BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO BOMBIERI

**Sopra un teorema di H. Bohr e G. Ricci
sulle funzioni maggioranti delle serie di
potenze.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 17
(1962), n.3, p. 276-282.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_3_276_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_3_276_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sopra un teorema di H. Bohr e G. Ricci
sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze.**

Nota di ENRICO BOMBIERI (a Milano) (*) (**)

Sunto. - *In questa nota si migliorano i risultati ottenuti da G. Ricci sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze, ottenendo anche in alcuni casi i risultati « migliori possibili ».*

I) Il problema e i risultati.

Indichiamo, seguendo G. RICCI ⁽¹⁾, con $F_h(\lambda)$ la famiglia delle funzioni $f(z)$ regolari in $|z| < 1$ e che ivi soddisfano alla maggiorazione $|f(z)| \leq 1$, con

$$f(z) = \lambda z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \dots, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Si può supporre $0 \leq \lambda < 1$ senza mancare di generalità. Indichiamo con

$$\mathfrak{N}(f; r) = \lambda r^h + |a_{h+1}| r^{h+1} + \dots$$

la funzione maggiorante di f .

Definiamo ora, seguendo G. RICCI, una funzione $B_h(\lambda)$ in questo modo:

a) $\mathfrak{N}(f; B_h(\lambda)) \leq 1$ per ogni $f \in F_h(\lambda)$

b) esiste per ogni $\rho > 0$ una funzione $f \in F_h(\lambda)$ tale che sia

$$\mathfrak{N}(f; B_h(\lambda) + \rho) > 1.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C. N. R. (1961-62).

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 30 luglio 1962.

(1) G. RICCI: *Complementi a un teorema di H. Bohr riguardante le serie di potenze*, « Revista de la Union Matematica Argentina y de la Asociacion Fisica Argentina », 17, (1955) pp. 185-195.

PIERANITA RIZZONELLI, *Valutazioni del tipo di H. Bohr per le maggioranti delle serie di potenze*, « Rivista di Matem. Univ. Parma », (2) 3, (1962), pp. 259-270.

Osserviamo che poichè la famiglia $F_\lambda(\lambda)$ è una famiglia normale nel senso di MONTEL esiste $f \in F_\lambda(\lambda)$ tale che

$$(1) \quad \mathfrak{N}(f; B_\lambda(\lambda)) = 1.$$

Le funzioni per cui sarà valida la (1) saranno le funzioni estremali per il nostro problema.

L'esistenza di $B_0 = \inf_{\lambda} B_0(\lambda) > 0$ fu dimostrata da H. BOHR nel suo lavoro « A Theorem concerning power series » Proc. London Math. Soc. (2), 13, (1914) pp. 1-5, dove dimostrò che $B_0 \geq 1/6$; in seguito con H. BOHR-M. RIESZ-I. SCHUR-F. WIENER (vedi ad es. E. LANDAU (*)) è stato dimostrato che $B_0 = 1/3$.

Più recentemente, G. RICCI (3) ha fissato l'attenzione sulle funzioni $B_\lambda(\lambda)$, e sulle costanti $B_n = \inf B_n(\lambda)$.

Citeremo alcuni risultati raggiunti da G. RICCI :

$$(2) \quad 1/3 = B_0 < B_1 < B_2 < \dots ;$$

$$(3) \quad 0.6 < B_1 < 0.7071 \dots, \quad 0.674 < B_2 \leq 0.7899 \dots, \quad 0.720 < B_3$$

limitazioni superiori e inferiori per $B_n(\lambda)$, come

$$(4) \quad 1/(2 + \lambda) \leq B_0(\lambda) \leq 1/(1 + 2\lambda).$$

Dimostreremo in questa nota il seguente

TEOREMA A :

Se $1/2 \leq \lambda < 1$. allora

$$B_0(\lambda) = 1/(1 + 2\lambda),$$

e le funzioni estremali sono, per $1/2 < \lambda < 1$,

$$f(z) = (\lambda - e^{i\mu} z) / (1 - \lambda e^{i\mu} z), \text{ con } \mu \text{ reale};$$

se $0 \leq \lambda \leq 1/2$, allora $B_0(\lambda) \geq ((1 - \lambda)/2)^{1/2}$.

