Bollettino
Unione Matematica Italiana

Anna Comoglio

Comportamento degli elementi curvilinei composti in un’omografia.

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.3, p. 263–269.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_3_263_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Comportamento degli elementi curvilinei composti in un'omografia

Nota di ANNA COMOGLIO (a Torino) (*)

Sommario. - *Come nell'introduzione.*

Nel presente lavoro assegno (n. 2) i gruppi continui finiti di omografie che trasformano in sè un elemento composto $E_{2,m}$ (1), $(0 \leq m \leq 3)$, (2).

Per ottenere le formule del n. 2, mi sono appoggiata sul risultato di un calcolo assegnato nel n. 1, (che potrà servire anche in altre occasioni), inteso a stabilire il modo di operare di una sostituzione lineare sulla rappresentazione analitica dell'$E_{2,m}$ considerato.

1. Consideriamo nello spazio ordinario un elemento composto $E_{2,4}$ avente come centro l'origine, come tangente l'asse X e come piano osculatore il piano $Z=0$, rappresentato analiticamente dai due sviluppi in serie:

$$\begin{cases} Y = A_2X^2 + A_3X^3 + A_4X^4 + A_5X^5 + A_6X^6 + [7] \\ Z = \qquad\qquad B_3X^3 + B_4X^4 + B_5X^5 + B_6X^6 + B_7X^7 + [8] \end{cases}$$

essendo le A e le B costanti assegnate $(A_2 \neq 0,\ B_3 \neq 0)$. Se si applica ad esso una trasformazione lineare

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{p_0X + p_1Y + p_2Z}{1 + s_0X + s_1Y + s_2Z} \\ y &= \frac{q_1Y + q_2Z}{1 + s_0X + s_1Y + s_2Z} \\ z &= \frac{r_2Z}{1 + s_0X + s_1Y + s_2Z} \end{aligned}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 27 giugno 1962.

(1) Per la nozione di elemento composto v. i lavori [7], [5], [6], [8], [10], [12], [13], citati nella bibliografia. I risultati qui pubblicati sono già stati citati dal Prof. TERRACINI nelle sue conferenze [12], [13].

(2) Il caso $m=0$ era già stato trattato precedentemente.

tale che muti il punto $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ nel punto $x=0$, $y=0$, $z=0$, la retta $Y=Z=0$ nella retta $y=z=0$ ed il piano $Z=0$ nel piano $z=0$, si ottiene ancora un elemento composto $E_{2,4}$, in condizioni del tutto analoghe a quelle dell'elemento dato, per la cui rappresentazione analitica adottiamo le espressioni

$$\begin{cases} y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + [7] \\ z = \qquad\qquad b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + b_7x^7 + [8] \end{cases}$$

dove le a e le b dipendono dai coefficienti A e B, e dai parametri della trasformazione. P. e. si ha subito

$$a_2 = \frac{q_1}{p_0^2} A_2 \quad , \quad b_3 = \frac{r_2}{p_0^3} B_3 ; \tag{1.2}$$

mentre per i coefficienti a e b successivi, un calcolo che non riproduciamo qui, il quale non offre nessuna difficoltà, ma si complica notevolmente man mano che si procede con l'indice del coefficiente a o b, porge:

(1.3)

$$a_3 = \frac{1}{p_0^4}(2q_1A_2C + p_0G) \quad , \quad b_4 = \frac{r_2}{p_0^5}(3B_3C + p_0K) ;$$

$$a_4 = \frac{1}{p_0^6}(5q_1A_2C^2 - 2p_0q_1A_2D + 3p_0CG + p_0^2H),$$

$$b_5 = \frac{r_2}{p_0^7}(9B_3C^2 - 3p_0B_3D + 4p_0CK + p_0^2L);$$

$$a_5 = \frac{1}{p_0^8}(14q_1A_2C^3 + 9p_0C^2G - 12p_0q_1A_2CD + 4p_0^2CH -$$

$$- 2p_0^2q_1A_2E - 3p_0^2DG + p_0^3I),$$

$$b_6 = \frac{r_2}{p_0^9}(28B_3C^3 + 14p_0C^2K - 21p_0B_3CD - 3p_0^2B_3E - 4p_0^2DK +$$

