Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mariagrazia Iannuzzi

Una nuova dimostrazione della convergenza di un noto metodo iterativo per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo ellittico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.1, p. 15–19.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_15_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Una nuova dimostrazione della convergenza di un noto metodo iterativo per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo ellittico.

Nota di MARIAGRAZIA IANNUZZI (a Genova) (*)

Sunto. - *Vedasi il n. 1.*

1. Sia Γ una curva semplice, chiusa, regolare del piano (x, y) e siano a, c, d, e, g ed r funzioni assegnate di x e y definite e continue nella regione B del piano (x, y) delimitata dalla curva Γ e inoltre a e c siano positive e g non negativa in B.

Consideriamo il problema ai limiti relativo all'equazione differenziale:

$$L(u) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} - gu = r \tag{1}$$

e alla condizione al contorno:

$$u = \bar{u} \qquad \text{su } \Gamma. \tag{2}$$

Applicando il noto metodo delle differenze finite, il problema dato si traduce in un sistema di equazioni lineari, la cui soluzione, unica, fornisce, per punti, una soluzione approssimata del problema, con una precisione tanto fine quanto si vuole [1].

In questo lavoro do una nuova dimostrazione della convergenza del metodo di iterazione per la risoluzione del sistema di equazioni alle differenze, basate sulla teoria delle "contrazioni".

2. *Descrizioni del metodo.* - Introduciamo nel piano (x, y) i punti di coordinate

$$\begin{cases} x_0 = x_0 + i \cdot h \\ y_k = y_0 + k \cdot h \end{cases} \qquad i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

che possono considerarsi come i nodi di un reticolato a maglie

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 13 novembre 1961.

[1] L. COLLATZ: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. cap. V. pag. 320-330.

quadrate di lato h, ottenuto mediante rette parallele agli assi coordinati. Indicheremo brevemente il valore di una funzione nei nodi del reticolo con degli indici in basso: ad es. con f_{ik} indicheremo il valore $f(x_i, y_k)$; inoltre con $u(x, y)$ indicheremo la soluzione del problema (1), (2), con $U(x, y)$ una sua qualunque approssimante.

Due nodi del reticolato si diranno "vicini", se sono due nodi consecutivi del reticolato appartenenti ad una stessa retta del reticolato stesso. I nodi del reticolato interni alla curva Γ li considereremo appartenenti a diversi "livelli" $l_1, l_2, \dots l_n$ a seconda che siano più o meno vicini ai punti di Γ e più precisamente diremo che un nodo interno appartiene ad l_1 se uno almeno dei suoi quattro "vicini" appartiene a Γ o è esterno a Γ, diremo che appartiene ad l_2, se non appartiene ad l_1 ed uno almeno dei suoi quattro "vicini" appartiene al livello l_1 e così via; i punti di intersezione di Γ con il reticolo li penseremo appartenenti al livello l_0. In ogni nodo del reticolo di coordinate (x_i, y_k) appartenente ai livelli $l_2, l_3, \dots l_n$ scriviamo l'equazione alle differenze corrispondente all'equazione differenziale (1):

$$\text{(3)} \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{i,k} \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2} + c_{i,k} \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h^2} + \\ & + d_{i,k} \frac{U_{i+1,k} - U_{i-1,k}}{2h} + e_{i,k} \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k-1}}{2h} - g_{i,k} U_{i,k} = r_{i,k} \end{aligned} \right.$$

Ad ogni nodo A appartenente al livello l_1 associamo invece un punto B di Γ situato su una delle due rette del reticolato passanti per A, e avente distanza δ da A minore di h (ovviamente non é detto che un tale punto sia unico; se ve ne è più di uno scegliamo il più vicino ad A o uno dei più vicini) e supponiamo h abbastanza piccolo in modo che il punto C, che è il "vicino" di A più lontano da B, sia interno a Γ. Per il punto A scriviamo l'equazione:

$$\text{(4)} \qquad U(A) = \frac{\delta U(C) + h\overline{u}(B)}{\delta + h} .$$

La risoluzione del sistema formato dalle equazioni (3), (4) è in generale molto laboriosa, non appena si richieda una buona precisione e quindi un h piccolo; si ricorre perciò a un metodo iterativo. Partendo dai valori arbitrari $U_{i,k}^{[0]}$ si determinano le successive iterate $U_{i,k}^{[1]}$, $U_{i,k}^{[2]}\ldots$ mediante le formule ricorrenti:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} U_{i,k}^{[\nu+1]} = {} & \frac{a_{i,k} + \frac{h}{2} d_{i,k}}{2a_{i,k} + 2c_{i,k} + h^2 g_{i,k}} U_{i+1,k}^{[\nu]} + \\ & + \frac{a_{i,k} - \frac{h}{2} d_{i,k}}{2a_{i,k} + 2c_{i,k} + h^2 g_{i,k}} U_{i-1,k}^{[\nu]} + \frac{c_{i,k} + \frac{h}{2} e_{i,k}}{2a_{i,k} + 2c_{i,k} + h^2 g_{i,k}} U_{i,k+1}^{[\nu]} + \\ & + \frac{c_{i,k} - \frac{h}{2} e_{i,k}}{2a_{i,k} + 2c_{i,k} + h^2 g_{i,k}} U_{i,k-1}^{[\nu]} - \frac{h^2 r_{i,k}}{2a_{i,k} + 2c_{i,k} + h^2 g_{i,k}} \\ U_{(A)}^{[\nu+1]} = {} & \frac{\delta U^{[\nu]}(C) + h\bar{u}(B)}{\delta + h} \end{aligned}\right.$$