Inoltre si ha

$$B_1 = 1/\sqrt{2}, \quad B_0(\lambda) \leq 1/\sqrt{2}.$$

(2) E. LANDAU : *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin 1929.

(3) G. RICCI, loc. cit. (4).

Osservazione:

si vede dai risultati ottenuti in questo teorema che la funzione $B_0(\lambda)$ non è rappresentata dalla funzione $1/(1+2\lambda)$ quando $0 \leq \lambda < (\sqrt{2}-1)/2 = 0.2071 \dots$, cioè:

$$\begin{cases} B_0(\lambda) = 1/(1+2\lambda) & \text{se } 1/2 \leq \lambda < 1, \\ B_0(\lambda) < 1/(1+2\lambda) & \text{se } 0 \leq \lambda < 0.2071 \dots \end{cases}$$

II) Dimostrazione del teorema A.

LEMMA 1: (E. LANDAU (4))

Sia $g(z)$ regolare in $|z| < A$, con almeno uno zero in $|z| < A$.
Sia x_0 il suo zero in $|z| < A$ di modulo c_0 minimo.
Allora per $c_0 < r < A$ vale la disuguaglianza

$$c_0 \geq r |g(0)| / \left[(1/2\pi) \int_0^{2\pi} |g(re^{iu})|^2 du \right]^{1/2}.$$

Dimostrazione:

siano $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ i moduli degli zeri di $g(z)$ in $|z| < r$, ordinati per modulo crescente.

Per il teorema di JENSEN avremo

$$\log(r/c_0) \leq \log(r^n/c_0 c_1 \dots c_{n-1}) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log |g(re^{iu})| du - \log |g(0)|.$$

Da una ben nota disuguaglianza si ricava

$$(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log |g(re^{iu})| du \leq \frac{1}{2} \log \left((1/2\pi) \int_0^{2\pi} |g(re^{iu})|^2 du \right)$$

e combinando questo risultato con la disuguaglianza precedente si ha il lemma.

LEMMA 2:

$$B_0(\lambda) \geq \text{Max}_{0 \leq r \leq 1} \text{Min} \left(r; (1-\lambda)r / \left[\text{Sup}_{f \in F_0(\lambda)} (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |f(re^{iu})|^2 du + 1 - 2\lambda \right]^{1/2} \right).$$

(4) E. LANDAU: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Leipzig 1927, Satz 443.

Dimostrazione:

sia $f(z) = \lambda + a_1 z + \dots \in F_0(\lambda)$, e sia $g(z) = \lambda + |a_1| z + \dots$.

Allora, se c è il valore reale positivo per cui $g(c) = 1$, la definizione di $B_0(\lambda)$ ci dà $\text{Inf } c = B_0(\lambda)$.

È chiaro inoltre, poichè i coefficienti di $g(z)$ sono tutti non negativi, che $|g(z)| < 1$ se $|z| < c$.

Applichiamo allora il lemma 1 alla funzione ausiliaria $1 - g(z) = h(z)$. Quando $c < r$, il lemma risulta applicabile, e si ottiene

$$c \geq (1 - \lambda) r / \left[(1/2\pi) \int_0^{2\pi} |h(re^{i\mu})|^2 d\mu \right]^{1/2}.$$

D'altra parte si ha:

$$\begin{aligned} (6) \quad & (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |h(re^{i\mu})|^2 d\mu = (1 - \lambda)^2 + |a_1|^2 r^2 + \dots = \\ & = 1 - 2\lambda + (\lambda^2 + |a_1|^2 r^2 + \dots) = 1 - 2\lambda + (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |f(re^{i\mu})|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Se il Lemma 1 non è applicabile, si ottiene ancora una mino-
rante di c :

$$(7) \quad c \geq r.$$

Ricordando che $\text{Inf } c = B_0(\lambda)$, si ha allora il lemma 2 senza difficoltà dalle formule (5), (6) e (7).