(1.3)

$$+ 5p_0^2CL + p_0^3M);$$

$$a_6 = \frac{1}{p_0^{10}}(42q_1A_2C^4 + 28p_0C^3G - 56p_0q_1A_2C^2D + 14p_0^2C^2H -$$

$$- 14p_0^2q_1A_2CE - 21p_0^2CDG + 5p_0^3CI + 7p_0^2q_1A_2D^2 -$$

$$- 4p_0^3DH - 2p_0^3q_1A_2F - 3p_0^3EG + p_0^4J),$$

$$b_7 = \frac{r_2}{p_0^{11}}(90B_3C^4 - 108p_0B_3C^2D + 48p_0C^3K - 24p_0^2B_3CE -$$

$$- 32p_0^2CDK + 20p_0^2C^2L + 6p_0^3CM + 12p_0^2B_3D^2 -$$

$$- 3p_0^3B_3F - 4p_0^3EK - 5p_0^3DL + p_0^4N)$$

dove si è posto

$$C = p_0s_0 - p_1A_2$$

$$D = p_1A_3 + p_2B_3 - (p_0s_1 + p_1s_0)A_2 + p_0s_0^2$$

$$E = p_1A_4 + p_2B_4 - (p_0s_1 + p_1s_0)A_3 - (p_0s_2 + p_2s_0)B_3 + s_0(p_0s_1 +$$

$$+ p_1s_0)A_2 + s_1(p_0s_0 - p_1A_2)A_2 - p_0s_0^3$$

$$F = p_1A_5 + p_2B_5 - (p_0s_1 + p_1s_0)A_4 - (p_0s_2 + p_2s_0)B_4 + s_0(p_0s_1 +$$

$$+ p_1s_0)A_3 + s_0(p_0s_2 + p_2s_0)B_3 - s_0^2(p_0s_1 + p_1s_0)A_2 + (s_1A_3 +$$

$$+ s_2B_3 - 2s_0s_1A_2)(p_0s_0 - p_1A_2) - s_1(p_1A_3 + p_2B_3 - p_0s_1A_2)A_2 + p_0s_0^4$$

$$G = q_1 A_3 + q_2 B_3 - q_1 s_0 A_2$$

$$H = q_1 A_4 + q_2 B_4 - s_0(q_1 A_3 + q_2 B_3) + q_1(s_0^2 - s_1 A_2)A_2$$

$$I = q_1 A_5 + q_2 B_5 - s_0(q_1 A_4 + q_2 B_4) + (s_0^2 - s_1 A_2)(q_1 A_3 + q_2 B_3) -$$
$$- q_1(s_0^3 - 2 s_0 s_1 A_2 + s_1 A_3 + s_2 B_3) A_2$$

$$J = q_1 A_6 + q_2 B_6 - s_0(q_1 A_5 + q_2 B_5) + (s_0^2 - s_1 A_2)(q_1 A_4 + q_2 B_4) - (s_0^3 -$$
$$- 2 s_0 s_1 A_2 + s_1 A_3 + s_2 B_3)(q_1 A_3 + q_2 B_3) + q_1(s_0^4 - 3 s_0^2 s_1 A_2 +$$
$$+ 2 s_0 s_1 A_3 + 2 s_0 s_2 B_3 - s_1 A_4 - s_2 B_4 + s_1^2 A_2^2) A_2$$

$$K = B_4 - s_0 B_3$$

$$L = B_5 - s_0 B_4 + (s_0^2 - s_1 A_2) B_3$$

$$M = B_6 - s_0 B_5 + (s_0^2 - s_1 A_2) B_4 - (s_0^3 - 2 s_0 s_1 A_2 + s_1 A_3 + s_2 B_3) B_3$$

$$N = B_7 - s_0 B_6 + (s_0^2 - s_1 A_2) B_5 - (s_0^3 - 2 s_0 s_1 A_2 + s_1 A_3 + s_2 B_3) B_4 +$$
$$+ (s_0^4 - 3 s_0^2 s_1 A_2 + 2 s_0 s_1 A_3 + 2 s_0 s_2 B_3 - s_1 A_4 - s_2 B_4 + s_1^2 A_2^2) B_3$$

