
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FULVIA SKOF

**Famiglie di serie non prolungabili e non
lacunari e serie non prolungabili con
“tratto ridotto”.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 17
(1962), n.1, p. 68–80.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_68_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_68_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Famiglie di serie non prolungabili e non lacunari e serie non prolungabili con "tratto ridotto", (*).

Nota di FULVIA SKOF (a Milano) (**)

Sunto. - Si stabilisce un criterio sufficiente di non prolungabilità che pone in relazione l'ampiezza del « tratto ridotto » con l'andamento del modulo dei coefficienti; si segnala una famiglia di serie non prolungabili per le quali la sola condizione è imposta — come al solito — ai moduli dei coefficienti, ma è tale da non implicare alcuna lacunarità.

Summary. - A sufficient condition for non-continuability of a power series $\sum a_n z^n$ is established, in which the amplitude of « tracts of vanishing relative length » is connected with the behaviour of $|a_n|$.

A family of non-continuable series is also shown, for which conditions are satisfied, concerning, as usual, only the sequence $|a_n|$ and for which, however, any lacunarity does not exist.

Both results are obtained by the use of a known G. RICCI's theorem.

1. INTRODUZIONE. - Fra i teoremi riguardanti le serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ non prolungabili (che possiamo supporre aventi raggio di convergenza 1) vi sono quelli dei due seguenti tipi:

1°) criteri sufficienti che impegnano la successione $\{|a_n|\}$ dei moduli dei coefficienti, imponendole certi caratteri di lacunarità lungo $\{I_h\}$ ($h = 1, 2, 3, \dots$) con $I_h \equiv (1 - \theta)n_h \leq m \leq (1 + \theta)n_h$, ($0 < \theta < 1$), oppure lungo $\{J_h\}$, essendo J_h un « tratto ridotto » concentrico con I_h ; allora $\lim_{m \rightarrow +\infty} |a_m|^{1/m} < \lim_{m \rightarrow +\infty} |a_m|^{1/m} = 1$ per $m \in I$ = $\cup I_h$, $m \rightarrow +\infty$;

2°) teoremi che assicurano la non-prolungabilità di « quasi tutte » le $f(z)$ con $a_n = \alpha_n e^{i\gamma_n}$ ($\alpha_n = |a_n|$) al variare comunque della successione $\{\gamma_n \pmod{2\pi}\}$, col tenere fissa $\{\alpha_n\}$.

In questa Nota ci proponiamo di stabilire:

1°) un criterio sufficiente di non-prolungabilità (vedi TEOREMA I): le condizioni in esso richieste individuano classi $\mathcal{S}(\varphi_h)$,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca N. 14 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno acc. 1960-'61.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 23 marzo 1962.

$\nu_h; \gamma, \delta$) di serie $f(z)$ che verranno definite nel n. 2. Si viene così a porre in relazione, come è naturale, l'ampiezza del tratto ridotto $J_h (\subset I_h)$ con l'andamento di $\{ |a_m| \}$, $m \in I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$;

2°) l'esistenza di classi di serie $f(z)$ non prolungabili (vedi TEOREMA II) che rientrano nel detto criterio e che tuttavia non presentano carattere di lacunarità poiché in esse $|a_m|^{1/m} \rightarrow 1$ per $m \in I$, $m \rightarrow +\infty$, e per le quali la successione $\{\gamma_n(\bmod 2\pi)\}$ è completamente libera.

Alcuni criteri, per forme speciali della successione φ_h che regola l'ampiezza del tratto ridotto J_h , si trovano in G. RICCI [2], e precisamente per le seguenti espressioni di φ_h :

$$n_h / \log^\tau n_h, \quad n_h^{\tau-1} \quad (\tau > 0),$$

$$V_h \log n_h \quad \text{dove} \quad (e^\delta + 1) \log n_h \leq V_h = o(n_h / \log n_h).$$

Tuttavia, in questi criteri non è considerata la possibilità di valori m eccezionali entro $I_h - J_h$, e neppure la possibilità di considerare coefficienti $a_m \neq 0$ per ogni $m \in J_h$ e abbastanza grandi in guisa da consentire anche l'esistenza del limite $|a_m|^{1/m} \rightarrow 1$, $m \in J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup \dots$, $m \rightarrow +\infty$, come invece si trova nel nostro criterio (TEOREMA I).

Un criterio, nello stesso ordine di idee del nostro, e che tuttavia non rientra in questo, si trova in M. E. NOBLE [1]. D'altronde anche il nostro criterio non rientra in quello di M. E. NOBLE.

