R.

([24]) Cfr. ad es. ZAPPA, l. c. in ([1]), p. 97; B. L. VAN DER WAERDEN, *Modern Algebra*, Chelsea Publishing Comp. New York, (1950), Volume 1, p. 147; P. DUBREIL et M. L DUBREIL-JACOTIN, *Leçons d'Algèbre Moderne*, Dunod, Paris (1961); p. 263. Nelle opere qui citate si usa però la nomenclatura moltiplicativa invece di quella additiva.

Per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, il prodotto di due elementi x, y dati dalle 1_4), 2_4), ha l'espressione

$$xy = \Sigma x_i y_i + \Sigma x_i y_h \quad (i,\ h = 1,\ 2, \ldots,\ k;\ i \neq h)$$

Ma per la condizione B) i termini della seconda sommatoria sono tutti nulli, quindi risulta

$$(3_4) \qquad xy = \Sigma x_i y_i\,;$$

e poichè ogni prodotto parziale $x_i y_i$ appartiene al sottoanelloide S_i (x_i, y_i sono elementi di S_i), accade che il prodotto di due elementi x, y di K è anch'esso un elemento di K. D'altra parte pure la differenza $x - y$ dei due elementi x, y, avendo l'espressione

$$x - y = \Sigma(x_i - y_i) \text{ (}^{25}\text{)}$$

è un elemento di K (perchè $x_i - y_i \in S_i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, k$).

Pertanto *l'insieme K è un sottoanelloide di R*; di più risulta

$$x_r y = x_r y_r \in S_r$$

$$y x_r = y_r x_r \in S_r \quad ,$$

comunque si scelga l'elemento y di K dato dalla (2_4); laonde *ogni sottoanelloide S_r è un ideale* (bilatero) *del sottoanelloide K.*

Esponiamo ora alcune semplici proprietà della somma diretta K, in gran parte estensioni immediate di risultati analoghi della teoria degli anelli ([26]). Tali proprietà verranno applicate fra poco ai problemi "tipo SYLOW" relativi agli anelloidi distributivi finiti.

Poichè risulta

$$(4_4) \qquad yx = \Sigma y_i x_i\,,$$

([25]) Questa relazione è vera anche quando si lasci cadere l'ipotesi che il gruppo additivo di R sia abeliano, perchè, per definizione di somma diretta, ogni elemento x_i di S_i è permutabile *rispetto alla somma* con ogni elemento y_h di S_h per qualunque $i \neq h$.

([26]) Cfr. ad es. ZARISKI-SAMUEL, oppure N. BOURBAKI, l. c. in ([23]).

dal confronto della (3_4) con la (4_4) si deduce che $xy = yx$ se, e solo se, si ha $x_i y_i = y_i x_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots k$; epperò *K è un anelloide commutativo se, e solo se, tutti gli addendi S_i sono commutativi.*

Il confronto delle (3_4), (4_4) mette anche in evidenza che in K un elemento y è permutabile con un elemento arbitrario x (cioè y appartiene al centro di K) se, e solo se, ogni componente y_i di y è permutabile con la corrispondente componente x_i di x (il che significa che y_i appartiene al centro di S_i).

Pertanto *se K è un anello* si ricava – cosa del resto ben nota – che *il centro di K è la somma diretta dei centri degli addendi $S_1, S_2, \dots S_k$.* Si vede subito che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento

$$u = u_1 + u_2 \dots + u_k$$

dell'anelloide distributivo K sia *l'unità* di K è che le sue componenti $u_1, u_2, \dots u_k$ siano diverse da zero e siano le unità degli addendi $S_1, S_2, \dots, S_k$.

Introduciamo ora un terzo elemento variabile in K

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_k .$$

Si ha

$$(xy)\,z = \Sigma(x_i y_i) z_i , \qquad x(yz) = \Sigma x_i (y_i z_i)$$

quindi risulta $(xy)z = x(yz)$ se, e solo se, si ha

$$(x_i y_i) z_i = x_i (y_i z_i)$$

per ogni $i = 1, 2, \dots, k$.

Si deduce che *l'anelloide distributivo K è un anello* (cioè il prodotto definito in esso è associativo) *se, e solo se, i singoli addendi $S_1, S_2, \dots, S_k$ sono anelli* [27].

Se gli addendi $S_1, S_2, \dots, S_k$ di K sono più di due, è lecito parlare di somma diretta di h addendi $(1 < h < k)$ scelti comun-

[27] Questa proprietà risulta vera anche quando si lasci cadere l'ipotesi che il gruppo additivo R^+ dell'anelloide ambiente R sia abeliano Basta osservare (in aggiunta alle considerazioni precedenti) che il gruppo additivo K^+ della somma diretta K $(K \subset R)$ è abeliano, se, e solo se, i gruppi additivi degli addendi $S_1, S_2, \dots, S_k$ sono abeliani.

que fra di essi; si verifica facilmente che questa nuova somma diretta, che verrà indicata col simbolo H_j, è un ideale di K.

