Adriano Barlotti

Una costruzione di una classe di spazi affini generalizzati.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.2, p. 182–187.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_2_182_0>

Una costruzione di una classe di spazi affini generalizzati.

Nota di Adriano Barlotti (a Firenze) (*) (**)

Sunto. - *Si costruisce una classe di spazi affini generalizzati nel senso di Sperner.*

Zusammenfassung. - *Wir konstruieren eine Klasse von verallgemeinerten affinen Räumen im Sinne von Sperner.*

1. È ben noto che nello studio degli spazi grafici (1) il caso piano si differenzia nettamente da quello degli spazi di dimensione maggiore od uguale a tre: mentre esistono numerosi tipi di piani

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 18 aprile 1962.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca matematica n. 8 del C. N. R.

(1) Per la nozione di spazio grafico si vedano, p. es., B. Segre [3], [4], G. Zappa [6].

« non desarguesiani », negli spazi a tre o più dimensioni vale sempre il teorema del DESARGUES.

In un recente lavoro (cfr. [5]) E. SPERNER ha introdotto la nozione di *spazio affine generalizzato*: si tratta di una struttura geometrica definita assiomaticamente nella quale i postulati esprimenti le proprietà grafiche sono opportunamente indeboliti in modo da ottenere una geometria non desarguesiana a più di due dimensioni ([2]). Fra l'altro egli ha indicato come si ottenga tutta una classe di tali spazi mediante una costruzione che è suggerita dal procedimento noto in geometria descrittiva col nome di « metodo delle proiezioni ortogonali ».

Scopo di questa nota è di indicare come si possa ottenere una classe di spazi affini generalizzati nel senso di SPERNER, con una costruzione che si ricollega ad un altro noto metodo della geometria descrittiva, il « metodo della proiezione centrale ». Poichè in questo metodo il piano si rappresenta in un modo più semplice del punto, e la definizione di spazio affine generalizzato si basa sulle nozioni di punto e di retta, il procedimento che indicheremo risulterà, più precisamente, ispirato dalla rappresentazione di una struttura « duale » di uno spazio affine a tre dimensioni.

2. Sia π un qualunque piano proiettivo. Scegliamo in esso una retta, h, che chiameremo *retta fondamentale*, e un punto, H, appartenente ad h (che diremo *punto fondamentale*). Fissiamo poi due rette, f e t, passanti per H e distinte fra loro e da h.

Partendo da questi elementi possiamo costruire uno spazio affine generalizzato nel seguente modo. Definiamo prima di tutto i punti e le rette dello spazio in questione o, come diremo in seguito allo scopo di distinguerli dagli elementi omonimi di π, gli S-punti e le S-rette.

Un S-punto, A, è una qualunque coppia $(t_A f_A)$ di rette di π che siano incidenti sulla retta fondamentale, distinte da questa, e non passanti per H.

Le S-rette sono di due tipi diversi. Chiameremo S-retta *di prima specie* una qualunque coppia $(T_r F_r)$ di punti di π, presi in modo che nessuno dei due appartenga alla retta fondamentale. Le S-rette *di seconda specie* sono le coppie $(T_r R)$ di punti di π, con $T_r \in h$, $T_r \neq H$ e $R \neq H$. Diremo R il punto caratteristico

([2]) Dello stesso problema, in maniera diversa, si è occupato anche G. EWALD; cfr. [1].

di r'. Per indicare che A è un S-punto o che r è una S-retta di prima o di seconda specie useremo rispettivamente le scritture:

$$A \sim (t_A f_A), \qquad r \sim (T_r F_r), \qquad r \sim (T_r R).$$

Chiameremo spazio affine generalizzato, S, generato dal piano π l'insieme degli S-punti e delle S-rette quando si definiscano la appartenenza degli S-punti alle S-rette e il parallelismo fra le S-rette come segue.

Un S-punto $A \sim (t_A f_A)$ giace su (³) una retta di prima specie $r \sim (T_r F_r)$ quando T_r ed F_r appartengono rispettivamente a t_A ed f_A.

L'S-punto $A \sim (t_A f_A)$ appartiene ad una S-retta di seconda specie $r \sim (T_r R)$ quando R appartiene alla congiungente i punti $t \cap t_A$, e $f \cap f_A$, ed inoltre $T_r \equiv h \cap t_A$.

Due S-rette di prima specie, $r \sim (T_r F_r)$ ed $u \sim (T_u F_u)$, le chiameremo parallele quando le rette HT_r ed HF_r coincidono rispettivamente con HT_u ed $H_v F_u$.

Infine due S-rette di seconda specie, $r \sim (T_r R)$ ed $u \sim (T_u U)$ diremo che sono parallele quando coincidono le rette HR ed HU (⁴).

Si verifica facilmente che per lo spazio così definito sono soddisfatti i postulati $A1$ – $A4$ di Sperner (cfr. [5], § 1).

