Bollettino
Unione Matematica Italiana

Cataldo Agostinelli

Sul un notevole teorema di equivalenza in magnetoidrodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.1, p. 54–67.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_54_0>

Su un notevole teorema di equivalenza in magnetoidrodinamica.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino). (*)

Sunto. - *Come nel n.* 1.

1. In un mio lavoro [1] in corso di pubblicazione nell' « International Journal of Engineering Science », mi sono occupato della determinazione della velocità e del campo magnetico in un fluido conduttore incomprimibile che si muove in un recipiente fisso qualsiasi semplicemente connesso, con pareti metalliche perfettamente conduttrici, quando siano assegnati in ogni punto del volume racchiuso dal recipiente, e in ogni istante, la corrente di conduzione e il vortice.

La condizione che il campo magnetico e la velocità siano tangenti alla superficie che limita il recipiente, assicura l'unicità della soluzione.

Ho mostrato quindi come la questione si riduce alla risoluzione di problemi di NEUMANN per le funzioni armoniche e il problema idromagnetico si può ricondurre alle quadrature quando il vortice e la corrente di conduzione verificano due condizioni che consistono in due equazioni differenziali vettoriali alle derivate parziali del 1° ordine, che derivano, l'una dalle equazioni maxwelliane del campo e l'altra dall'equazione euleriana del moto.

Ho considerato in particolare il caso in cui le linee di corrente e le linee vorticose siano sempre rette, in generale non parallele, nel quale la corrente di conduzione e il vortice dipendono solo dal tempo e non dal punto.

Ho applicato i risultati ottenuti al caso in cui il volume racchiuso dal recipiente sia un ellissoide a tre assi, ed ho mostrato come in questo caso il problema si risolve completamente con

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. l'1 marzo 1962.

(1) C. AGOSTINELLI, *Sul moto magnetoidrodinamico di un fluido elettricamente conduttore contenuto in un recipiente fisso a pareti conduttrici essendo assegnata la distribuzione della corrente di conduzione e dei vortici.*

quadrature dimostrando il seguente notevole teorema di equivalenza:

Esiste un movimento magnetoidrodinamico di un fluido elettricamente conduttore incomprimibile in un recipiente ellissoidale fisso con pareti perfettamente conduttrici in cui le linee di corrente e le linee vorticose sono rette; questo movimento, che si determina con qnadrature, è equivalente a quello di un solido con un punto fisso, le cui molecole sono attratte da un piano fisso con forze proporzionali alla distanza.

Il caso considerato porta manifestamente un contributo nella spiegazione del fenomeno della generazione e del mantenimento del campo magnetico terrestre (e più in generale stellare) dovuto al movimento vorticoso di un nucleo fluido, elettricamente conduttore, entro una crosta ellissoidale, anch'essa elettricamente conduttrice.

In questa nota, dopo aver richiamato i risultati fondamentali del lavoro citato, mostro ancora come, nell'ultimo caso considerato, si determina in termini finiti la pressione del fluido nell'interno dell'ellissoide, qualunque siano le forze, di natura non elettromagnetica, che agiscano sul fluido, purchè derivanti da un potenziale.

2. Nell'ipotesi che il fluido si comporti come incomprimibile e si possa trascurare la corrente di spostamento, in confronto di quella di conduzione le equazioni idromagnetiche da considerare, col solito significato dei simboli sono

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} v^2 - U\right) \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{6}$$

Supposto inoltre che il fluido si muova in un recipiente fisso, che racchiude un volume semplicemente connesso τ, con pareti metalliche perfettamente conduttrici, le condizioni ai limiti sono

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0 \tag{8}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versare della normale (interna) alla parete Σ del recipiente.

Il problema considerato consiste nel determinare il vettore $\boldsymbol{B}$ del campo magnetico in ogni punto interno e in ogni istante, essendo assegnata la corrente di conduzione $\boldsymbol{I}$ in ogni punto del campo e in ogni istante, in modo che sulla superficie limite Σ sia verificata la (7). Si tratta inoltre di determinare la velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle fluide essendo data la distribuzione del vortice $\frac{1}{2}\omega$, tale cioè che

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \omega,$$

con la condizione che in superficie sia verificata la (8).