2. La classe $S(\varphi_h, \nu_h; \gamma, \delta)$ di serie di potenze.

Sia $\{n_h\} = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ una successione crescente di interi assoluti; sia θ un numero reale, $0 < \theta < 1$.

Si consideri la successione $\{I_h\}$ di tratti

$$I_h = (1 - \theta)n_h \leq m \leq (1 + \theta)n_h \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

e la loro riunione $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$.

Sia $\{\varphi_h\}$ una successione di numeri reali tali che

$$0 < \varphi_h \leq n_h/2, \quad 0 < \lim (\varphi_h / \log n_h) \leq +\infty$$

(e quindi $\varphi_h \rightarrow +\infty$).

Sia γ un numero reale, $0 < \gamma < \theta^2 \cdot \lim (n_h / \varphi_h)$, e si consideri la

successione $\{J_h\}$ di tratti

$$J_h \equiv n_h - \sqrt{\eta \cdot n_h \varphi_h} \leq m \leq n_h + \sqrt{\eta \cdot n_h \varphi_h}$$

e la loro riunione $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup \dots$.

(È evidente che per $h \geq h_0(\eta)$ è $J_h \subseteq I_h$, $J \subseteq I$; diciamo J_h tratto ridotto).

Sia $\{v_h\}$ una successione di interi assoluti.

DEF. - Diremo che una serie di potenze $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ appartiene alla classe $\mathcal{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta)$ lungo la successione di tratti I_h , quando sono verificate le condizioni seguenti:

(α) $\overline{|a_n|^{1/n}} = 1$ (il raggio di convergenza è 1)

(β) $|a_{n_h}|^{1/\varphi_h} \rightarrow 1$ per $h \rightarrow +\infty$

(e quindi, a maggior ragione, $|a_{n_h}|^{1/n_h} \rightarrow 1$)

(γ) $\overline{|a_m|^{1/\varphi_h}} \leq 1$ per $m \in I - J$, $m \rightarrow +\infty$

(δ) esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che sia

$$|a_m|^{1/\varphi_h} < e^{-\delta} (< 1) \quad \text{per } m \in J_h. \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

(v) e queste due condizioni (γ) e (δ) sono verificate quando si escludano da I_h (cioè da $I_h - J_h$, J_h complessivamente) al più v_h valori eccezionali di m per i quali a_m è vincolato soltanto dalla (α), e inoltre v_h verifica la seguente condizione:

se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow +\infty$, $v_h = o(\varphi_h/\log(n_h/\varphi_h))$

se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow \rho < +\infty$, $v_h = \text{massimo intero} < 2\delta\rho - 1$.

OSSERVAZIONI. - 1°) In J_h , per h abbastanza grande, esiste il valore eccezionale $m = n_h$.

2°) Sia $\{\bar{n}_l\}$ una successione estratta dalla successione $\{n_h\}$ (essa è definita da $h = h(l)$), e denotiamo con $\bar{I}_l$, $\bar{\varphi}_l$, $\bar{v}_l$ le successioni corrispondenti a $\{\bar{n}_l\}$. Allora è evidente che

$$(2.1) \quad \mathcal{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta) \text{ lungo } \{I_h\} \subseteq \mathcal{S}(\bar{\varphi}_l, \bar{v}_l; \eta, \delta) \text{ lungo } \{\bar{I}_l\}.$$

Ne segue, ad esempio, che se λ è un valore limite (finito o infinito) di φ_h/v_h , si può estrarre dalla successione $\{n_h\}$ una successione parziale $\{n_l\}$, in modo che esista il limite $\lim \bar{\varphi}_l/\bar{v}_l = \lambda$, e inoltre vale (2.1).

Senza alterare la generalità si potrà quindi sempre supporre, quando sia utile, l'esistenza di determinati limiti.

3°) Sia $0 < \theta' \leq \theta$. Diciamo I_h' il tratto costruito con θ' , come I_h è costruito con θ . Allora ogni S lungo $\{I_h\}$ è, a maggior ragione, S lungo $\{I_h'\}$ (tutte le volte che $J_h \subseteq I_h'$ per h abbastanza grande, cioè tutte le volte che $\eta < \theta'^2 \liminf n_h/\varphi_h$).