2. Osservando le equazioni (1.2) del paragrafo precedente, si può dedurre che condizione necessaria e sufficiente affinchè un $E_{2,0}$ di equazioni:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} Y = A_2 X^2 + [3] \\ Z = \qquad B_3 X^3 + [4] \end{cases}$$

sia invariante per una trasformazione lineare del tipo (1.1), è che sia:

$$q_1 = p_0^2 \qquad , \qquad r_2 = p_0^3$$

(p_0, p_1, p_2, q_2, s_0, s_1, s_2 parametri arbitrari). L'$E_{2,0}$ è quindi mutato in sè dalle omografie che costituiscono il G_7:

$$(2.2)\qquad x = \frac{p_0X + p_1Y + p_2Z}{1 + s_0X + s_1Y + s_2Z}$$

$$y = \frac{p_0^2Y + q_2Z}{1 + s_0X + s_1Y + s_2Z}$$

$$z = \frac{p_0^3Z}{1 + s_0X + s_1Y + s_2Z}$$

Le omografie del gruppo (2.2) trasformano in sè ciascuno degli ∞^2 $E_{2,0}$ aventi rappresentazione analitica (2.1), infatti non dipendono dal valore dei coefficienti A_2 e B_3 dell'elemento considerato.

Ripetendo ora le stesse considerazioni per un $E_{2,m}$ ($m = 1, 2, 3$) si trova (per ognuno) un gruppo continuo finito, a $7 - 2m$ parametri, di omografie per le quali l'$E_{2.m}$ è invariante.

Inoltre si può notare che le omografie che mutano in sè un $E_{2,m}$ devono necessariamente trasformare in sè l'$E_{2,m-1}$, contenuto nell'$E_{2,m}$ considerato. Quindi per ogni valore di m avremo un gruppo di omografie appartenenti a quelle trovate per $m - 1$, ovviamente con un numero minore di parametri arbitrari.

Effettivamente per $m = 1$, cioè per l'$E_{2,1}$ di equazioni:

$$(2.3)\qquad \begin{cases} Y = A_2X^2 + A_3X^3 + [4] \\ Z = \qquad\qquad B_3X^3 + B_4X^4 + [5] \end{cases}$$

si ottiene il G_5 costituito dalle omografie (2.2) dove p_0, p_2, s_0, s_1, s_2 rimangono arbitrari, mentre

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} p_1 &= \frac{p_0}{3A_2B_3}[(1 - p_0)B_4 + 2s_0B_3] \\ q_2 &= \frac{p_0^2}{3B_3^2}[(p_0 - 1)(3A_3B_3 - 2A_2B_4) + s_0A_2B_3] \end{aligned}$$

Per $m = 2$, cioè per l'$E_{2,2}$ di equazioni:

$$(2.5)\qquad \begin{cases} Y = A_2X^2 + A_3X^3 + A_4X^4 + [5] \\ Z = \qquad\qquad B_3X^3 + B_4X^4 + B_5X^5 + [6] \end{cases}$$

si ha il G_3 costituito dalle omografie (2.2) dove p_0, s_0, s_2 sono ancora arbitrari, p_1, q_2 sono dati dalle (2.4) ed inoltre

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} p_2 = \frac{p_0}{9A_2B_3^3}[(p_0^2 - 1)(9A_2B_3B_5 - 18A_4B_3^2 - 11A_2B_4^2 + \\ + 18A_3B_3B_4) + B_4(p_0 - 1)(3A_3B_3 - 2A_2B_4) - \\ - p_0s_0A_2B_3B_4 + 2s_0B_3(2A_2B_4 - 3A_3B_3) + s_0^2A_2B_3^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 = \frac{1}{3A_2^2B_3^2}[(p_0^2 - 1)(6A_2B_3B_5 - 9A_4B_3^2 - 7A_2B_4^2 + \\ + 9A_3B_3B_4) + s_0A_2B_3(B_4 + s_0B_3)] \end{aligned}$$