I vettori $\boldsymbol{I}$ e ω devono ovviamente verificare le condizioni

$$\operatorname{div} \boldsymbol{I} = 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} \omega = 0. \tag{10'}$$

Si riconosce facilmente, coi soliti procedimenti, che il problema non può ammettere che una sola soluzione.

Va osservato che, prendendo il rotore di ambo i membri della (3), ed eliminando il $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ per mezzo della (2), si ha l'equazione di condizione

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{v}) + \operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{I}}{\sigma} = 0, \tag{11}$$

alla quale devono soddisfare il vettore $\boldsymbol{B}$ del campo magnetico e la velocità $\boldsymbol{v}$ della particella fluida. Inoltre, prendendo il rotare di ambo i membri dell'equazione euleriana (5) del moto, e ponendo $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \omega$, si ha ancora

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{rot}(\omega \wedge \boldsymbol{v}) = \frac{1}{\rho}\operatorname{rot}(\boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B}) \tag{12}$$

che è una seconda equazione di condizione alla quale devono soddisfare i vettori $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{v}$.

3. Ciò premesso, per determinare il campo magnetico $\boldsymbol{B}$, incominciamo a considerare una funzione armonica Φ entro il volume τ, la cui derivata normale assuma sulla superficie Σ i valori di $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{n}$, tale cioè che

$$\Delta_2 \Phi = 0, \text{ in } \tau; \tag{13}$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{n}, \text{ sopra } \Sigma. \tag{13'}$$

Questa funzione Φ si determina come si sa risolvendo un problema di Neumann, e la condizione $\int_\Sigma \frac{d\Phi}{dn} d\Sigma$ risulta senz'altro verificata in virtù del teorema della divergenza e della (10).

Dopo ciò consideriamo un vettore $\boldsymbol{B}_1$ tale che

$$\text{rot}\, \boldsymbol{B}_1 = \text{grad}\, \Phi. \tag{14}$$

Di vettori $\boldsymbol{B}_1$ che soddisfano alla (14) ne esistono ovviamente infiniti e si può sempre determinare in modo che sia

$$\text{div}\, \boldsymbol{B}_1 = 0. \tag{15}$$

Ponendo ora

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I} - \text{rot}\, \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{I} - \text{grad}\, \Phi, \tag{16}$$

con $\boldsymbol{J}$ vettore che si può ritenere noto, si ha

$$\text{div}\, \boldsymbol{J} = 0, \text{ in } \tau; \tag{17}$$

$$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{n} = 0, \text{ sopra } \Sigma. \tag{17'}$$

Ponendo inoltre

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}^* \tag{18}$$

risulta

$$\text{div}\, \boldsymbol{B}^* = \text{div}\, \boldsymbol{B} - \text{div}\, \boldsymbol{B}_1 = 0$$

$$\text{rot}\, \boldsymbol{B}^* = \text{rot}\, \boldsymbol{B} - \text{rot}\, \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{I} - \text{rot}\, \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{J}$$

e per la (7)

$$\boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{n}, \text{ sopra } \Sigma.$$

La questione è in tal modo ridotta a determinare il vettore $\boldsymbol{B}^*$ soddisfacente alle condizioni

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{J}, \text{ in } \tau;$$

$$\text{(19')} \qquad \boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{n} = - \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{n}, \text{ sopra } \Sigma.$$

con $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{n} = 0$, sopra Σ. Poniamo per questo

$$\text{(20)} \qquad \boldsymbol{B}^* = \operatorname{rot} \boldsymbol{S} + \operatorname{grad} F$$

con F funzione incognita ed $\boldsymbol{S}$ vettore da determinare con la condizione

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{S} = 0.$$

Sostituendo nella (19), si ha $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}$, e quindi per la (21)

$$\Delta_2 \boldsymbol{S} = - \boldsymbol{J}.$$

Allora, se r è la distanza del punto P in cui si considera il vettore $\boldsymbol{S}$, da un punto M variabile nel volume τ, per noti risultati della teoria del potenziale si deduce

$$\text{(22)} \qquad \boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\boldsymbol{J}(M)}{r}\, d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{1}{r} (\boldsymbol{I} - \operatorname{rot} \boldsymbol{B}_1) d\tau,$$

e si riconosce facilmente che è verificata la (21).

