Bollettino Unione Matematica Italiana

D. P. Gupta

Sur l'approximation de la fonction par les moyennes arithmétiques de sa série ultrasphérique.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.2, p. 166–171.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_2_166_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sur l'approximation de la fonction par les moyennes arithmétiques de sa série ultrasphérique

par D. P. GUPTA (a Allahabad, India) (*) (**)

Summaire. - *Nous démontrons un théorème pour l'approximation de la fonction* $f(\theta, \varphi)$ *par les moyennes* σ_n^k *de Cesàro d'ordre* k *de la série correspondante ultrasphérique sur une sphère.*

1. Soit $f(\theta, \varphi)$ une fonction, définie pour $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; la série ultrasphérique est la suivante:

$$(1.1) \qquad f(\theta, \varphi) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}} .$$

$$f(\theta', \varphi') P_n^{(\lambda)}(\cos \Upsilon) \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

où

$$\cos \Upsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Nous supposons que la fonction

$$(1.2) \qquad f(\theta', \varphi') \,|\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')|^{\lambda - \frac{1}{2}}$$

est absolument intégrable sur la sphére S. AUSSI dans le cas $k < 2\lambda$, nous supposons que la fonction

$$(1.3) \qquad \left(\cos \frac{\Upsilon}{2}\right)^{k-2\lambda} f(\theta', \varphi') \,|\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')|^{\lambda - \frac{1}{2}}$$

soit absolument intégrable sur S. Suivant KOGBETLIANTZ [1], nous

(*) Pervennta alla Segreteria dell'U. M. I. il 4 aprile 1962.
(**) Extrait du Thèse présentée à L'université de Allahabad en 1958.

désignons par $f(\Upsilon)$ la fonction

$$f(\Upsilon) = \frac{1}{2\pi(\sin\Upsilon)^{2\lambda}} \int_{C_\Upsilon} \frac{f(\theta', \varphi')ds'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}}, \tag{1.4}$$

où l'intégrale est prise sur une circonférence C_Υ dont le centre est le point (θ, φ) sur la sphére S, ds' est élément d'arc de C_Υ et le rayon sphérique de cette circonférence est égale à Υ.

Désignons maintenant par $\varphi(\Upsilon)$ la fonction

$$\varphi(\Upsilon) = \left[f(\Upsilon) - \frac{A\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)}\right] \sin^{2\lambda}\Upsilon, \tag{1.5}$$

et par $\Phi_p(x)$ et $\varphi_p(x)$ les fonctions suivantes:

$$\Phi_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1}\varphi(t)dt, \qquad p > 0$$

$$\varphi_p(x) = px^{-p} \int_0^x (x-t)^{p-1}\varphi(t)dt.$$

M. Obrechkoff [2] a démontré le théorème suivant:

Soit pour un $p \geq 0$, un α, $0 \leq \alpha < 1$, on ait

$$\int_0^t |\varphi_p(\tau)| d\tau = o(t^{1+2\lambda+\alpha}), \qquad t \to 0.$$

Alors pour $\overset{k}{\sigma}_n$ on a, $p+\lambda+1 \geq k \geq p+\lambda+\alpha$,

$$\overset{k}{\sigma}_n - A = o(n^{-\alpha}), \qquad k > p+\lambda+\alpha$$

$$\overset{k}{\sigma}_n - A = o(\log n \cdot n^{-\alpha}), \qquad k = p+\lambda+\alpha,$$

$\overset{k}{\sigma}_n$ étant les moyennes de Cesàro d'ordre k de la série (1.1).

Nous avons démontré le théorème nouveau suivant:

THÉOREME. - *Si pour* $p > 0$, $-1 < r < \infty$, *on a*

$$\int_t^\pi \frac{|\varphi_p(t)|}{t^{1+2\lambda}}\,dt = o\left[\left(\log\frac{1}{t}\right)^{r+1}\right],$$

alors pour $\overset{k}{\sigma}_n$ *on a*

$$\overset{k}{\sigma}_n - A = o(\log n)^{r+1}, \quad \text{où} \quad k = p + \lambda.$$

2. Nous donnerons d'abord quelques lemmes.

LEMME 1. - *Désignant par* $s_n^p(\omega)$ *la moyenne arithmétique d'ordre* p *de la série*

$$\Sigma\ (n+\lambda)P_n^{(\lambda)}(\cos\omega), \tag{2.1}$$

nous avons pour $p \geq 0$,

$$s_n^{(p)}(\omega) = \frac{d^p \mid \overset{k}{s}(\omega) \mid}{d\omega^p} = \begin{cases} O(n^{2\lambda+p+1}), \quad 0 \leq \omega \leq \pi, \quad k > 0\,; \\ O\left(\dfrac{n^{\lambda+p-k}}{\omega^{k+\lambda+1}}\right) + O\left(\dfrac{1}{m\omega^{2\lambda+2+p}}\right), \\ \qquad 0 < \omega \leq \eta < \pi\,; \\ O\left(\dfrac{n^{\lambda+p-k}}{\omega^{k+\lambda+1}}\right), \\ \qquad 0 < \omega \leq \eta < \pi,\ \lambda + [p] + 1 \geq k. \end{cases} \tag{2.2}$$

[cf. M. N. OBRECHKOFF [2]].

LEMME 2. - M. KOGBETLIANTZ [1] *a démontré que sous les conditions* (1.2) *et* (1.3), *on a*

$$\overset{k}{\sigma}_n - A = \int_0^\eta \varphi(\Upsilon) s_n^k(\Upsilon)\,d\Upsilon + o(1), \qquad k > \lambda,$$

pour chaque η, $0 < \eta < \pi$.