Gli elementi non nulli appartenenti agli addendi S_i oppure agli ideali H_j sono ovviamente divisori dello zero di K; infatti, se un certo H_j è ad esempio somma diretta di $S_1, S_2, \ldots, S_h$, esiste almeno un altro addendo S_r della somma K, diverso dai precedenti, tale che, comunque si scelgano due elementi non nulli x, y, il primo in H_j, il secondo in S_r, si ha $xy = 0$.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'anelloide K possieda per divisori dello zero soltanto gli elementi appartenenti ai vari ideali S_i ed H_j è che ciascuno degli addendi S_i – pensato come anelloide a se stante – *sia privo di divisori dello zero.*

Invero, se esiste un divisore dello zero non appartenente a nessuno degli ideali S_i ed H_j, accade che un tale elemento

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

ha tutte le componenti non nulle, ed esiste in R un altro elemento non nullo

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$$

tale che $xy = 0$, quindi $\Sigma x_i y_i = 0$. Tutto ciò è possibile se, e solo se, qualche anelloide S_i ammette divisori dello zero.

Osserviamo infine che le proposizioni enunciate in questo numero continuano a sussistere anche lasciando cadere l'ipotesi che il gruppo additivo dell'anelloide ambiente R sia abeliano (tutto ciò segue immediatamente dall'esame delle dimostrazioni qui esposte).

7. Fatte le premesse necessarie, mostriamo ora come lo studio di vari problemi relativi ad un anelloide distributivo finito possa essere limitato agli anelloidi aventi ordine uguale ad una potenza di un numero primo.

Sia R un *anelloide distributivo di ordine*

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

($p_1, p_2, \ldots, p_k$ numeri primi distinti; $k \geq 2$).

Poichè R è un particolare preanelloide bilatero, si deduce dal Teorema 1 (n. 3) che *R possiede un unico ideale $S(p_i)$ d'ordine*

$p_i^{\alpha_i}$ in corrispondenza di ogni fattore di Sylow $p_i^{\alpha_i}$ dell'ordine N; e se i fattori di Sylow sono almeno tre, R possiede un unico ideale $H(p_1, \dots p_r)$ d'ordine $\mu = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ in corrispondenza di ogni fattore μ di Hall dell'ordine N. I vari ideali $S(p_i)$ ed $H(p_1, \dots p_r)$ sono rispettivamente i cosidetti ideali di Sylow e di Hall dello anelloide R, e sono tutti bilateri (si ricordi l'osservazione 2 del n. 3).

D'altra parte, poichè i gruppi additivi R^+ ed H^+ dell'anelloide R e dell'ideale $H(p_1, \dots, p_r)$ sono nilpotenti (perchè abeliani), accade che R^+ possiede un unico sottogruppo di Sylow $S^+(p_i)$ d'ordine $p_i^{\alpha_i}$, e questo è proprio il gruppo additivo dell'ideale $S(p_i)$; inoltre è ben noto che R^+ risulta somma diretta dei suoi sottogruppi di Sylow, ed H^+ è somma diretta di $S^+(p_1), \dots, S^+(p_r)$ (si ricordino i preliminari del n. 1 sui gruppi nilpotenti). Infine, se teniamo conto anche del fatto che il prodotto di due elementi arbitrari x_i, y_h appartenenti ad ideali di Sylow differenti è uguale allo zero di R (osservazione 4 del n. 3), possiamo enunciare, in base alla definizione di somma diretta di sotto-anelloidi (n. 6), il

Teorema 8. – *Un anelloide distributivo R d'ordine*

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

è somma diretta dei suoi ideali di Sylow $S(p_1)$, $S(p_2)$, ..., $S(p_k)$, ed ogni suo ideale H di Hall d'ordine $\mu = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ è somma diretta degl'ideali di Sylow $S(p_1)$, ..., $S(p_r)$.

Inoltre, in virtù delle proprietà delle somme dirette enunciate nel n. 6, si può senz'altro affermare che:

a) *il suddetto anelloide R è commutativo se, e solo se, i suoi ideali di Sylow sono tutti commutativi;*

b) *R possiede un'unità* u *se, e solo se, ogni ideale di Sylow $S(p_i)$ possiede un'unità* u_i. *Allora* u *risulta somma delle varie* u_i.

c) *Gli elementi non nulli appartenenti ai vari ideali di Sylow e di Hall dell'anelloide R sono divisori dello zero in R. La condizione necessaria e sufficiente affinchè essi siano i soli divisori dello zero in R è che ciascuno degl'ideali di Sylow – pensato come anelloide a se stante – risulti privo di divisori dello zero.*

d) *R è un anello se, e solo se, ognuno dei suoi ideali di*

Sylow è un anello. In tal caso il centro di R risulta la somma diretta dei centri dei suoi ideali di Sylow [28].

8. Definiamo *preanelloide distributivo* un insieme R (eventualmente infinito) nel quale siano ovunque definite due leggi di composizione interne - somma e prodotto - in guisa che:

I) Gli elementi di R formino un gruppo *nilpotente* rispetto alla somma;

II) valgano le due proprietà distributive (destra e sinistra) del prodotto rispetto alla somma.