4°) Sia $0 < \sigma < 1$. Si vede che il complesso delle condizioni (a), ..., (v) è ancora verificato quando a φ_h , δ si sostituisca $\varphi_h' = \sigma \cdot \varphi_h$, $\delta' = \delta/\sigma$. Pertanto

$$S(\varphi_h, \nu_h; \eta, \delta) \subseteq S(\varphi_h', \nu_h; \eta, \delta') \quad \text{lungo } \{I_h\}.$$

(Infatti risulta $J_h' \subseteq J_h$; inoltre, se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow +\infty$ è $\varphi_h'/\log(n_h/\varphi_h') \sim \sigma \cdot \varphi_h/\log(n_h/\varphi_h)$; se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow \rho < +\infty$ è $\varphi_h'/\log n_h \rightarrow \rho' = \sigma\rho$ e risulta $\delta'\rho' = (\delta/\sigma) \cdot \sigma\rho = \delta\rho$).

In base a questa osservazione, nel caso $\varphi_h/\log n_h \rightarrow \rho < +\infty$ si può sempre supporre, quando sia utile, ρ abbastanza piccolo, per esempio $0 < \rho < 1$.

5°) Sia $0 < \delta' \leq \delta$. Controllando le condizioni (x), ..., (v) si vede facilmente che

se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow +\infty$, allora è $S(\varphi_h, \nu_h; \eta, \delta) \subseteq S(\varphi_h, \nu_h; \eta, \delta')$;

se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow \rho < +\infty$, l'affermazione precedente non è più valida poiché $\delta'\rho \leq \delta\rho$ e potrebbe aversi troppo elevato il numero ν_h degli interi eccezionali $m \in I_h$.

3. I risultati.

TEOREMA I. - *Ogni $f(z) \in S(\varphi_h, \nu_h; \eta, \delta)$ non è prolungabile quando i numeri η e δ possono essere scelti in guisa da avere*

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (\log n_h)/\varphi_h < \delta \leq \eta < \theta^2 \lim_{h \rightarrow +\infty} n_h/\varphi_h.$$

(Se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow +\infty$, per Oss. 5°) al n. 2, il teorema vale con $\delta \geq \eta$).

OSSERVAZIONE. - Quando esiste c , $0 < c \leq 1/2$, tale che $cn_h \leq \varphi_h$ ($\leq n_h/2$) allora siamo nel caso $\varphi_h/\log n_h \rightarrow +\infty$; I_h ha la semiampiezza $\geq \sqrt{c\eta n_h}$; nelle condizioni (β) e (γ) si può sostituire n_h in luogo di φ_h ; la condizione (δ) è soddisfatta da una successione di coefficienti a_m per la quale $\lim |a_m|^{1/m} < 1$, $m \in I_h$ (salvo la successione delle eventuali eccezioni): questo equivale a porre $a_m = 0$, ai fini della non-prolungabilità. È evidente che, cambiando θ , si può assumere $J_h \equiv I_h$. D'altronde $n_h \cdot c/\log(1/c) \leq \varphi_h/\log(n_h/\varphi_h) \leq \leq n_h \cdot 1/(2 \log 2)$, e quindi la (v) richiede soltanto $\nu_h = o(n_h)$.

Si ottiene così, come caso particolare, il classico teorema di FABRY:

TEOREMA (FABRY). - Ogni $f(z) \in \mathcal{S}(\varphi_h, o(n_h); \eta, \delta)$ con $\varphi_h \geq cn_h$ non è prolungabile.

In $\mathcal{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta)$ esistono serie di potenze (non-prolungabili in forza del Teorema I) per le quali la successione $\{ |a_n| \}$ dei moduli dei coefficienti non ha alcuna struttura lacunare. Precisamente:

TEOREMA II. Fissati $0 < \theta < 1$, $\{n_h\}$, $\{I_h\}$ e $\tau(n)$ con

$$0 < \tau(n) \leq n, \quad \tau(n)/\log n \rightarrow +\infty$$

esistono infinite successioni $\{\alpha_n\}$ di numeri reali e positivi α_n per le quali

$$\overline{\lim} \alpha_n^{1/n} = 1, \quad \alpha_n^{1/\tau(m)} \rightarrow 1 \quad \text{per } m \in I, \quad m \rightarrow +\infty$$

e tali che ogni serie di potenze $f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n e^{i\tau_n} z^n$ non è prolungabile comunque venga scelta la successione $\{\gamma_n\}$.

Se φ_h è tale che $\inf_{m \in I_h} \tau(m)/\varphi_h \rightarrow +\infty$ per $h \rightarrow +\infty$, allora ogni serie di questo tipo appartiene, comunque si scelga $\{\gamma_n\}$, alla classe $\mathcal{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta)$.

4. La classe $\mathcal{R}(v_h)$.

In uno studio di G. RICCI [2] sulla localizzazione di un punto critico delle serie di potenze su $|z| = 1$, si trova un criterio che qui riporteremo: il suo enunciato conduce a individuare classi di serie di potenze che denoteremo con $\mathcal{R}(v_h)$. Conviene introdurre la seguente definizione.