Per determinare ora la funzione F, prendiamo la divergenza di ambo i membri della (20); si ha così

$$\text{(23} \qquad \Delta_2 F = 0.$$

Inoltre sulla superficie Σ si ha

$$\text{(23')} \qquad \frac{dF}{dn} = \operatorname{grad} F \times \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{B}^* - \operatorname{rot} \boldsymbol{S}) \times \boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{n} + \operatorname{rot} \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{n}).$$

La questione è dunque in definitiva ridotta a determinare la funzione F, armonica nel volume τ, della qnale sono noti i valori della derivata normale sulla superficie limite Σ. Essa si ottiene risolvendo, con uno dei metodi noti, un nuovo problema di

NEUMANN. Dopo ciò, per la (18) e la 20 si ha

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \operatorname{rot} \boldsymbol{S} + \operatorname{grad} F, \tag{24}$$

con $\boldsymbol{S}$ dato dalla (22).

L'espressione trovata del vettore $\boldsymbol{B}$ non dipende che dai valori dati della densità di corrente $\boldsymbol{I}$ e dalla forma del volume τ, essa soddisfa a tutte le condizioni richieste dal problema, e, sebbene vi figura il vettore $\boldsymbol{B}_1$, che contiene degli elementi arbitrari, poichè la soluzione del problema è unica, si può disporre di questa arbitrarietà per rendere più semplici i calcoli.

Così se della (1) conosciamo una soluzione particolare che indichiamo con $\boldsymbol{b}$, tale cioè che

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{I},$$

avremo

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{b}) - 0, \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} + \operatorname{grand} F; \ \Delta_2 F = - \operatorname{div} \boldsymbol{b}$$

e sulla superficie Σ

$$\frac{dF}{dn} = - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}.$$

Allora, ogni qualvolta della (1) si conosce una soluzione particolare $\boldsymbol{b}$, la determinazione del vettore $\boldsymbol{B}$ del campo magnetico, si riduce alla determinazione della funzione F tale che

$$\Delta_2 F = - \operatorname{div} \boldsymbol{b}, \text{ in } \tau; \ \frac{dF}{dn} = - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}, \text{ sopra } \Sigma.$$

4. Con procedimento analogo a quello del n. precedente, se φ è una funzione armonica la cui derivata normale assume sulla superficie Σ i valori di $\omega \times \boldsymbol{n}$, tale cioè che

$$\Delta_2 \varphi = 0, \text{ in } \tau; \ \operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{n} = \omega \times \boldsymbol{n}, \text{ sopra } \Sigma \tag{25}$$

e determiniamo un vettore $\boldsymbol{v}_1$ per cui

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_1 = \operatorname{grad} \varphi; \ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = 0, \tag{26}$$

si ha per la velocità un'espressione della forma

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \operatorname{rot} \boldsymbol{s} + \operatorname{grad} f \tag{27}$$

con

$$\boldsymbol{s} = \frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{w - \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_1}{r} \, d\tau \tag{28}$$

ed f funzione armonica la cui derivata normale assume sulla superficie Σ i valori

$$\frac{df}{dn} = -(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{n} + \operatorname{rot} \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}). \tag{29}$$

Concludendo, una volta determinata l'intensità $\boldsymbol{B}$ del campo magnetico in funzione della corrente di conduzione $\boldsymbol{I}$, e la velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle fluide in funzione del vortice ω, con le condizioni assegnate in superficie, il problema considerato di moto magnetoidrodinamico, risulterà risolto se i vettori $\boldsymbol{I}$ ed ω verificano le condizioni (11) e (12).

5. Nel caso particolare in cui le linee di corrente e le linee vorticose siano sempre rette, in generale non parallele, si dimostra facilmente (v. *lavoro citato in* ([1])), che la corrente di conduzione $\boldsymbol{I}$ e il vortice ω devono essere funzioni soltanto del tempo.

In questo caso la (1) ammette la soluzione particolare

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{I} \wedge (P - O), \tag{30}$$

dove O è un fisso. Ponendo allora

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \operatorname{grand} F = \frac{1}{2} \boldsymbol{I} \wedge (P - O) + \operatorname{grad} F \tag{31}$$

si ricava

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \operatorname{div} \operatorname{grand} F = \Delta_2 F$$

e quindi per la (4) si ha

$$\Delta_2 F = 0. \tag{32}$$

Sul contorno Σ deve essere per la (7)

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{2} \boldsymbol{I} \wedge (P - O) \times \boldsymbol{n} + \operatorname{grand} F \times \boldsymbol{n} = 0$$

e quindi

$$\frac{dF}{dn} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{I} \wedge (P - O) \times \boldsymbol{n}, \text{ sopra } \Sigma. \tag{33}$$

La F è dunque una funzione armonica la cui derivata normale ha sulla superficie limite i valori definiti dalla (33). Determinata la funzione F, la (31) dà senz'altro il vettore $\boldsymbol{B}$ del campo.