Si vede senza difficoltà che un preanelloide distributivo R è un particolare preanelloide bilatero (la verifica è del tutto simile a quella indicata nel n. 2 per provare che un anello è un preanelloide bilatero).

Ovviamente gli anelloidi distributivi introdotti nel n. 5 rientrano nella classe dei preanelloidi distributivi, in quanto il loro gruppo additivo (essendo abeliano) è un gruppo nilpotente.

Orbene la trattazione svolta nei n.n. 6, 7 a proposito degli anelloidi distributivi può essere ripetuta senza cambiamenti di sorta per un preanelloide distributivo R (con la convenzione di chiamare ancora sottoanelloidi i preanelloidi subordinati di R, e di ritenere *commutativo* un preanelloide in cui il prodotto sia commutativo).

Infatti in detta trattazione l'ipotesi che il gruppo additivo di R sia abeliano non interviene mai in modo essenziale, perchè le proprietà dei gruppi abeliani ivi adoperate sono godute pure dai gruppi nilpotenti più generali.

Dunque *il teorema 8 continua a sussistere anche quando nel suo enunciato si sostituiscano gli anelloidi distributivi con i preanelloidi distributivi.*

(28) Si verifica senza difficoltà che in un anello finito R ogni elemento *nilpotente* x di esponente $h > 1$ (ciò significa che $x^h = 0$, ed h è il minimo esponente per cui la cosa si verifica) *appartiene a qualche ideale di Sylow oppure è somma di elementi nilpotenti dello stesso esponente h appartenenti ad ideali di Sylow differenti.*

Una proprietà analoga è goduta da un elemento *idempotente* (cioè da un elemento non nullo x per cui si abbia $x^2 = x$).

CAP. V. - Qualche condizione sufficiente affinchè un anelloide distributivo sia un anello commutativo.

9. Esponiamo ora alcuni criteri molto semplici i quali permettono di decidere che, in certe condizioni, un anelloide distributivo è un anello commutativo.

Precisiamo dapprima le considerazioni svolte nell'osservazione 7 in relazione agli anelloidi ciclici.

TEOREMA 9. - *Sia R un anelloide distributivo ciclico (eventualmente infinito). R è un anello commutativo. ed ogni sottogruppo del suo gruppo additivo è un ideale.*

Si supponga inoltre che R sia dotato di unità. Allora R risulta isomorfo all'anello degli interi relativi oppure all'anello delle classi di resti mod. N, *a seconda che l'anelloide stesso sia infinito oppure abbia ordine N* ([29]).

La proprietà è da ritenersi nota almeno parzialmente, tuttavia per comodità del lettore ne presentiamo una dimostrazione.

Indichiamo con a un generatore del gruppo additivo ciclico R^+ dell'anelloide R, e consideriamo tre elementi qualsiansi di R,

$$x = ma, \qquad y = na, \qquad z = qa,$$

ove m, n, q sono numeri interi relativi.

Poichè il prodotto gode della proprietà distributiva rispetto alla somma, si ha

$$xy = (ma)\ (na) = (mn)a^2,$$

$$yx = (na)\ (ma) = (nm)a^2;$$

dunque il prodotto è commutativo.

D'altra parte risulta

$$(xy)z = [(mn)a^2](qa) = (mnq)[a^2 \cdot a]$$

$$x(yz) = (ma)[(nq)a^2] = (mnq)[a \cdot a^2]$$

([29]) Di qui si deduce facilmente che, se un anelloide distributivo *non ciclico* possiede un'unità u, i multipli mu dell'unità (m: intero relativo) formano un anello ciclico, il quale è isomorfo all'anello degli interi relativi oppure all'anello delle classi di resti mod. N, a seconda che la caratteristica di u sia uguale al numero zero oppure ad un numero N.

ed essendo $a^2 \cdot a = a \cdot a^2$ (per la commutatività del prodotto), si ottiene

$$(xy)z = x(yz),$$

epperò il prodotto è anche associativo. Ciò basta per concludere che l'anelloide R è un anello commutativo.

Dimostriamo ora che ogni sottogruppo proprio H^+ del gruppo additivo R^+ è un ideale di R (nel caso finito la cosa è vera indipendentemente dal fatto che l'anelloide R sia distributivo; cfr. l'osservazione 7).

Invero H^+ è anch'esso un gruppo ciclico ([30]), laonde risulta generato da un elemento $b = ra$ (dove r è intero positivo): gli elementi di H^+ sono quindi del tipo

$$h = sb = (sr)a$$

ove s è un intero relativo. Per provare che gli elementi di H^+ costituiscono un ideale di R, basta verificare che il prodotto di un elemento qualsiasi $h \in H^+$ per un elemento arbitrario $x = ma$ dell'anello R appartiene ancora ad H^+. Invero

$$hx = [(sr)a][ma] = (srm)a^2,$$

e poichè a^2 è un elemento di R ed è così del tipo $t\,a$ (t intero relativo), risulta

$$hx = (srmt)a = (smt)\ (ra) = (smt)b;$$

perciò anche hx è un multiplo di b ed appartiene ad H.