3. En nous appuyant sur les lemmes, il suffit de prouver

$$\int_0^\eta \varphi(\omega) s_n^{p+\lambda}(\omega)\,d\omega = o[(\log n)^{r+1}]. \tag{3.1}$$

En intégrant par parties nous avons

$$\int_0^\eta \varphi(\omega) s_n^{p+\lambda}(\omega)d\omega$$

$$(3.2) \qquad = \left[\sum_{\rho=1}^{m} (-1)^{\rho-1} \Phi_\rho(\omega) s_n^{(\rho-1)}(\omega) \right]_0^\eta + (-1)^m \int_0^\eta \Phi_m(\omega) s_n^{(m)}(\omega) d\omega).$$

Si p n'est pas entier, $p = m + \sigma (0 < \sigma < 1)$, nous avons d'aprés la définition la dérivée d'ordre non entier,

$$\int_0^\eta \Phi_p(\omega) s_n^{(p)}(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^\eta \Phi_p(\omega) d\omega \int_\omega^\eta (t-\omega)^{-\sigma} s_n^{(m+1)}(t) dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^\eta s_n^{(m+1)}(t) dt \int_0^t (t-\omega)^{-\sigma} \Phi_p(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^\eta s_n^{(m+1)}(t) dt \int_0^t (t-\omega)^{-\sigma} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\omega (\omega-u)^{\sigma-1} \Phi_m(u) du \right\} d\omega$$

$$(3.3) \qquad = \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \int_0^\eta s_n^{(m+1)}(t) dt \int_0^t \Phi_m(u) \left\{ \int_u^t (t-\omega)^{-\sigma} (\omega-u)^{\sigma-1} d\omega \right\} du.$$

Par la substitution $\omega = u + (t-u)\xi$, nous trouvons

$$\int_u^t (t-\omega)^{-\sigma} (\omega-u)^{\sigma-1} d\omega = \int_0^1 (1-\xi)^{-\sigma} \xi^{\sigma-1} d\xi = \frac{\Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(1)} .$$

Par conséquent,

$$\int_0^\eta \Phi_p(\omega)s_n^{(p)}(\omega)d\omega = \int_0^\eta s_n^{(m+1)}(t)\Phi_{m+1}(t)dt$$

$$= \Phi_{m+1}(\eta)s_n^{(m)}(\eta) - \int_0^\eta \Phi_m(t)s_n^{(m)}(t)dt. \tag{3.4}$$

D' aprés (3.2) et (3.4) on aura

$$J \equiv \int_0^\eta \varphi(\omega)s_n^{p+\lambda}(\omega)d\omega$$

$$= \left[\sum_{\rho=1}^{m} (-1)^{\rho-1}\Phi_p(\omega)s_n^{(\rho-1)}(\omega)\right]_0^\eta + (-1)^m\Big\{\Phi_{m+1}(\eta)s_n^{(m)}(\eta) -$$

$$- \int_0^\eta \Phi_p(u)s_n^{(p)}(u)\,du\Big\}$$

$$= J_1 + J_2 + J_3. \tag{3.5}$$

(2.2) donne que

$$J_1 = o(1), \quad \text{si} \quad q < p. \tag{3.6}$$

D' aprés l' inégalité (2.2) nous avons

$$J_2 = o(1). \tag{3.7}$$

Donc on a

$$J = o(1) + (-1)^{m+1}\int_0^\eta \Phi_p(u)s_n^{(p)}(u)du$$

$$= o(1) + \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(p+1)}\int_0^\eta u^p\varphi_p(u)s_n^{(p)}(u)du$$

$$= o(1) + \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(p+1)}L. \tag{3.8}$$

Nous écrivons

$$L = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\eta} \right) u^p \varphi_p(u) s_n^{(p)}(u) du = L_1 + L_2 .$$

On obtient

$$L_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi_p(u)}{u^{1+2\lambda}} u^{1+2\lambda+p} s_n^{(p)}(u) du = O(n^{p+2\lambda+1}) \int_0^{\frac{1}{n}} \left| \frac{\varphi_p(u)}{u^{1+2\lambda}} \right| u^{1+2\lambda+p} du$$

$$= O(n^{p+2\lambda+1}) \left[\left\{ - u^{1+2\lambda+p} \int_u^{\pi} \frac{|\varphi_p(t)|}{t^{1+2\lambda}} dt \right\}_{u=0}^{u=\frac{1}{n}} + (1 + 2\lambda + p) \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} u^{2\lambda+p} \left(\int_u^{\pi} \frac{|\varphi_p(t)|}{t^{1+2\lambda}} dt \right) du \right]$$

$$= o[(\log n)^{r+1}] + o(n^{p+2\lambda+1}) \int_0^{\frac{1}{n}} u^{2\lambda+p} \left(\log \frac{1}{u} \right)^{r+1} du$$

$$= o[(\log n)^{r+1}]. \tag{3.9}$$

$$L_2 = \int_{\frac{1}{n}}^{\eta} u^p \varphi_p(u) s_n^{(p)}(u) du = O\left[\int_{\frac{1}{n}}^{\eta} u^p \, | \varphi_p(u) | \, \frac{du}{u^{p+2\lambda+1}} \right]$$

$$= o(\log n)^{r+1}. \tag{3.10}$$

Le théorème découle des (3.8), (3.9) et (3.10).

Je suis obligé à Prof. B. N. Prasad pour sa direction bienveillante pendant la préparation de cette note.

BEFERENCES

[1] E. Kogbetliantz, *Becherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques des moyennes arithmétiques*, « Journal de Mathématique » (9), Vol. 3, 1924, 107-187.

[2] N. Obrechkoff, *Sur la sommation de la série ultrasphérique par la méthode des moyennes arithmétiques*, « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », Vol. 59, 1936, 266-287.