In modo analogo si determina la velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle fluide. Essendo $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \omega(t)$, si ha

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \omega \wedge (P - O) + \operatorname{grad} f, \tag{34}$$

con

$$\Delta_2 f = 0, \text{ in } \tau; \tag{35}$$

$$\frac{df}{dn} = -\frac{1}{2} \omega \wedge (P - O) \times \boldsymbol{n}, \text{ sopra } \Sigma. \tag{35'}$$

Nel caso in esame le condizioni (11) e (12) si riducono alle seguenti

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{B}}{dP} \boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{B} = 0 \tag{36}$$

$$\frac{d\omega}{dt} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \omega + \frac{1}{\rho} \frac{d\boldsymbol{B}}{dP} \boldsymbol{I} = 0, \tag{37}$$

e perciò i vettori $\boldsymbol{I}$ ed ω devono essere fissati in funzione del tempo in modo che siano verificate identicamente le condizioni (36) e (37).

6. Applichiamo i risultati del n° precedente al caso in cui il recipiente in cui si muove il fluido conduttore sia di forma elissoidale di semiassi a, b, c, $(a > b > c)$. Con riferimento ai propri assi l'equazione della superficie ellissoidale sarà quindi

$$\varphi(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

e indicando con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ i versori degli assi, la normale in un suo punto sarà parallela al vettore

$$\boldsymbol{N} = \operatorname{grad} \varphi = \frac{2x}{a^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{b^2}\boldsymbol{j} + \frac{2z}{c^2}\boldsymbol{k}.$$

Se si prova a porre la funzione armonica F, definita dalle (32) e (33), uguale a una funzione omogenea di 2° grado in x, y, z, con coefficienti funzioni del tempo, osservando che la (33) si può scrivere

$$\operatorname{grad} F \times \boldsymbol{N} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{I} \wedge (P - O) \times \boldsymbol{N},$$

cioè

$$\frac{2x}{a^2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2y}{b^2}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial F}{\partial z} = -\left[I_1\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)yz + I_2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)zx + I_3\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)xy\right],$$

dove, I_1, I_2, I_3 sono le componenti dal vettore $\boldsymbol{I}$, si trova facilmente

$$F = -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} I_3 \cdot xy + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} I_1 \cdot yz + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} I_2 \quad zx\right). \tag{38}$$

Sostituendo nella (31) si ottengono, dopo facili semplificazioni, le seguenti componenti del vettore $\boldsymbol{B}$

$$\begin{aligned} B_1 &= a^2\left(\frac{I_2}{c^2 + a^2} z - \frac{I_3}{a^2 + b^2} y\right) \\ B_2 &= b^2\left(\frac{I_3}{a^2 + b^2} x - \frac{I_1}{b^2 + c^2} z\right) \\ B_3 &= c^2\left(\frac{I_1}{b^2 + c^2} y - \frac{I_2}{c^2 + a^2} x\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Con calcolo analogo si ricava per la funzione armonica f, definita dalle (35) e (35′) l'espressione

$$f = -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\omega_3 \cdot xy + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\omega_1 \cdot yz + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}\omega_2 \cdot zx\right), \tag{40}$$

dove ω_1, ω_2, ω_3 sono le componenti cartesiane del vettore vortice ω. Le componenti della velocità delle particelle fluide risultano quindi

$$
(41)\qquad
\begin{aligned}
v_1 &= a^2\left(\frac{\omega_2}{c^2+a^2}z - \frac{\omega_3}{a^2+b^2}y\right)\\
v_2 &= b^2\left(\frac{\omega_3}{a^2+b^2}x - \frac{\omega_1}{b^2+c^2}z\right)\\
v_3 &= c^2\left(\frac{\omega_1}{b^2+c^2}y - \frac{\omega_2}{c^2+a^2}x\right).
\end{aligned}
$$