Il primo di questi asserisce che due S-punti distinti, $A \sim (t_A f_A)$ e $B \sim (t_B f_B)$, ammettono una, e una sola, S-retta, r, che li congiunge. Se $t_A \cap h$ è diverso da $t_B \cap h$, la r è la S-retta di prima specie $(t_A \cap t_B,\ f_A \cap f_B)$. Se invece $t_A \cap h \equiv t_B \cap h$ la r è una S-retta di seconda specie, e precisamente la $(T_r R)$, dove con R si indica l'intersezione delle rette $(t_A \cap t) \cup (f_A \cap f)$ e $(t_B \cap t) \cup (f_B \cap f)$ (⁵) ed è $T_r \equiv h \cap t_A$. In ogni caso, se $A \equiv\!|\!\equiv B$ la S-retta AB esiste ed è unica, e quindi vale il postulato A1.

Passiamo al postulato A2. Indichiamo con $n+1$ il numero cardinale (finito o infinito) che indica quanti sono i punti di una retta del piano π. Si riconosce subito che ogni S-retta è incidente precisamente con n S-punti. Se la S-retta è di prima specie, $r \sim (T_r F_r)$, tutti e soli gli S-punti di essa si ottengono congiungendo gli n punti di h, diversi da H, con T_r ed F_r. Qualora invece la S-retta sia di seconda specie, $r \sim (T_r R)$, i suoi n S-punti

(³) Oppure: appartiene a, è incidente a, ecc.

(⁴) Osserviamo esplicitamente che due rette di specie diversa non sono mai parallele.

(⁵) Si osservi che queste due rette, essendo $t \equiv\!|\!\equiv f$, sono determinate in modo unico, e sono distinte se $A \equiv\!|\!\equiv B$. Inoltre la loro intersezione è certamente diversa da H.

si ottengono congiungendo T_r con le coppie di punti tagliate su t ed f dalle n rette per R, diverse dalla RH. Resta così provata in ogni caso la validità di A2.

Il postulato A3 segue in modo del tutto immediato dalle definizioni date per il parallelismo.

Resta ancora da provare il postulato A4, e cioè che dati un S-punto, P, ed una S-retta, a, esiste una e una sola S-retta, b passante per P e parallela ad a. Se a è di prima specie, $a \sim (T_a F_a)$, anche b è di prima specie e risulta

$$T_b \equiv t_P \cap (H \cup T_a), \qquad F_b \equiv f_P \cap (H \cup F_a).$$

Qualora invece a sia di seconda specie, $a \sim (T_a A)$, si ha $b \sim (T_b B)$ dove B è l'intersezione della retta HA con la retta $(t \cap t_P) \cup \cup (f \cap f_P)$, mentre $T_b \equiv h \cap t_P$. Resta così provato che lo spazio costruito è uno spazio affine generalizzato nel senso di SPERNER.

3. Chiameremo piano dello spazio affine generalizzato, o semplicemente S-piano, un insieme formato da almeno due S-rette distinte e da tutti gli S-punti che appartengono a queste, con la condizione che siano verificate le due seguenti proprietà:

1) la congiungente due S-punti distinti qualsiansi dell'S-piano appartiene all'S-piano;

2) due rette dell'S-piano o sono parallele, oppure si intersecano in un S-punto dell'S-piano.

Se il piano π, che sta alla base della nostra costruzione, non è desarguesiano, due S-rette distinte ed incidenti non è detto che individuino in generale un S-piano. Si riconosce tuttavia facilmente che in ogni caso (qualunque sia cioè la natura del piano π) lo spazio costruito contiene un certo numero di S-piani.

Uno di questi è costituito da tutti e soli gli S-punti per cui risulta $t_A \equiv f_A$, dalle S-rette di prima specie per cui è $T_r \equiv F_r$, e dalle S-rette di seconda specie, $r \sim (T_r R)$, per le quali risulta $R \equiv T_r$. È subito visto che per gli elementi di questo tipo valgono le condizioni 1) e 2), e quindi l'insieme di essi è un S-piano. Questo risulta isomorfo al piano affine che si ottiene trasformando per dualità π, dal quale siano stati soppressi il punto H e le rette del fascio avente per centro H.

Altri n S-piani si ottengono nel modo indicato qui di seguito, in corrispondenza agli n punti di h diversi da H. Fissato un punto K ($\not\equiv H$) su h, le S-rette dell'S-piano, (K), che si ottiene in corrispondenza a K, sono le S-rette di seconda specie $r \sim (KR)$;

gli S-punti di (K) sono dati da $P \sim (t_P f_P)$ con $K \equiv t_P \cap f_P$. È subito visto che due S-punti di (K) sono uniti da una retta che è ancora di (K), mentre due S-rette di (K) che non siano parallele si incontrano in un punto di (K). Quindi (K) è un S-piano.