Calcoliamo ora

$$\text{Sup}_{f \in F_0(\lambda)} (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |f(re^{i\mu})|^2 d\mu.$$

LEMMA 3:

Se $f(z) \in F_0(\lambda)$ allora per $0 \leq r < 1$ vale la disuguaglianza

$$(1/2\pi) \int_0^{2\pi} |f(re^{i\mu})|^2 d\mu \leq (r^2 + \lambda^2 - 2r^2 \lambda^2) / (1 - r^2 \lambda^2)$$

e vale il segno = se, e soltanto se

$$f(z) = (\lambda - e^{i\mu} z) / (1 - \lambda e^{i\mu} z).$$

Dimostrazione :

per dimostrare questo lemma faremo uso del classico lemma di SCHWARZ e del fatto che la funzione $(\lambda - z)/(1 - \lambda z) \in F_0(\lambda)$.

Allora la funzione

$$s(z) = (\lambda - f(z))/(1 - \lambda f(z)) \in F_0(0)$$

poichè $f(0) = \lambda$, $|f(z)| \leq 1$ in $|z| < 1$, e $f(z)$ è regolare in $|z| < 1$.

Applicando il lemma di SCHWARZ avremo allora $|s(z)| \leq |z|$ in $|z| < 1$, e vale il segno = se, e soltanto se $s(z) = e^{i\mu} z$, con μ reale.

Dunque

$$(8) \quad |f(re^{i\mu}) - \lambda| \leq r |1 - \lambda f(re^{i\mu})| \quad \text{quando } 0 \leq r < 1.$$

Posto per semplicità

$$I = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |f(re^{i\mu})|^2 du,$$

avremo

$$(9) \quad (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |\lambda - f(re^{i\mu})|^2 du = |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \dots = I - \lambda^2,$$

e allo stesso modo

$$(10) \quad (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |1 - \lambda f(re^{i\mu})|^2 du = 1 - 2\lambda^2 + \lambda^2 I.$$

Dalle formule (8), (9) e (10) ricaviamo la disuguaglianza

$$I - \lambda^2 \leq r^2 (1 - 2\lambda^2 + \lambda^2 I),$$

da cui si ha immediatamente il Lemma 3.

Il caso del segno = si risolve tenendo presente che $|s(z)| < 1$ in $|z| < 1$ tranne se $s(z) = e^{i\mu} z$, con μ reale.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema A.

Combinando tra loro i lemmi 2 e 3 avremo per ogni r tale che $0 \leq r \leq 1$:

$$B_0(\lambda) \geq \text{Min} (r; (1 - \lambda)r / [(r^2 + \lambda^2 - 2r^2\lambda^2)/(1 - r^2\lambda^2) + 1 - 2\lambda]^{1/2})$$

e ponendo $r^2 = 1/(\lambda + 2\lambda^2)$ quando $1/2 \leq \lambda < 1$, e $r = 1$ $0 \leq \lambda \leq 1/2$

avremo

$$B_0(\lambda) \geq 1/(1 + 2\lambda) \text{ per } 1/2 \leq \lambda < 1,$$

$$B_0(\lambda) \geq ((1 - \lambda)/2)^{1/2} \text{ per } 0 \leq \lambda \leq 1/2.$$

L'esempio

$$f(z) = (\lambda - e^{i\mu} z)/(1 - \lambda e^{i\mu} z)$$

ci mostra immediatamente che $B_0(\lambda) \leq 1/(1 + 2\lambda)$, e ricordando il caso = nel Lemma 3 avremo l'asserto per quanto riguarda le funzioni estremali.

Infine si ha: $B_1 = B_0(0) \geq 1/\sqrt{2}$; l'esempio

$$f(z) = \lambda + (1 - \lambda)z(1/\sqrt{2} - z)/(1 - z/\sqrt{2})$$

ci mostra che $B_0(\lambda) \leq 1/\sqrt{2}$ per ogni λ . Si ricava così l'ultima parte del teorema, e la dimostrazione è completata.

III) Una generalizzazione e il problema per le funzioni $B_h(\lambda)$.