Introduciamo ora l'ipotesi che l'anello ciclico R sia dotato di un'unità u. Poichè u non appartiene a nessun ideale proprio di R, e di conseguenza – per quanto detto sopra – a nessun sottogruppo del gruppo additivo R^+, si può affermare che u è anch'esso un generatore di R^+, sicchè ogni elemento di R è del tipo mu (con m intero relativo).

Orbene, se R è infinito, l'isomorfismo tra R e l'anello degli interi relativi si ottiene ovviamente associando ad ogni elemento mu di R l'intero m; se invece R ha ordine finito N, l'isomorfismo tra R e l'anello delle classi di resti *mod* N si ottiene as-

([30]) Cfr. ad es. ZAPPA, l. c. in ([1]), p. 51.

sociando ad ogni elemento mu di R ($m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$) la classe di resti $\{m\}$ individuata da m.

Con ciò il Teorema è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE 10. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché un anelloide R d'ordine $N = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$* ($p_1, \ldots, p_k$ numeri primi distinti) *sia ciclico è che i suoi ideali di Sylow siano tutti ciclici.*

La condizione è ovviamente necessaria. Infatti se R è ciclico ogni sottogruppo del suo gruppo additivo R^+ è ciclico, epperò lo sono anche i gruppi additivi degli ideali di SYLOW di R. Viceversa se gli ideali di SYLOW sono tutti ciclici, accade che il gruppo R^+ – essendo somma diretta dei gruppi additivi $S^+(p_1), \ldots, S^+(p_k)$ degli ideali di SYLOW – è anch'esso ciclico, perchè i predetti sottogruppi di R^+ sono ciclici ed hanno ordini $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ a due a due primi tra loro. Si noti che la proprietà in esame ha carattere essenzialmente gruppale ed è valida anche per anelloidi non distributivi.

Tenuto conto del fatto che un anelloide d'ordine *primo* p è ciclico, si può enunciare il

COROLLARIO 11. – *Un anelloide distributivo finito avente ordine primo p, oppure ordine $p_1 p_2 \ldots p_k$ uguale al prodotto di k numeri primi distinti, è un anello commutativo.*

Invero un anelloide siffatto è ciclico, e perciò è un anello commutativo (Teorema 9).

OSSERVAZIONE 12. – Passiamo ora ad una proprietà strettamente legata al Teorema 9.

Sia R un anelloide distributivo, eventualmente infinito, il cui gruppo additivo R^+ ammetta un numero finito di generatori; si supponga inoltre che ogni sottogruppo di R^+ sia un ideale bilatero di R ([31]).

Allora l'anelloide R è un anello commutativo ed è somma diretta di $r \geq 0$ ideali ciclici infiniti e di $s \geq 0$ ideali ciclici finiti aventi ordini uguali a potenze di numeri primi ([32]).

([31]) Un esempio banale di anelloide R che goda della proprietà in esame è dato da uno *zero-anello*, cioè da un anello in cui il prodotto di due elementi qualsiansi sia nullo.

([32]) Notiamo che se R non si riduce al solo elemento zero, almeno uno dei due numeri r ed s è diverso da zero. L'anelloide R è finito se, e solo se, si ha $r = 0$.

Ricordiamo che il gruppo abeliano R^+ – essendo per ipotesi dotato di un numero finito di generatori – può ritenersi *somma diretta* di $k = r + s$ sottogruppi *ciclici* $S_1, S_2, \ldots, S_k$, ciascuno dei quali o è infinito oppure ha ordine uguale ad una potenza di un numero primo [33].

Consideriamo ora due elementi x_i, y_h estratti da due dei predetti sottogruppi, diciamo S_i, S_h $(i \neq h)$. Poichè S_i ed S_h sono per ipotesi ideali di R, accade che il prodotto $x_i y_h$ appartiene ad entrambi. Inoltre S_i ed S_h hanno in comune soltanto lo zero (poichè R^+ è somma diretta di $S_1, S_2, \ldots, S_k$); perciò $x_i y_h = 0$.

Tenuta presente la definizione di somma diretta di sottoanelloidi richiamata nel n. 6, possiamo dunque affermare che l'anelloide distributivo R è somma diretta degl'ideali $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

D'altra parte i suddetti ideali sono anelloidi distributivi ciclici, epperò sono anelli commutativi (Teorema 9). Si conclude che la loro somma diretta è un anello commutativo (cfr. ancora il n. 6), e con ciò la proprietà è dimostrata.

Notiamo infine che la proprietà stessa non può essere invertita. Esistono infatti anelli commutativi che, pur risultando somme dirette d'ideali ciclici di ordine primo, non posseggono un ideale in corrispondenza di ogni sottogruppo del loro gruppo additivo [34].

(33) Si tenga presente il teorema della base principale dei gruppi abeliani. Cfr. ad es. ZASSENHAUS, l. c. in (1), p. 91 o anche ZAPPA, l. c. in (1), p. 120.