Le equazioni di condizione (36) e (37) danno luogo alle seguenti equazioni scalari

$$
(42)\qquad \frac{\partial B_k}{\partial t} + v_1\frac{\partial B_k}{\partial x} + v_2\frac{\partial B_k}{\partial y} + v_3\frac{\partial B_k}{\partial z} - \left(B_1\frac{\partial v_k}{\partial x} + B_2\frac{\partial v_k}{\partial y} + B_3\frac{\partial v_k}{\partial z}\right) = 0,
$$

$$
(43)\qquad \frac{d\omega_k}{dt} - \left(\omega_1\frac{\partial v_k}{\partial x} + \omega_2\frac{\partial v_k}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial v_k}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho}\left(I_1\frac{\partial B_k}{\partial x} + I_2\frac{\partial B_k}{\partial y} + I_3\frac{\partial B_k}{\partial z}\right) = 0,
$$

Sostituendo nella (42) in luogo delle B_k e v_k i valori (39) e (41), si ottengono delle equazioni lineari omogenee in x, y, z; uguagliando a zero i loro coefficienti si ottengono le equazioni

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
I_1' &= \alpha_1^2(\omega_2 I_3 - \omega_3 I_2)\\
I_2' &= \alpha_2^2(\omega_3 I_1 - \omega_1 I_3)\\
I_3' &= \alpha_3^2(\omega_1 I_2 - \omega_2 I_1)
\end{aligned}
$$

nelle quali gli apici indicano derivazione rispetto al tempo e dove per semplicità si è posto

$$
(45)\qquad \alpha_1^2 = \frac{a^2(b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},\quad \alpha_2^2 = \frac{b^2(c^2+a^2)}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)},\quad \alpha_3^2 = \frac{c^2(a^2+b^2)}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}.
$$

Analogamente le (43) porgono le seguenti equazioni

$$
(46)\qquad
\begin{aligned}
&\omega_1' + \alpha_1^2\frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}\left(\omega_2\omega_3-\frac{1}{\rho}I_2I_3\right)=0\\
&\omega_2' + \alpha_2^2\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\left(\omega_3\omega_1-\frac{1}{\rho}I_3I_1\right)=0\\
&\omega_3' + \alpha_3^2\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\left(\omega_1\omega_2-\frac{1}{\rho}I_1I_2\right)=0.
\end{aligned}
$$

Dunque nel caso considerato le componenti del vettore corrente di conduzione $\boldsymbol{I}$ e del vettore vortice ω che sono funzioni del tempo soltanto, devono verificare il sistema delle sei equazioni differenziali ordinarie (44) e (46). Questo sistema ammette i seguenti quattro integrali primi notevoli (v. loco citato in (1)).

$$
(47)\qquad \frac{I_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{I_2^2}{\alpha_2^2}+\frac{I_3^2}{\alpha_3^2}=I_0^2(\text{cost.})
$$

$$
(48)\qquad \frac{b^2+c^2}{\alpha_1^2}\omega_1^2+\frac{c^2+a^2}{\alpha_2^2}\omega_2^2+\frac{a^2+b^2}{\alpha_3^2}\omega_3^2-\frac{1}{\rho}\left(\frac{a^2}{\alpha_1^2}I_1^2+\frac{b^2}{\alpha_2^2}I_2^2+\frac{c^2}{\alpha_3^2}I_3^2\right)=\text{cost.}
$$

$$
(49)\qquad \frac{b^2+c^2}{\alpha_1^2}I_1\omega_1+\frac{c^2+a^2}{\alpha_2^2}I_2\omega_2+\frac{a^2+b^2}{\alpha_3^2}I_3\omega_3=\text{cost.}
$$

$$
(50)\qquad \frac{(b^2+c^2)^2}{\alpha_1^2}\omega_1^2+\frac{(c^2+a^2)^2}{\alpha_2^2}\omega_2^2+\frac{(a^2+b^2)^2}{\alpha_3^2}\omega_3^2-\frac{1}{\rho}\left(\frac{a^4}{\alpha_1^2}I_1^2+\frac{b^4}{\alpha_2^2}I_2^2+\frac{c^4}{\alpha_3^2}I_3^2\right)=\text{cost.}
$$

i quali sono indipendenti fra loro e si riconosce facilmente che essi sono sufficienti per ridurre l'integrazione del sistema (44), (46), alle quadrature.