Sia $B(\lambda, \sigma)$ la migliore funzione di λ e σ tale che: per $f \in F_0(\lambda)$, si ha $\mathfrak{N}(f; B(\lambda, \sigma)) \leq \sigma$.

Sia inoltre $B(\sigma) = \inf_{\lambda} B(\lambda, \sigma)$.

Con un procedimento analogo a quello usato per il teorema A, si dimostra:

TEOREMA B:

Se $\lambda < \sigma \leq 2\lambda$, allora $B(\lambda, \sigma) = (\sigma - \lambda)/(1 + \sigma\lambda - 2\lambda^2)$, e le funzioni estremali sono, per $\lambda < \sigma < 2\lambda$,

$$f(z) = (\lambda - e^{i\mu} z)/(1 - \lambda e^{i\mu} z), \text{ con } \mu \text{ reale};$$

se $\sigma \geq 2\lambda$, si ha $B(\lambda, \sigma) \geq (\sigma - \lambda)/\sqrt{(\sigma^2 - 2\lambda\sigma + 1)}$.

Infine, per $1 \leq \sigma \leq \sqrt{2}$ si ha

$$B(\sigma) = 1/(\beta\sigma - 2[2(\sigma^2 - 1)]^{1/2})$$

e per $\sigma > \sqrt{2}$ si ha

$$B(\sigma) \geq (\sigma^2 - 1)^{1/2}/\sigma.$$

Quest'ultima parte si ottiene cercando il minimo rispetto a λ delle funzioni che limitano $B(\lambda, \sigma)$.

TEOREMA C :

La funzione $B_h(\lambda)$ soddisfa all'equazione

$$B(\lambda, B_h^{-h}(\lambda)) = B_h(\lambda).$$

Quindi si determina il valore esatto di $B_h(\lambda)$ nell'intervallo $2^{-1/(h+1)} \leq \lambda < 1$; in particolare

$$B_h(2^{-1/(h+1)}) = 2^{-1/(h+1)}, \quad \text{per } h = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrazione :

per dimostrare l'equazione $B(\lambda, B_h^{-h}(\lambda)) = B_h(\lambda)$ si osserva anzitutto che se $f \in F_h(\lambda)$, allora $f/z^h \in F_0(\lambda)$, e viceversa.

Poichè

$$\mathfrak{N}(f; B_h(\lambda)) = B_h^h(\lambda) \mathfrak{N}(f/z^h; B_h(\lambda)),$$

avremo per ogni $g = f/z^h \in F_0(\lambda)$:

$\mathfrak{N}(g; B_h(\lambda)) \leq B_h^{-h}(\lambda)$, e d'altra parte esiste $g \in F_0(\lambda)$ tale che $\mathfrak{N}(g; B_h(\lambda)) = B_h^{-h}(\lambda)$; il teorema C si ha allora immediatamente ricordando la definizione della funzione $B(\lambda, \sigma)$. Un facile calcolo mostra allora che $B_h(\lambda)$ è la radice positiva < 1 dell'equazione ⁽⁵⁾

$$(11) \quad (1 - 2\lambda^2) x^{h+1} + \lambda x^h + \lambda x - 1 = 0,$$

purchè sia $\lambda < x^{-h} \leq 2\lambda$, e da qui la condizione per λ diventa $2^{-1/(h+1)} \leq \lambda < 1$.

Il calcolo di $B_h(2^{-1/(h+1)})$ si ha facilmente dalla (11).

Infine, si può osservare che la funzione $B_h(\lambda)$ è crescente per $2^{-1/(h+1)} \leq \lambda < 1$, quando $h \geq 2$; per $h = 1$ risulta stazionaria nel punto $\lambda = 1/\sqrt{2}$.

Ne segue che i risultati trovati non sono ancora sufficienti a determinare il valore esatto della costante B_h quando $h \geq 2$.

⁽⁵⁾ Questa equazione (11) è stata considerata da G. RICCI, loc. cit. ⁽⁴⁾ per ottenere una maggiorante di $B_h(\lambda)$.