(34) Ad esempio si consideri l'anello R costituito da quattro elementi $0, a, b, c$, i quali rispetto alla somma formino un gruppo *non ciclico* del 4° ordine avente l'elemento 0 come elemento neutro; inoltre i prodotti degli elementi non nulli di R siano definiti nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccc} a^2 = a \quad , & ab = b \quad , & ac = c \\ ba = b \quad , & b^2 = b \quad , & bc = 0 \\ ca = c \quad , & cb = 0 \quad , & c^2 = c. \end{array}$$

(Lasciamo al lettore la verifica che l'insieme R munito delle suddette operazioni è effettivamente un anello).

Orbene, R è un anello commutativo che ammette l'elemento a come unità e possiede tre sottoanelli A, B, C, d'ordine 2 i quali sono formati rispettivamente dagli elementi $0, a$; $0, b$; $0, c$.

I sottoanelli B e C sono ideali di R; di più R è somma diretta di B e C. Tuttavia il sottoanello A non è un ideale di R.

10. Dimostriamo ora il

LEMMA 13 – *Un anelloide distributivo finito R, dotato di unità, il quale abbia ordine p^2 (p: numero primo) è un anello commutativo* (35).

In virtù del Teorema 9 possiamo senz'altro affermare che la proprietà suindicata è valida quando il gruppo additivo R^+ dell'anelloide R è ciclico (ed allora l'ipotesi che R sia dotato di unità appare superflua).

Supponiamo dunque che R^+ non sia ciclico: i suoi elementi non nulli avranno tutti caratteristica p, ed R^+ può considerarsi generato dall'unità u e da un altro elemento non nullo a, il quale non coincide con nessuno degli elementi $u, 2u, \ldots, (p-1)u$.

Ogni elemento di R è dunque del tipo $mu + na$, con $m, n = 0, 1, \ldots, p-1$.

Consideriamo tre elementi qualsiansi di R

$$x = m_1 u + n_1 a, \qquad y = m_2 u + n_2 a, \qquad z = m_3 u + n_3 a.$$

(35) Se si sopprime l'ipotesi che R sia dotato di unità, il Lemma 13 non è più vero. Esistono infatti anelloidi distributivi di ordine p^2, anzi addirittura degli anelli, i quali non sono commutativi.

Ad esempio, per $p = 2$ si consideri l'anello R costituito da quattro elementi $0, a, b, c$, i quali rispetto alla somma formino un gruppo non ciclico avente l'elemento 0 come elemento neutro; inoltre i prodotti degli elementi non nulli di R siano definiti nel modo seguente

$$\begin{array}{ccccc} a^2 = 0 & , & ba = a & , & ca = a \\ ab = 0 & , & b^2 = b & . & cb = b \\ ac = 0 & , & bc = c & , & c^2 = c \end{array}$$

(anche qui la verifica che l'insieme R munito delle operazioni suindicate sia un anello viene lasciata al lettore).

L'anello R evidentemente non è commutativo. Facciamo infine presente che la proprietà espressa dal Lemma 13 non si estende agli anelloidi distributivi dotati di unità ed aventi ordine p^α con $\alpha > 2$. Esistono ad esempio anelli non commutativi dotati d'unità ed aventi ordine 8 ($p = 2$, $\alpha = 3$). Il lettore provi a costruirne uno avente tutti gli elementi non nulli di caratteristica 2.

Per la distributività del prodotto rispetto alla somma si ha

$$xy = m_1 m_2 u + n_1 m_2 a + m_1 n_2 a + n_1 n_2 a^2,$$

$$yx = m_2 m_1 u + n_2 m_1 a + m_2 n_1 a + n_2 n_1 a^2;$$

sicchè risulta $xy = yx$, e l'anelloide è commutativo.

Per verificare che il prodotto è anche associativo si calcolino - sempre mediante la proprietà distributiva - i due prodotti $(xy)z$ ed $x(yz)$.

Tenuto conto che $a^2 \cdot a = a \cdot a^2$ (per la già provata commutatività del prodotto), si vede tosto che

$$(xy)z = x(yz).$$

Si conclude che R è un anello commutativo.

Sebbene non interessi il seguito, notiamo che *il centro di un anelloide distributivo d'ordine p^2, il quale non sia commutativo, si riduce al solo elemento zero.*

Un anelloide R siffatto è certamente non ciclico (Teorema 9); quindi tutti i suoi elementi non nulli hanno caratteristica p. Se il centro di R non si riducesse al solo elemento 0, esisterebbe in R un elemento $a \neq 0$ permutabile con ogni elemento di R e perciò anche con un elemento b che insieme ad a sia atto a formare una base del gruppo additivo di R. Allora essendo $ab = ba$, il prodotto di due elementi qualsiansi di R

$$x = m_1 a + n_1 b, \quad y = m_2 a + n_2 b$$

$(m_1, n_1, m_2, n_2 = 0, 1, \ldots, p-1)$ risulterebbe commutativo contro il supposto.