Siano $f(z)$, $\{n_h\}$, θ ($0 < \theta < 1$), $\{I_h\}$, I definiti come nel n. 2. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} u \left(\log \frac{v}{u} + 4 \right) & \text{per } 1 \leq u \leq v \\ v \left(\log \frac{u}{v} + 4 \right) & \text{per } 1 \leq v \leq u \end{cases}$$

e anche la funzione ausiliaria

$$\Psi_h(u) = \frac{K}{n_h v_h^2} \exp \left\{ \frac{u^2}{n_h} - \Phi(u, v_h) \right\} \cdot |a_h|$$

dove $K > 0$ è indipendente da h , e $\{v_h\}$ è una successione di numeri reali tale che $v_h = o(n_h)$.

Poniamo la seguente definizione:

DEF. - «Diremo che la serie di potenze $f(z)$ appartiene alla classe $\mathfrak{R}(v_h)$ lungo la successione $\{I_h\}$ di tratti I_h , quando esiste un numero $K > 0$ (indipendente da h) tale che si abbia

$$\lim |a_n|^{1/n} = 1, \quad |a_{n_h}|^{1/n_h} \rightarrow 1 \quad \text{per } h \rightarrow +\infty$$

$$|a_m| \leq \Psi_h(u) \quad \text{per } m = n_h \pm u \in I_h, \quad m \neq n_h \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

quando, per quest'ultima condizione, si escludano al più v_h (cioè al più $[v_h]$) valori eccezionali di m . Il numero v_h^* dei valori eccezionali di m deve soddisfare $v_h^* \leq v_h$.

Nel caso in cui sia $v_h = O(1)$ (v_h limitato) il numero v_h^* delle eccezioni in I_h non dovrà (più ristrettivamente) superare il massimo intero minore di $v_0 = \overline{\lim} v_h$, cioè $v_h^* \leq$ massimo intero minore di v_0 .

Nello studio citato di G. RICCI si trova dimostrato un criterio che, in seguito alla definizione di classe $\mathfrak{R}(v_h)$ sopra introdotta, può essere enunciato come segue:

(A) «Ogni $f(z) \in \mathfrak{R}(v_h)$ non è prolungabile».

5. Un'osservazione sul criterio (A) del n. 4.

Il criterio che si trova in G. RICCI [2], p. 9, richiede, nel caso di v_h limitato e $v_0 = \overline{\lim} v_h$ che sia $v_h^* \leq v_0 - 1$. Tuttavia, basta modificare lievemente il procedimento dimostrativo per consentire la successione v_h di numeri reali ≥ 1 , e $v_h \leq$ (massimo intero minore di $v_0 = \overline{\lim} v_h$). A questo scopo basta osservare che, oltre la disuguaglianza $|g(m)/g(n_h)| < v_0^2 \exp \Phi(u, v_0 + 1)$ dimostrata in [2], pag. 27, vale anche quella analoga

$$(5.1) \quad |g(m)/g(n_h)| < v_0^2 \exp \Phi(u, v_0 + \delta) \quad (v_0 \geq 1, \delta > 0),$$

essendo $\delta > 0$ indipendente da h e da m , e poi considerare $v_0 + \delta$ in luogo di V_0 (cioè $V_0 = v_0 + \delta$). Infatti, a p. 27, si trova ⁽¹⁾

$$|g(m)/g(n_h)| \leq v_0^2 \exp \{ v_0 \log(u/v_0) + \varepsilon_h^{IV} \log(u/v_0) + v_0(3.7 + \varepsilon_h + \varepsilon_h^{VI}) \}$$

⁽¹⁾ Segnaliamo che nella disuguaglianza qui ricordata (G. RICCI [2], p. 27), per errore di trascrizione, manca il fattore v_0 del prodotto $v_0(\dots)$ del secondo membro, ma il procedimento è condotto come se questo vi fosse scritto.