3. *Convergenza del metodo di iterazione.* Per dimostrare la convergenza del metodo di iterazione, faremo vedere che la trasformazione $U^{[\nu+1]} = TU^{[\nu]}$ definita dalle (5) è, in un opportuno spazio metrico, una "contrazione".

Possiamo sempre pensare che h sia preso abbastanza piccolo in modo che $a_{i,k} \pm \frac{h}{2} d_{i,k}$, $c_{i,k} \pm \frac{h}{2} e_{i,k}$ siano sempre positive per tutti i punti (x_i, y_k) interni a Γ e ad esempio possiamo prendere h in modo che sia addirittura:

$$a_{i,k} \pm \frac{h}{2} d_{i,k} \geq \frac{a_{i,k}}{2}; \quad c_{i,k} \pm \frac{h}{2} e_{i,k} \geq \frac{c_{i,k}}{2}.$$

Si ha allora che i coefficienti delle quantità $U_{i,k}^{[\nu]}$ che compaiono a secondo membro nelle (5) sono tutti positivi ed inoltre:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{a_{i,k} + \frac{h}{2} d_{i,k} + a_{i,k} - \frac{h}{2} d_{i,k} + c_{i,k} + \frac{h}{2} e_{i,k} + c_{i,k} - \frac{h}{2} e_{i,k}}{2a_{i,k} + 2c_{i,k} + h^2 g_{i,k}} \leq 1 \\ & \frac{\delta}{\delta + h} + \frac{h}{\delta + h} = 1 \end{aligned}\right.$$

Detto α il più piccolo dei tre numeri positivi l, m, n così definiti:

$$l = \min_B \frac{\frac{a_{i,k}}{2}}{2a_{i,k} + 2c_{i,k} + h^2 g_{i,k}}\,; \quad m = \min_B \frac{\frac{c_{i,k}}{2}}{2a_{i,k} + 2c_{i,k} + h^2 g_{i,k}}\,;$$

$$n = \min_B \frac{h}{\delta + h}$$

potremo allora concludere che nelle (5) le $U^{[\nu+1]}_{i,k}$ sono ottenute come somma di almeno α volte $U^{[\nu]}$ calcolata in un nodo appartenente ad un "livello" di indice più piccolo di quello a cui appartiene il punto (x_i, y_k), di non più di $(1-\alpha)$ volte la $U^{[\nu]}$ calcolata in un nodo appartenente ad un "livello" superiore e di un termine indipendente da $U^{[\nu]}$, (con $0 < \alpha < 1$).

Sia n il numero dei "livelli" ottenuti in corrispondenza al reticolato di ampiezza h. Consideriamo allora un insieme I di punti del piano (u, v) costruito nel modo seguente: associamo ai "livelli" $l_{n-1}, \ldots l_0$, i punti dell'asse u di ascissa rispettivamente 1, $2 \ldots n$.

Imponiamo per le ordinate dei punti di I le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} v(n) = 0, \\ v(i) > 0, \ (i = 0, 1, \ldots, n-1). \\ \alpha\, v_{i+1} + (1-\alpha)\, v_{i-1} \leq \lambda v_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \ 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

Per ottenere le v_i in modo semplice consideriamo nel piano (z, w) la retta di equazione:

$$w = (\beta - 1) z + 1 \qquad 0 < \beta \subset 1$$

e le ascisse:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_i = z_{i-1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[z_{i-1} - z_{i-2}\right], \qquad (i \leq n).$$

e prendiamo $\mathfrak{z}$ in modo che:

$$z_i \leq z_n \leq \frac{1}{1-\mathfrak{z}}$$

Si vede facilmente che le ordinate:

$$w_i = (\mathfrak{z}-1) z_i + 1$$

soddisfano le condizioni richieste per le $v(i)$ con $\lambda = \mathfrak{z}$.

L'insieme I si può allora definire mediante le relazioni:

$$\begin{cases} v(i) = w_i & i = 0, 1, \ldots -n1 \\ v(n) = 0 \end{cases}$$

Se prendiamo allora come distanza tra due funzioni $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ la quantità:

$$\| u^{(1)} - u^{(2)} \| = \max_s \frac{\max\limits_{(x_i,\, y_k) \in ls} \left| u^{(1)}_{i,k} - u^{(2)}_{i,k} \right|}{v(s)}$$

si vede facilmente che:

$$\| Tu^{(1)} - Tu^{(2)} \| \leq \lambda \, \| u^{(1)} - u^{(2)} \|$$

che è quanto volevamo dimostrare.