TEOREMA 14. - *Si consideri un anelloide distributivo finito R, dotato di unità, il quale abbia ordine*

$$N = q_1^2 q_2^2 \ldots q_s^2$$

oppure

$$N = p_1 p_2 \ldots p_r q_1^2 q_2^2 \ldots q_s^2$$

($p_1, p_2, \ldots, p_r, q_1, q_2, \ldots, q_s$ *sono numeri primi distinti fra loro*). *L'anelloide R è un anello commutativo.*

Invero, per il teorema 8, anche gl'ideali di SYLOW di R sono dotati d'unità. D'altra parte poichè gl'ideali suddetti hanno ordine uguale ad un numero primo p, oppure al quadrato di un numero primo q_j, si deduce dal Corollario 11 e dal Lemma 13 che gl'ideali stessi – essendo anelloidi distributivi – sono anelli commutativi. Ciò premesso, il teorema 8 permette di concludere che l'anelloide R è un anello commutativo.

CAP. VI. – Sui problemi "tipo Sylow" relativi agli anelli finiti.

11. Tutti i risultati determinati in precedenza per i vari preanelloidi ed anelloidi sono validi evidentemente anche per gli anelli. Vogliamo ora esporre qualche altra proprietà degli anelli che, a differenza di quelle già viste, non può essere estesa nemmeno agli anelloidi distributivi.

TEOREMA 15. – *Se l'ordine N di un anello finito R è divisibile per un numero primo p, l'anello possiede almeno un sottoanello d'ordine p* (36).

Naturalmente la proprietà non è banale per $N > p$.

Poichè il gruppo additivo R^+ di R ha ordine N divisibile per p, esso contiene qualche elemento di caratteristica p (37).

Per il Lemma 5 e per la successiva Osservazione 6 possiamo affermare che la totalità degli elementi di caratteristica p dello anello R forma – insieme allo zero – un'ideale G di R. Ovviamente l'ordine λ di G è del tipo p^β, perchè se λ ammettesse qualche fattore primo $q \neq p$, l'ideale G, pensato come gruppo additivo, dovrebbe contenere qualche elemento di caratteristica q, contro la definizione dello stesso G.

Se $\beta = 1$ il teorema è dimostrato, altrimenti si procede come segue.

(36) Se invece di un anello consideriamo un anelloide distributivo R, non possiamo più dedurre che R possegga qualche sottoanelloide d'ordine p dal fatto che l'ordine N di R sia divisibile per un numero primo p Esistono infatti anelloidi distributivi del quart'ordine che non possiedono nessun sottoanelloide di ordine 2, ad esempio l'anelloide descritto nella nota (22) a piè di pagina.

(37) Cfr. ad es. ZAPPA, l. c. in (1), p. 122.

I) Se G non possiede divisori dello zero, esso è certamente un corpo – perchè è un anello *finito* –; quindi G possiede un sottoanello d'ordine p: il sottocorpo formato dai multipli dell'unità ([38]).

II) Supponiamo che G possieda dei divisori dello zero. Esistono allora in G almeno due elementi $a \neq 0$, $b \neq 0$ per cui $ab = 0$ (non si esclude, a priori, che sia $a = b$). Consideriamo l'ideale destro G_1 dell'anello G formato dai multipli destri ag dell'elemento a (con g variabile in G) ([39]).

Sono possibili due casi:

II$_a$) Per ogni $g \in G$ risulta $ag = 0$, e quindi anche $a^2 = 0$.

Allora il sottogruppo ciclico A generato da a entro il gruppo additivo di G, sottogruppo formato da

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (p-1)a,\ pa \qquad (pa = 0) \ ([40]),$$

è un sottoanello d'ordine p dell'anello G (più precisamente uno zero – anello); ed il teorema è dimostrato.

II$_b$) In G esiste qualche elemento $g \neq 0$ tale che pure $ag \neq 0$ (e supponiamo pure che sia $g = a$, perchè se fosse $a^2 = 0$ il teorema sarebbe di nuovo dimostrato).

Allora l'ideale G_1 non si riduce al solo elemento 0 (ciò accadeva nel caso II$_a$), ma nemmeno può riempire tutto G, perchè ciò potrebbe accadere soltanto se a due scritture distinte qualsiansi ag_1, ag_2 corrispondessero sempre due elementi pure distinti, mentre per $g_1 = b$, $g_2 = 0$ si ha $ag_1 = ag_2 = 0$. Quindi G_1 è un sottoanello *proprio* di G avente ordine $p^\gamma < p^\beta$.

Se $\gamma = 1$ il teorema è dimostrato. In caso contrario si ripete sopra G_1 il ragionamento svolto sopra G (a partire dal comma I e proseguendo, se è necessario, fino al comma II$_b$): si troverà o un sottoanello d'ordine p (ed il teorema allora è dimostrato) oppure un sottoanello G_2 avente ordine p^δ con $p < p^\delta < p^\gamma$. Si ripete allora su G_2 il ragionamento svolto per G e G_1, e così via.

([38]) Cfr. ad es. B. SEGRE, l. c. in ([21]), p. 38.