dove ε_h^{IV} , ε_h , ε_h^{VI} possono essere scelti piccoli quanto si vuole, pur di diradare la successione $\{n_h\}$ in una successione parziale. Poniamo

$$\Phi_1(u, v_0) = v_0 \{ \log(u/v_0) + 3.7 + \varepsilon_h + \varepsilon_h^{VI} \} + \varepsilon_h^{IV} \log(u/v_0),$$

e diradiamo $\{n_h\}$ in guisa da avere $3.7 + \varepsilon_h + \varepsilon_h^{VI} < 3.9$ e $|\varepsilon_h^{IV}| < \delta$. Allora risulta

$$\Phi_1(u, v_0) \leq v_0 \{ \log(u/v_0) + 3.9 \} + \delta \log(u/v_0)$$

Consideriamo adesso

$$\begin{aligned} \Phi(u, v_0 + \delta) &= (v_0 + \delta) \{ \log(u/(v_0 + \delta)) + 4 \} \geq \\ &\geq (v_0 + \delta) \{ \log(u/v_0) - \delta/v_0 + 4 \} \quad (u \geq v_0 + \delta) \end{aligned}$$

e quindi

$$\Phi(u, v_0 + \delta) - \Phi_1(u, v_0) \geq 0.1v_0 + \delta(3 - \delta) > 0, \quad \text{per } \delta < 3.$$

Poiché $v_0 = \overline{\lim} v_h - \delta$ può essere assunto prossimo a $\overline{\lim} v_h$ quanto si vuole, risulta $\delta < 3$, e quindi

$$|g(m)/g(n_h)| \leq v_0^2 \exp \Phi_1(u, v_0) < v_0^2 \exp \Phi(u, v_0 + \delta)$$

e la (5.1) è dimostrata.

Per la validità della proprietà $\mathfrak{R}(v_h)$ basta osservare che nell'espressione della funzione $\Psi_h(u)$ il coefficiente $K/(n_h v_h^2)$ ha il numeratore K costante abbastanza grande, e che per $v_0 \geq 1$ risulta

$$\frac{K'}{n_h(v_0 + \delta)^2} > \frac{K'}{n_h v_0^2(1 + \delta)^2} = \frac{K}{n_h v_0^2}$$

dove K è la nuova costante $K'/(1 + \delta)^2$.

6. Un'osservazione sulla funzione ausiliaria $\Phi(u, v)$ di $\mathfrak{R}(v_h)$.

Sussiste il seguente lemma, che verrà usato nel n. 7:

LEMMA. - Sia $\tau(u, v) = u^2/v - \Phi(u, v)$, dove

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} u \left(\log \frac{v}{u} + 4 \right) & \text{per } 1 \leq u \leq v \\ v \left(\log \frac{u}{v} + 4 \right) & \text{per } 1 \leq v \leq u. \end{cases}$$

Per ogni $1 \leq v < n/2$ risulta

$$\text{Min } \tau(u, v) = \tau(\sqrt{nv/2}, v) = -v \{ \log(n/v) + c \}/2, \quad (c = 6.30 \dots).$$

DIMOSTRAZIONE. - Cominciamo con l'osservare che $\Phi(u, v)$ è, per ogni v , funzione continua crescente al crescere di u , essendo

$$\begin{aligned} \Phi_u &= \log(v/u) + 3 > 0 && \text{per } 1 \leq u \leq v; \\ \Phi_u &= v/u > 0 && \text{per } 1 \leq v \leq u. \end{aligned}$$

Essendo poi

$$\begin{aligned} \tau_u &= 2u/n - \log(v, u) + 3 && \text{per } 1 \leq u \leq v; \\ \tau_u &= (2u^2 - nv)/nu && \text{per } 1 \leq v \leq u, \end{aligned}$$

risulta:

$$\tau_u < 0 \text{ per } 1 \leq u \leq v \quad \text{e per } v \leq u < \sqrt{nv/2}; \quad \tau_u > 0 \text{ per } u > \sqrt{nv/2},$$

e ne segue l'asserto.

7. Dimostrazione del Teorema I.

Dimostreremo il Teorema I provando che, assegnata $\mathcal{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta)$:

1°) se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow +\infty$, esiste v_h tale che $v_h \geq v_h - 1$, $v_h = o(n_h)$ e inoltre $\mathcal{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta) \subseteq \mathcal{R}(v_h)$ (si tenga presente che in v_h è computato definitivamente l'indice n_h fra quelli eccezionali);

2°) se $\varphi_h/\log n_h \rightarrow \rho < +\infty$, esiste v_h tale che $v_h - 1 =$ (massimo intero $< \lim v_h < +\infty$) e $\mathcal{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta) \subseteq \mathcal{R}(v_h)$.

Allora dal criterio (A) seguirà il Teorema I.