Si ha intanto un notevole teorema dal quale risulta che il problema magnetoidrodinamico considerato è equivalente a quello del moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso le cui molecole sono attratte da un piano fisso con forze proporzionali alle distanze da questo piano. Infatti, ponendo ancora

$$
\begin{gathered}
A = b^2 + c^2,\ B = c^2 + a^2,\ C = a^2 + b^2 \\
\omega_1 = -\alpha_1 p,\ \omega_2 = -\alpha_2 q,\ \omega_3 = -\alpha_3 r \\
I_1 = I_0 \alpha_1 \gamma_1,\ I_2 = I_0 \alpha_2 \gamma_2,\ I_3 = I_0 \alpha_3 \gamma_3;\ \tau = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 t,
\end{gathered}
\tag{51}
$$

le equazioni (44) e (46) diventano

$$
\begin{aligned}
\frac{d\gamma_1}{d\tau} &= \gamma_2 r - \gamma_3 q \\
\frac{d\gamma_2}{d\tau} &= \gamma_3 p - \gamma_1 r \\
\frac{d\gamma_3}{d\tau} &= \gamma_1 q - \gamma_2 p,
\end{aligned}
\tag{44'}
$$

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{d\tau} + (C-B)\left(qr - \frac{I_0^2}{\rho}\gamma_2\gamma_3\right) &= 0 \\
B\frac{dq}{d\tau} + (A-C)\left(rp - \frac{I_0^2}{\rho}\gamma_3\gamma_1\right) &= 0 \\
C\frac{dr}{d\tau} + (B-A)\left(pq - \frac{I_0^2}{\rho}\gamma_1\gamma_2\right) &= 0
\end{aligned}
\tag{46'}
$$

che sono proprio le equazioni di EULERO–POISSON relative al moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso 0, le cui molecole sono attratte da un piano fisso proporzionalmente alla distanza (problema di DE BRUN)([2]).

In esse, γ_1, γ_2, γ_3 sono i coseni direttori della normale condotta dal punto fisso 0 al piano attirante, mentre p, q, r sono le componenti della velocità angolare di rotazione secondo gli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso, A, B, C, rappresentano poi i momenti principali d'inerzia relativi al punto 0.

([2]) Cfr. P. APPELL, *Traité de Mécanique Rationelle*, T. II, Chap. XXV, n 499 (Paris, GAUTHIER-VILLARS, 1931).

Gli integrali (47), (48), (49), e (50) si trasformano facilmente nei seguenti

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{47'}$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \frac{I_0^2}{\rho}(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = h\,(\text{cost.}) \tag{48'}$$

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = k\,(\text{cost.}) \tag{49'}$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - \frac{I_0^2}{\rho}(BC\gamma_1^2 + CA\gamma_2^2 + AB\gamma_3^2) = l\,(\text{cost.}), \tag{50'}$$

che sono proprio gli integrali del sistema (44′) e (46′). Il primo di essi è l'integrale dei coseni direttori, il secondo è l'integrale dell'energia, il terzo è l'integrale delle aree; il quarto è quello che consente, come si sa, di ridurre il problema alle quadrature.

Si può concludere pertanto col teorema enunciato nel n. 1.

7. È facile ora vedere come l'equazione del moto (5) si integra con quadrature e si ha quindi la pressione p del fluido. Ricordando che $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \omega$, e tenendo conto dei valori (39) delle componenti del vettore $\boldsymbol{B}$ del campo, e dei valori (41) delle componenti della velocità $\boldsymbol{v}$, si hanno le seguenti equazioni scalari