([39]) G_1 è un ideale destro di G, perchè, scelti comunque due elementi ag_1, ag_2 in G_1 ed un elemento g in G, accade che

1) $ag_1 - ag_2 = a(g_1 - g_2)$ è un elemento di G_1;

2) $(ag_1)g = a(g_1 g)$ è pure un elemento di G_1.

([40]) Si ricordi che l'elemento a, appartenendo a G, ha caratteristica p.

È ovvio che, proseguendo in questo modo, dopo un numero finito di passaggi si trova un sottoanello d'ordine p, non potendo il procedimento dar luogo ad una successione infinita di anelli con ordini decrescenti

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$$

ciascuno dei quali ha ordine maggiore di p.

OSSERVAZIONE 16. – Sappiamo che, se p^α è la massima potenza di un numero primo p la quale divida l'ordine N di un anello R, allora R possiede un unico sottoanello d'ordine p^α: l'ideale di SYLOW $S(p)$ relativo al fattore primo p (si ricordino il Teorema 1 e le osservazioni 2, 3 del n. 3, tenendo presente che un anello è un particolare preanelloide bilatero e che i vari preanelloidi subordinati coincidono con i sottoanelli di R).

D'altra parte il Teorema 15 ci dice che R possiede anche qualche sottoanello d'ordine p, il quale per $\alpha > 1$ è contenuto propriamente nel predetto ideale d'ordine p^α (Osservazione 3 del n. 3).

Supponiamo ora $\alpha > 2$.

Ci si chiede: l'anello R possiede dei sottoanelli aventi ordini intermedi $p^{\alpha-1}$, $p^{\alpha-2}$, ..., p^2?

In altri termini, è possibile assegnare per gli anelli una proposizione analoga al primo teorema di SYLOW per i gruppi?

Sappiamo che in certi casi particolari – ad esempio per gli anelli ciclici (Cfr. l'osservazione 7) – si può rispondere affermativamente al problema posto.

Tuttavia la cosa non riesce in generale; anzi *può accadere talvolta che l'anello R non possieda nessun sottoanello avente uno degli ordini intermedi* $p^{\alpha-1}, \dots, p^2$.

Ad esempio, si supponga che R sia un *campo finito* d'ordine p^α.

Gli eventuali sottoanelli di R, dovendo essere *finiti* e privi di divisori dello zero (perchè il campo R non ne possiede), sono corpi; essi sono cioè sottocampi di R.

D'altro canto è noto che per $\alpha > 2$ il campo R ammette dei sottocampi d'ordine p^β con $1 < \beta < \alpha$, se, e solo se, l'intero β divide α [41].

[41] Cfr. ad es CARMICHAEL, l. c. in [16], p. 260.

Basta pertanto scegliere α uguale ad un numero *primo* maggiore di 2, affinchè il campo R non possieda sottoanelli degli ordini $p^{\alpha-2}, \ldots, p^2$.

OSSERVAZIONE 17. - *Sia R un anello finito d'ordine p^α $(\alpha > 2)$, il quale possegga un ideale I d'ordine p^β $(0 < \beta < \alpha - 1)$. Allora R possiede almeno un sottoanello d'ordine $p^{\beta+1}$.*

L'anello quoziente $R' = R/I$ ha ordine $p^{\alpha-\beta}$, e, per le ipotesi fatte, si ha $p^{\alpha-\beta} \geq p^2$.

Dal Teorema 15 si deduce che R' possiede almeno un sottoanello proprio A' d'ordine p.

Consideriamo ora l'omomorfismo f di R su R' che associa ad ogni elemento a di R l'elemento di R' costituito dalla classe laterale $I + a$; sia A la totalità degli elementi di R che sono controimmagini degli elementi di A' nell'omomorfismo f. L'insieme A è notoriamente un sottoanello di R; proviamo che il suo ordine è $p^{\beta+1}$.

Il nucleo dell'omomorfismo è costituito dall'ideale I, il quale ha ordine p^β; dunque il grado dell'omomorfismo è p^β. Poichè A' ha ordine p, si conclude che l'ordine della sua immagine inversa A è $p \cdot p^\beta = p^{\beta+1}$.

12. I risultati di carattere generale sui problemi "tipo SYLOW" relativi ad un anello finito (Teoremi 1, 8, 15) sono completati dal seguente :

TEOREMA 18. - *Sia R un anello finito d'ordine*

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

$(k > 1;\ p_1, p_2, \ldots, p_k$ numeri primi distinti).

L'anello R possiede qualche sottoanello A_n avente ordine

$$n = p_i \ldots p_h$$

uguale al prodotto di un qualsivoglia numero di fattori primi distinti dell'ordine N.

L'anello R possiede pure qualche sottoanello A_m avente ordine

$$m = p_i \ldots p_h p_s^{\alpha_s} \ldots p_t^{\alpha_t}$$

ove $p_1, \dots, p_h, p_s, \dots p_t$ *sono fattori primi distinti dell'ordine* N, *e* $p_s^{\alpha_s}, \dots, p_t^{\alpha_t}$ *sono le massime potenze di* $p_s, \dots, p_t$ *che dividono* N.

(Naturalmente affinchè il teorema sia significativo occorre che sia $n < N$, $m < N$).