In base all'osservazione 2°) del n. 2, passando eventualmente ad una successione parziale, possiamo in ogni caso ridurci ad una delle seguenti circostanze:

- a) $\varphi_h/\log n_h \rightarrow +\infty$, $\varphi_h/n_h \rightarrow c$ con $0 < c \leq 1/2$;
- b) $\varphi_h/\log n_h \rightarrow +\infty$, $\varphi_h/n_h \rightarrow 0$;
- c) $\varphi_h/\log n_h \rightarrow \rho < +\infty$.

a) Il caso a) conduce al teorema classico di E. FABRY (vedi Osservazione al n. 3). La dimostrazione in questo caso procede in modo analogo a quella del caso b) e non la riporteremo.

b) Basta dimostrare che i v_h^* valori di m eccezionali per la

$\mathfrak{R}(v_h)$, contenuti in I_h , sono da ricercarsi fra gli al più v_h valori di m eccezionali per la $\mathfrak{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta)$, fra i quali è compreso anche l'indice $m = n_h$. Con questo risulterà dimostrato $v_h^* \leq v_h - 1$ e quindi assumendo $v_h = v_h - 1$ risulta $v_h = o(n_h)$ e $\mathfrak{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta) \subseteq \mathfrak{R}(v_h)$.

Denotiamo con v_h' e v_h'' due numeri maggioranti rispettivamente del numero dei valori m eccezionali per la $\mathfrak{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta)$ nell'insieme $I_h - J_h$ ($m = n_h \pm u$, $\sqrt{\eta n_h \varphi_h} < u \leq n_h/2$) e nel tratto ridotto J_h escluso $m = n_h$, cioè $m = n_h \pm u$, $1 \leq u \leq \sqrt{\eta n_h \varphi_h}$, e inoltre siano v_h' e v_h'' scelti in modo da avere

$$v_h' + v_h'' + 1 = v_h.$$

(Si tenga presente che per h abbastanza grande anche $m = n_h$ è valore eccezionale e pertanto va computato in v_h).

Poniamo

$$v_h = v_h - 1 = v_h' + v_h'' = \varepsilon_h \varphi_h / \log(n_h / \varphi_h), \quad (\varepsilon_h \rightarrow 0+).$$

In $I_h - J_h$ risulta

$$v_h = o(\varphi_h) = o(\sqrt{\eta n_h \varphi_h}) = o(u)$$

e quindi

$$v_h < \sqrt{\eta n_h \varphi_h} \leq u$$

per h abbastanza grande. Dunque

$$\Phi(u, v_h) = v_h \{ \log(u/v_h) + 4 \},$$

e

$$\begin{aligned} \log \Psi_h(u) &= \log \Psi_h(u; v_h) = \\ &= \frac{u^2}{n_h} - v_h \left(\log \frac{u}{v_h} + 4 \right) + \log \frac{K}{n_h v_h^2} + \log |a_{n_h}|. \end{aligned}$$

L'espressione

$$\tau(u, v_h) = \frac{u^2}{n_h} - v_h \left(\log \frac{u}{v_h} + 4 \right)$$

(già considerata nel lemma) per $\sqrt{\eta n_h \varphi_h} \leq u \leq \theta n_h$ ammette derivata τ_u positiva; pertanto il minimo di $\tau(u, v)$ viene assunto nel-

l'estremo sinistro dell'intervallo. ed è

$$\tau(u, v_h) \geq \eta \varphi_h - v_h \{ \log (\sqrt{\eta n_h \varphi_h} / v_h) + 4 \} = \eta \varphi_h + o(\varphi_h).$$

Infatti, per la scelta di v_h , si ha

$$\begin{aligned} v_h \left\{ \log \frac{\sqrt{\eta n_h \varphi_h}}{v_h} + 4 \right\} &= \frac{\varepsilon_h \varphi_h}{\log(n_h / \varphi_h)} \cdot \\ &\cdot \left\{ -\log \varepsilon_h + \frac{1}{2} \log \frac{n_h}{\varphi_h} + \log \log \frac{n_h}{\varphi_h} + 4 + \frac{1}{2} \log \eta \right\} = \\ &= -\varphi_h \cdot (\varepsilon_h \log \varepsilon_h) / \log(n_h / \varphi_h) + o(\varphi_h) = o(\varphi_h). \end{aligned}$$

Si ha anche, tenuto conto che vale (β) ed è $v_h = o(n_h)$:

$$\log(K/n_h v_h^2) + \log |a_n| = O(\log n_h) + o(\varphi_h) = o(\varphi_h),$$

e risulta quindi, in definitiva,

$$(7.1) \quad \log \Psi_h(u) \underset{o}{\geq} \eta \varphi_h + o(\varphi_h) \quad \text{per } m \in I_h - J_h.$$

Da (7.1) e da (γ) segue

$$|a_m| \leq \Psi_h(u) \quad \text{per } m \in I_h - J_h,$$

salvo al più $v_h' = o(\varphi_h / \log(n_h / \varphi_h))$ valori di m eccezionali.