Un terzo tipo di S-piano si ottiene nel seguente modo. Fissiamo in π un punto M non appartenente ad h, e consideriamo l'insieme, φ_M, formato dagli S-punti $(t_P f_P)$ con $M \in f_P$, dalle S-rette di prima specie $(T_r F_r)$ con $F_r \equiv M$ e dalle S-rette di seconda specie $(T_r R)$ con $R \equiv f \cap (M \cup T_r)$. È subito visto che per gli elementi di φ_M valgono ancora la 1) e la 2) e quindi φ_M è un S-piano. Ad ogni punto di π non appartenente ad h è associato un S-piano di questo tipo, e si ha così un insieme di n^2 S-piani.

Un altro insieme di S-piani, τ_M, di tipo del tutto analogo a quello ora considerato si ottiene scambiando nella definizione di φ_M il ruolo di f_P e F_r rispettivamente con t_P e T_r per quanto concerne gli S-punti e le S-rette di prima specie, e assumendo come S-rette di seconda specie di τ_M quelle $(T_r R)$ per cui è $R \equiv t \cap (M \cup T_r)$.

L' esistenza degli S-piani fino ad ora incontrati porta che per ogni S-punto dallo spazio affine generalizzato costruito nel n. 2 passano almeno $2n + 1$ S-piani.

4. Qualora il piano π possieda delle particolari omologie possiamo dedurne la presenza di altri S-piani dello spazio affine generalizzato S.

Sia α un'omologia di π avente per centro un punto $O (\equiv\!\!|\!\!\equiv H)$ e per asse la retta fondamentale h. Consideriamo l'insieme, $\mathfrak{R}$, di tutte le S-rette di prima specie, $r \sim (T_r F_r)$, tali che T_r ed F_r si corrispondano nella α e l'insieme, $\mathfrak{P}$, formato da tutti gli S-punti, $P \sim (t_P f_P)$ con t_P ed f_P corrispondenti nella α. È subito visto che due S-rette di $\mathfrak{R}$ o sono parallele, o hanno a comune un S-punto di $\mathfrak{P}$, mentre due S-punti, P_1 e P_2, di $\mathfrak{P}$, se t_{P_1} e t_{P_2} non si incontrano su h, hanno a comune una S-retta di $\mathfrak{R}$.

Consideriamo ora un punto $K (\equiv\!\!|\!\!\equiv H)$ della retta h e siano P e Q due S-punti di $\mathfrak{P}$ con $t_P \cap t_Q \equiv K$. La retta PQ è allora di seconda specie e quindi non appartiene ad $\mathfrak{R}$. Indichiamo con $\mathfrak{R}^*$ l'insieme delle S-rette di seconda specie che si ottengono come intersezione di S-punti di $\mathfrak{P}$. L'insieme formato dagli S-punti di $\mathfrak{P}$ e dalle S-rette di $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}^*$ è certamente un S-piano se per le S-rette di $\mathfrak{R}^*$ valgono le seguenti proprietà:

a) Fissato $K \in h$, comunque si prendano P e Q, con $t_P \cap t_Q \equiv K$, la S–retta PQ è sempre la stessa.

b) Le S–rette di $\mathfrak{R}^*$ sono tutte parallele.

Queste due proprietà sono certamente verificate se le due rette t ed f si corrispondono nella α. È subito visto infatti che in tal caso per le S–rette in questione risulta $R \equiv O$.

Se il piano π risulta (a, h)–transitivo, ed è $H \in a$, $a \not\equiv t$ e $a \not\equiv f$, allora per ogni S–punto P dello spazio S passa almeno un S–piano del tipo ora indicato.

5. Nel caso che il piano π sia desarguesiano, S è un ordinario spazio affine. Per riconoscere ciò basta completare lo spazio S aggiungendo gli S–punti « impropri » (corrispondenti alle « stelle » di S–rette parallele) e le S–rette improprie. Si riconosce allora, quando si scambino fra loro le parole S–punto ed S–piano, che la costruzione data è equivalente a quella indicata da L. LOMBARDO RADICE (cfr. [2]) per costruire uno spazio grafico a tre dimensioni partendo da un piano desarguesiano.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. EWALD, *Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume und nichtdesarguessche räumliche Strukturen über beliebigen Ternärkörpern*, « Math. Zeitschr. 75 », 395-418, 1961.

[2] L. LOMBARDO RADICE, *Sull'immersione di un piano grafico in uno spazio grafico a tre dimensioni*, « Rend. Accad. Lincei », VIII, 10, 203-205, 1951.

[3] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1948.

[4] B. SEGRE, *Lectures on moderne Geometry*, with an appendix by L. LOMBARDO RADICE, Roma, Cremonese, 1961.

[5] E. SPERNER, *Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen*, « J. für reine u. angew. Math. », 204, 205-215 1960.

[6] G. ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite*, Lezioni raccolte da G. ZACHER, Napoli, Liguori, 1952.