Sappiamo già che in corrispondenza di ogni fattore primo p_i e di ogni fattore di SYLOW $p_j^{\alpha_j}$ dell'ordine N, l'anello R possiede almeno un sottoanello A_{p_i} ed un unico ideale (di SYLOW) $S(p_j)$, aventi ordini rispettivi p_i e $p_j^{\alpha_j}$.

Orbene un sottoanello A_n di ordine n può essere costruito come somma diretta dei sottoanelli $A_{p_1}, \dots, A_{p_h}$; analogamente un sottoanello A_m di ordine m può essere ottenuto come somma diretta dei sottoanelli $A_{p_1}, \dots, A_{p_h}, S(p_s), \dots, S(p_t)$. Infatti:

a) l'unione A_n dei gruppi additivi $\overset{+}{A}_{p_1}, \dots, \overset{+}{A}_{p_h}$ dei sottoanelli $A_{p_1}, \dots, A_{p_h}$ è un sottogruppo d'ordine $n = p_1 \dots p_h$ del gruppo additivo R^+ di R; di più A_n risulta proprio la somma diretta di $\overset{+}{A}_{p_1}, \dots, \overset{+}{A}_{p_h}$ (la proprietà è stata ricordata al termine dei preliminari del n. 1 - in linguaggio moltiplicativo invece che additivo - a proposito dei gruppi nilpotenti; essa vale naturalmente anche per i gruppi abeliani che intervengono nella questione attuale).

b) Detti x_j, x_r due elementi qualsiansi estratti da A_{p_j}, $A_{p_r} (j \neq r)$ si ha $x_j x_r = 0$ perchè x_j ed x_r sono elementi degl'ideali di SYLOW $S(p_j)$ ed $S(p_r)$ (si ricordino a questo proposito le osservazioni 3, 4 del n. 3).

Ciò basta per concludere che A_n è un sottoanello d'ordine n dell'anello R ed è somma diretta dei sottoanelli $A_{p_1}, \dots, A_{p_h}$ (si tenga presente la definizione di somma diretta data nel n. 6).

In modo analogo si conduce la dimostrazione per provare la esistenza di A_m.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BALLIEU, *Anneaux finis; systèmes hypercomplexes de rang deux sur un corps*, Annales de la Société Scient. de Bruxelles, Ser. I, **61**, (1947).

[2] — —, *Anneaux finis; systèmes hypercomplexes de rang trois sur un*

corps commutatif, Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles, Ser I, **61** (1947); **63** (1949).

[3] — —, et M. J. SCHUIND, *Anneaux à module de type p^m, p^{m+n}*; Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles, Ser. I, **65** (1951).

[4] G. F. LEGER jr, *A note on some properties of finite rings*, Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955).

[5] L. NOLLET, *Construction des anneaux dont tout sous-anneau est un ideal*, «Bull. Acad. Roy. Belg. Clas. Sci.» **38** (1952).

[6] L. REDEI, *Die Vollidealringe*, «Monatsh. Mat.», **56** (1952).

[7] — —, *Die Vollidealringe in weiteren Sinn*, «Acta Math. Acad. Sci. Hungar.», **3** (1952).

[8] M. SPERLING, *Rings every subring of which is an ideal*, «Rec. Math. (Mat. Sbornik)», N. S. **17**, **59**, (1945).

[9] F. SZÁSZ, *Les anneaux ne contenant que de sous-anneaux propres cycliques*, «Czechovslovak Math. J. 7», **82** (1957).

[10] T. SZELE, *Die ringe ohne Linksideale*, «Acad. Repub. popul. Române» Bul. Sti. A. 1 (1949).

[11] H. S. VANDIVER, *Theory of finite algebras*, «Trans. Amer. Math. Soc.», **13** (1912).

Nota. Il lavoro [1] del BALLIEU è quello che presenta maggiori punti di contatto con la nostra trattazione, in quanto la proprietà che un preanelloide distributivo finito sia somma diretta dei suoi ideali di SYLOW (da noi osservata nei n.n. 7, 8) è già segnalata da detto Autore nel caso particolare, ma significativo, degli anelli finiti. In una rivista bibliografica un recensore ha affermato che il risultato del BALLIEU era già stato stabilito in precedenza dal VANDIVER nella memoria [11].

Quest'ultimo lavoro è molto interessante; tuttavia occorre aggiungere che gli anelli finiti considerati dal VANDIVER (*finite algebras*) non sono i più generali, perchè commutativi e dotati di unità.

Gli altri Autori da noi citati — in modo particolare il REDEI — si occupano per lo più dei problemi riguardanti la classificazione degli anelli che possiedono un ideale in corrispondenza di ogni sottoanello o addirittura di ogni sottomodulo; a siffatti problemi si riconducono alcune questioni relative agli anelloidi distributivi di cui abbiamo dato soltanto qualche cenno nel n. 9 della presente esposizione.

Queste notizie sono state tratte dal «Mathem. Reviews» e dal «Zentralblatt für Mathematik». Non sempre ci è stato possibile leggere i lavori dianzi citati.