Consideriamo il tratto ridotto J_h . Per il lemma (vedi n. 6) il minimo dell'espressione $\tau(u, v_h)$ si ha per $u = \sqrt{n_h v_h / 2}$ e vale $-v_h \{ \log(n_h / v_h) + c \} / 2$. Quindi per $m \in J_h$, $m \neq n_h$ e $v_h = v_h - 1$, risulta

$$\begin{aligned} \log \Psi_h(u) &\geq -\frac{\varepsilon_h}{2} \varphi_h \left\{ \log \frac{n_h}{\varphi_h} - \log \varepsilon_h + \log \log \frac{n_h}{\varphi_h} \right\} \cdot 1 / \log \frac{n_h}{\varphi_h} + o(\varphi_h) = \\ &= -(\varepsilon_h / 2) \varphi_h + o(\varphi_h), \end{aligned}$$

e quindi

$$(7.2) \quad \log \Psi_h(u) = o(\varphi_h).$$

Da (7.2) e da (δ) segue

$$|a_m| \leq \Psi_h(u) \quad \text{per } m \in J_h, \quad m \neq n_h,$$

salvo al più $v_h'' = o(\varphi_h/\log(n_h/\varphi_h))$ valori di m eccezionali. Poiché

$$v_h^* \leq v_h' + v_h'' = v_h = o(\varphi_h/\log(n_h/\varphi_h)) = o(\varphi_h) = o(n_h),$$

sono verificate le condizioni per $\mathfrak{R}(v_h)$ ed è $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}(v_h)$ in questo caso.

c) Sia $\varphi_h/\log n_h \rightarrow \rho > 0$; si può supporre $0 < \rho < 1$ (vedi Osservazione 4°), nel n. 2).

Diamo a v_h' e v_h'' significato analogo a quello attribuito nel comma b), e cioè siano due numeri maggioranti rispettivamente del numero dei valori m eccezionali per la $\mathfrak{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta)$ contenuti in $I_h - J_h$ e J_h escluso $m = n_h$, scelti in modo da avere

$$v_h' + v_h'' + 1 = v_h$$

($m = n_h$ è definitivamente valore eccezionale).

Scegliamo $v_h > v_h - 1 = v_h' + v_h''$, e precisamente:

se $2\delta\rho$ è intero, sia $v_h = 2(\delta\rho - 1) - 1/2$

se $2\delta\rho$ non è intero, sia $v_h = 2(\delta\rho - 1) - (1/2) \text{ Mant}(2\delta\rho)$.

Essendo v_h limitato, per ogni $m \in I_h - J_h$ (cioè per $m = n_h \pm u$, $\sqrt{\eta n_h \varphi_h} < u \leq \theta n_h$) risulta $v_h \leq u$ quando h è abbastanza grande.

Il minimo valore dell'espressione $\tau(u, v_h)$ si presenta all'estremo sinistro dell'intervallo, e risulta

$$\tau(u, v_h) \geq \eta\varphi_h - (v_h/2) \log n_h + o(\varphi_h) \geq \delta\varphi_h - (v_h/2) \log n_h + o(\varphi_h).$$

Ne segue

$$\log \Psi_h(u) \geq \delta\varphi_h - (1 + v_h/2) \log n_h + o(\varphi_h).$$

Fissato $\varepsilon = 1/(8\delta)$ se $2\delta\rho$ è intero, $\varepsilon = (1/8\delta) \text{ Mant}(2\delta\rho)$ se $2\delta\rho$ non è intero, si ha, per $h \geq h_1(\varepsilon)$.

$$\rho - \varepsilon < \varphi_h/\log n_h < \rho + \varepsilon$$

e quindi

$$\log \Psi_h(u) \geq (\delta\rho - \varepsilon\delta - 1 - v_h/2) \log n_h = \varepsilon\delta \log n_h > \varphi_h \cdot \varepsilon\delta/(\rho + \varepsilon)$$

da cui segue, ricordando (γ):

$$|a_m| \leq \Psi_h(u) \quad \text{per } m \in I_h - J_h$$

e h abbastanza grande, salvo al più v_h' valori di m eccezionali.