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}v^2 - U\right) = \left[\frac{c^2}{c^2+a^2}\left(\omega_2^2 - \frac{1}{\rho}I_2^2\right) + \frac{b^2}{b^2+a^2}\left(\omega_3^2 - \frac{1}{\rho}I_3^2\right)\right]x +$$
$$+\left[\frac{a^2}{a^2+b^2}\omega'_3 + \frac{c^2}{b^2+c^2}\left(\frac{I_1I_2}{\rho} - \omega_1\omega_2\right)\right]y - \left[\frac{a^2}{a^2+c^2}\omega'_2 + \frac{b^2}{b^2+c^2}\left(\omega_1\omega_3 - \frac{I_1I_3}{\rho}\right)\right]z,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}v^2 - U\right) = \left[\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\omega_3^2 - \frac{1}{\rho}I_3^2\right) + \frac{c^2}{c^2+b^2}\left(\omega_1^2 - \frac{1}{\rho}I_1^2\right)\right]y +$$
$$+\left[\frac{b^2}{b^2+c^2}\omega'_1 + \frac{a^2}{c^2+a^2}\left(\frac{I_2I_3}{\rho} - \omega_2\omega_3\right)\right]z - \left[\frac{b^2}{c^2+a^2}\omega'_3 + \frac{c^2}{c^2+a^2}\left(\omega_2\omega_1 - \frac{I_2I_1}{\rho}\right)\right]x,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}v^2 - U\right) = \left[\frac{b^2}{b^2+c^2}\left(\omega_1^2 - \frac{1}{\rho}I_1^2\right) + \frac{a^2}{a^2+c^2}\left(\omega_2^2 - \frac{1}{\rho}I_2^2\right)\right]z +$$
$$+\left[\frac{c^2}{c^2+a^2}\omega'_2 + \frac{b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{I_3I_1}{\rho} - \omega_3\omega_1\right)\right]x - \left[\frac{c^2}{c^2+b^2}\omega'_1 + \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\omega_3\omega_2 - \frac{I_3I_2}{\rho}\right)\right]y.$$

Avendo riguardo alle (46) queste equazioni si possono scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}p+\frac{1}{2}v^2-U\right)=\left[\frac{c^2}{c^2+a^2}\left(\omega_2^2-\frac{1}{\rho}I_2^2\right)+\frac{b^2}{b^2+a^2}\left(\omega_3^2-\frac{1}{\rho}I_3^2\right)\right]x+$$

$$+\frac{a^2(b^2+c^2)+b^2(a^2+c^2)}{b^4-a^4}\omega'_3\cdot y+\frac{a^2(b^2+c^2)+c^2(a^2+b^2)}{a^4-c^4}\omega'_2\cdot z,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}p+\frac{1}{2}v^2-U\right)=\left[\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\omega_3^2-\frac{1}{\rho}I_3^2\right)+\frac{c^2}{c^2+b^2}\left(\omega_1^2-\frac{1}{\rho}I_1^2\right)\right]y+$$

$$+\frac{b^2(c^2+a^2)+c^2(b^2+a^2)}{c^4-b^4}\omega'_1\cdot z+\frac{b^2(c^2+a^2)+a^2(b^2+c^2)}{b^4-a^4}\omega'_3\cdot x,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}p+\frac{1}{2}v^2-U\right)=\left[\frac{b^2}{b^2+c^2}\left(\omega_1^2-\frac{1}{\rho}I_1^2\right)+\frac{a^2}{a^2+c^2}\left(\omega_2^2-\frac{1}{\rho}I_2^2\right)\right]z+$$

$$+\frac{c^2(a^2+b^2)+a^2(c^2+b^2)}{a^4-c^4}\omega'_2\cdot x+\frac{c^2(a^2+b^2)+b^2(c+a^2)}{c^4-b^4}\omega'_1\cdot y,$$

le quali risultano integrabili e porgono

$$\frac{1}{\rho}p+\frac{1}{2}v^2-U=\frac{1}{2}\left[\frac{c^2}{c^2+a^2}\left(\omega_2^2-\frac{1}{\rho}I_2^2\right)+\frac{b^2}{b^2+a^2}\left(\omega_3^2-\frac{1}{\rho}I_3^2\right]x^2+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\omega_3^2-\frac{1}{\rho}I_3^2\right)+\frac{c^2}{c^2+b^2}\left(\omega_1^2-\frac{1}{\rho}I_1^2\right)\right]y^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{b^2+c^2}\left(\omega_1^2-\frac{1}{\rho}I_1^2\right)+\frac{a^2}{a^2+c^2}\left(\omega_2^2-\frac{1}{\rho}I_2^2\right)\right]z^2+$$

$$+\frac{a^2(b^2+c^2)+b^2(a^2+c^2)}{b^4-a^4}\omega'_3xy+\frac{b^2(c^2+a^2)+c^2(b^2+a^2)}{c^4-b^4}\omega'_1yz+$$

$$+\frac{c^2(a^2+b^2)+a^2(c^2+b^2)}{a^4-c^4}\omega'_2zx+\frac{1}{\rho}p_0-U_0,$$

dove p_0 ed U_0 sono il valore della pressione e del potenziale delle forze nel centro dell'ellissoide, mentre in esso la velocità è nulla.