Infine per $m = 3$, cioè per l'$E_{2,3}$ di equazioni:

$$(2.7)\qquad \begin{cases} Y = A_2X^2 + A_3X^3 + A_4X^4 + A_5X^5 + [6] \\ Z = \qquad\qquad B_3X^3 + B_4X^4 + B_5X^5 + B_6X^6 + [7] \end{cases}$$

si trova il gruppo continuo G_1 costituito dalle omografie (2.2) dove s_0 è l'unico parametro arbitrario, mentre

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} & p_0 = 1, \\ & s_2 = \frac{s_0}{27A_2B_3^3}[9(2A_2B_4^2 - 4A_3B_3B_4 + 3A_4B_3^2 - A_2B_3B_5) + \\ & \quad + 3s_0B_3(2A_2B_4 - 3A_3B_3) + s_0^2A_2B_3^2] \end{aligned}$$

ed i rimanenti coefficienti si ottengono dalle (2.4), (2.6) per $p_0 = 1$, cioè

$$(2.9)\qquad q_1 = r_2 = 1 \quad , \quad p_1 = \frac{2s_0}{3A_2} \quad , \quad q_2 = \frac{s_0A_2}{3B_3},$$

$$p_2 = \frac{s_0}{9A_2B_3^2}[3(A_2B_4 - 2A_3B_3) + s_0A_2B_3], \tag{2.9}$$

$$s_1 = \frac{s_0}{3A_2B_3}(B_4 + s_0B_3)$$

Nelle formule (2.8), (2.9) non compaiono i coefficienti A_6 e B_7 dell'elemento dato; quindi si può concludere che se un'omografia trasforma in sè un $E_{2,3}$ si comporta in modo analogo rispetto a ciascuno degli ∞^2 $E_{2,3}$ aventi in comune l'$E_{2,2}$ in essi contenuto.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOMPIANI E., *Elementi differenziali e trasformazioni birazionali*, « Conf. di matem. dell'Univ. di Bari », n. 54 (Bologna, 1960).

[2] SEGRE B., *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori*, « Rend. Acc. Lincei », (6) vol. XXII, 1935.

[3] — —, *Some properties of differentiable varieties and transformations*, Springer, 1957.

[4] SEGRE C., *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni la tangente e il piano osculatore*. « Rend. Acc. Lincei », (5), 1924. (Opere, vol. II, pp. 186-191).

[5] TERRACINI A., *Sulle coppie di rami con la stessa origine e gli stessi spazi osculatori*, « Rend. Sem. matem. Università e Polit. Torino », vol. 12, anno 1952-53.

[6] — —, *Relazioni tra invarianti proiettivi duali di coppie di elementi curvilinei*, « Boll. Un. matem. ital. s. III », 1953.

[7] — —, *Sugli elementi curvilinei composti*, « Atti Acc. delle Scienze Torino », vol 88, 1953-54.

[8] — —, *Su alcuni sistemi di elementi curvilinei*, « Boll. Un. Matem. Ital. », (3), vol. 13, 1958.

[9] — —. *Su certi sistemi ∞^7 di linee spaziali*, « Boll. Un. Matem. Ital. », (3), vol. 13, 1958.

[10] — —, *Sugli invarianti proiettivi di una coppia di elementi curvilinei composti*, « Boll. Un. Matem. Ital. », (3) vol. 15, 1960.

[11] — —, *Una proprietà della rigata cubica di Caykey, e sua generalizzazione*, « Annali di matematica », (sous presse).

[12] — —, *Elements curvilignes composés*, « Colloque de Géométrie différentielle », 1962.

[13] — —, *Elementi curvilinei composti*, « Conferenze del seminario di matematica dell'Università di Bari », 1962.