Per $m \in J_h$, da considerazioni analoghe a quelle svolte precedentemente, risulta

$$\log \Psi_h(u) \geqslant -(1 + v_h/2) \log n_h + o(\log n_h)$$

e quindi, per la scelta di v_h , si ha

$$\log \Psi_h(u) \begin{cases} \geqslant -\delta(\rho - 1/4\delta) \log n_h + o(\log n_h), & \text{se } 2\delta\rho \text{ è intero} \\ \geqslant -\delta[\rho - (1/4\delta)\text{Mant}(2\delta\rho)] \log n_h + o(\log n_h), & \text{se } 2\delta\rho \text{ non è intero.} \end{cases}$$

Fissato, come sopra, $\varepsilon < 1/(4\delta)$ oppure $\varepsilon < (1/4\delta)\text{Mant}(2\delta\rho)$ rispettivamente nei due casi, si ha, per $h \geqslant h_2(\varepsilon)$.

$$\varphi_h > (\rho - \varepsilon) \log n_h,$$

e quindi per la (δ) :

$$\log |a_m| < -\delta(\rho - \varepsilon) \log n_h,$$

da cui segue

$$|a_m| \leqslant \Psi_h(u) \quad \text{per } m \in J_h, \quad m \neq n_h,$$

salvo al più v_h'' valori di m eccezionali.

Il numero v_h^* dei valori m eccezionali per la $\mathfrak{R}(v_h)$ verifica dunque la relazione

$$v_h^* \leqslant v_h' + v_h'' = v_h - 1;$$

d'altra parte si ha, per l'ipotesi $f(z) \in \mathfrak{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta)$:

$$\begin{aligned} v_h - 1 &= \text{massimo intero} < (2\delta\rho - 1) - 1 \\ &= \text{massimo intero} < 2(\delta\rho - 1) \\ &= \text{massimo intero} < v_h \end{aligned}$$

da cui

$$v_h^* = \text{massimo intero} < v_h.$$

Risultano soddisfatte le condizioni $\mathfrak{R}(v_h)$ e pertanto $\mathfrak{S}(\varphi_h, v_h; \eta, \delta) \subseteq \mathfrak{R}(v_h)$.

Dal criterio (A) segue l'asserto anche in questo caso, ed il teorema risulta completamente dimostrato.

8. Dimostrazione del teorema II.

Basterà mostrare che ad una qualunque classe $\mathcal{S}(\varphi_h, \nu_h; \eta, \delta)$ (vedi Def. al n. 2), con $\{\varphi_h\}$ tale da avere

$$\inf_{m \in I_h} \tau(m)/\varphi_h \rightarrow +\infty.$$

appartengono infinite serie di potenze che verificano le proprietà richieste dal Teorema II (e non sono prolungabili, in base al Teorema I).

Infatti, per una qualunque serie $f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n e^{\gamma_n} z^n \in \mathcal{S}(\varphi_h, \nu_h; \eta, \delta)$ risulta $\overline{\lim} \alpha_n^{1/n} = 1$, e risultano inoltre valide a maggior ragione le proprietà seguenti:

$$(\bar{\beta}) \quad \alpha_{n_h}^{1/\tau(n_h)} \rightarrow 1$$

$$(\bar{\gamma}) \quad \overline{\lim} \alpha_m^{1/\tau(m)} \leq 1 \text{ per } m \in I_h - J_h, (h = 1, 2, 3, \dots), m \rightarrow +\infty$$

$$(\bar{\delta}) \quad \overline{\lim} \alpha_m^{1/\tau(m)} \leq 1 \text{ per } m \in J_h, (h = 1, 2, 3, \dots), m \rightarrow +\infty$$

[infatti da $\alpha_m^{1/\varphi_h} < e^{-\delta}$ segue $\alpha^{(1/\tau(m))\tau(m)/\varphi_h} < e^{-\delta}$, $\alpha^{1/\tau(m)} < e^{-\delta\varphi_h/\tau(m)}$, da cui $(\bar{\delta})$], e per quanto riguarda la validità di $(\bar{\gamma})$ e $(\bar{\delta})$ sono al più eccettuati complessivamente ν_h valori eccezionali di m nel tratto I_h .

In corrispondenza di questi valori m' eccezionali, α_m è libero e si può scegliere in modo da avere $\alpha_{m'}^{1/m'} \rightarrow 1$; d'altra parte esistono successioni $\{\alpha_m\}$ che verificano $(\bar{\beta})$, $(\bar{\gamma})$, $(\bar{\delta})$ e per le quali esiste il limite $\alpha_m^{1/\tau(m)} = 1$.

Poiché la classe $\mathcal{S}(\varphi_h, \nu_h; \eta, \delta)$ è indipendente da γ_n , il teorema risulta dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. E. NOBLE, *A note on non-continuable power series*, « Journ. London Math. Soc. », 35 (1960), 117-127.
- [2] G. RICCI, *Variazioni di segno condizionate e teorema di Fabry*, « Ann. Matem. pura e appl. », (4) 38 (1955), 1-31.