Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Ferrero

Catene principali e derivati nei gruppi di rango due.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 391–397.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_391_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Catene principali e derivati nei gruppi di rango due.

Nota di GIOVANNI FERRERO (a Torino) (*)

Sunto. - *Si dimostra che i gruppi di rango due hanno particolari e ben determinate catene principali, e che certi elementi della loro serie derivata devono essere speciali.*

Introduzione. Chiamiamo gruppi di rango k i gruppi che hanno una catena principale i cui fattoriali sono tutti abeliani (primari, elementari) aventi al più k generatori. I gruppi di rango 1 sono dispersibili (1).

Partendo da un risultato di ZAPPA [4], abbiamo tra l'altro trovato, in [2], che ogni gruppo di rango 2 è estensione (normale) di un suo sottogruppo dispersibile (2) fatta per mezzo di un (2, 3)--gruppo di rango 2 non contenente nessun 2-gruppo normale. Qui proseguiamo lo studio dei gruppi di rango 2. I principali risultati del presente lavoro sono raccolti nei teoremi 1, 2, 3, 4.

1. TEOREMA 1. - *Un gruppo* G, *finito e di rango 2 ammette una catena principale* $G \supset \bar{D} \supset D \supset E$ *in cui* D *è dispersibile,* $\bar{D}/D$ *ha una catena principale i cui fattoriali sono tutti isomorfi al gruppo* (G_{12}) *alterno di sostituzioni su quattro lettere,* e $G/\bar{D}$ *ha una catena principale i cui fattoriali sono tutti isomorfi al gruppo* (G_{24}) *totale di sostituzioni su quattro lettere* (3).

Una tale catena verrà detta catena semidispersa.

Premettiamo alla dimostrazione qualche semplice *osservazione*.

Un teorema di ZAPPA [4] dice che ogni gruppo G di rango 2 è un'estensione di un (2, 3)'-gruppo (cioè di un gruppo il cui ordine è primo in 6) dispersibile fatta per mezzo di un (2, 3)--gruppo H. Se ne deduce che G avrà una catena semidispersa se e solo se H ha una tale catena. Possiamo anzi sempli-

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 27 settembre 1961.

(1) Perchè supersolubili. Per la definizione di gruppo dispersibile cfr. per es. [3].

(2) Nel lavoro citato veniva chiamato L.

(3) Tali gruppi verranno in tutto il seguito indicati semplicemente come G_{12} e G_{24}.

ficare ancora la questione riducendola al caso in cui il nostro gruppo sia un (2, 3)-gruppo di rango 2 il quale non contenga 3-gruppi normali proprii. Infatti ogni (2, 3)-gruppo G^o può essere costruito come estensione del suo 3-sottogruppo normale massimo K, fatta per mezzo del gruppo G^o/H, che è un (2, 3)-gruppo senza 3-sottogruppi normali, mentre ogni estensione di un 3-gruppo fatta mediante un (2, 3)-gruppo che ha una catena semidispersa deve ancora ovviamente una catena semidispersa.

2. Basta dunque dimostrare (e lo faremo per induzione sulla lunghezza delle serie principali di G) che *ogni* (2, 3)-*gruppo* G *di rango* 2 *non contenente* 3-*gruppi normali gode di* P (4).

Intanto se la lunghezza delle serie principali di G vale 1, G è senz'altro un gruppo di ordine 2, ed ha una catena semidispersa.

Supponiamo ora che il teorema valga per tutti i gruppi le lunghezze delle cui serie principali siano strettamente minori della lunghezze delle serie principali di G. Sia T un 2-gruppo normale minimo di G (cioè l'ultimo termine di una sua serie principale): dovrà essere un gruppo abeliano avente al più due generatori e senza sottogruppi caratteristici: dovrà essere ciclico di ordine due, oppure isomorfo al gruppo trirettangolo.

Se G/T *non contiene* 3-*gruppi normali*, per l'ipotesi induttiva, ha una catena semidispersa (ed il sottogruppo normale dispersibile che compare in una qualunque sua catena semidispersa è un 2-gruppo), ed è facile convincersi subito che anche G ha una catena semidispersa.

Se G/T *ha un* 3-*gruppo normale non identico* chiamiamo R/T il suo 3-gruppo normale massimo. In base al lemma dimostrato nel n. 1 di [2] il gruppo G, non contenendo 3-gruppi normali, non ha fattoriali principali di ordine 9. Pertanto, raffinando in una serie principale la catena $G \supset R \supset T \supset E$ si troverà, immediatamente prima di T, un gruppo S, normale in G, tale che S/T abbia ordine tre. *Dico che allora* S *è un* G_{12} *e che inoltre S coincide con* R.

Per mostrare che che S è un G_{12} osserviamo intanto che dalle ipotesi risulta subito che S deve avere ordine 6 oppure 12. Se avesse ordine 6 sarebbe ciclico (perchè allora avrebbe un suo sottogruppo normale di ordine 2), e avrebbe dunque un sottogruppo caratteristico di ordine tre, che sarebbe normale in G, contro una delle ipotesi fatte. Dunque S ha ordine 12, e allora T ha ordine quattro, ed è isomorfo al gruppo trirettangolo. Inoltre

(4) Naturalmente in questo caso l'ultimo termine (E) di ogni catena semidispersa di G si riduce ad un 2-gruppo.

gli elementi di S non possono limitarsi ad indurre in T l'automorfismo identico, perchè allora S sarebbe prodotto diretto di T e di un gruppo di ordine tre, di nuovo caratteristico in S e dunque normale in G. Ne segue che gli automorfismi indotti in T dagli elementi di S formano un gruppo di ordine tre ([5]). Da questo segue facilmente che S è isomorfo ad un G_{12}.

Ora, essendo S normale in G, il centralizzante Z di S in G è normale in G, ed essendo anche R normale in G, tale è anche $C = Z \cap R$ il quale non è che il centralizzante di S in R. Poichè R/C, isomorfo al gruppo degli automorfismi subordinati su S dagli elementi di R, deve contenere un G_{12} normale (i cui elementi sono i corrispondenti degli automorfismi interni di S, che sta in R), il gruppo C deve essere, per ragioni numeriche, un 3-gruppo. Ma G non ha 3-gruppi normali, e allora C si riduce all'identità. Allora R/S sarà isomorfo ad un sottogruppo del gruppo (che ha ordine 2) degli automorfismi esterni di S ed, essendo un 3-gruppo, dovrà essere identico. Così abbiamo anche dimostrato che S ed R coincidono.

Per quanto visto or ora G/S non ha 3-gruppi normali: per l'ipotesi induttiva avrà dunque una catena semidispersa. Si troveranno cioè in G due sottogruppi normali $\bar{D}^0$ e D^0 contenenti S e tali che $D^0 \supset D^0$, e che $G/\bar{D}^0$ abbia una catena principale i cui fattoriali siano tutti isomorfi al G_{24}, e D^0/D^0 una catena principale i cui fattoriali siano tutti isomorfi al G_{12}; inoltre D^0/S sarà un 2-gruppo. Poichè S è caratteristico in D^0, perchè generato dalla totalità dei suoi elementi di ordine tre, anche il suo centralizzante C^0 entro D^0 sarà caratteristico in D^0 e normale in G.
Naturalmente C^0 sarà un 2-gruppo, isomorfo a D^0/S oppure ad un suo sottogruppo di indice due.

Consideriamo ora il gruppo $F = D^0/C^0$. Essendo isomorfo al gruppo degli automorfismi indotti su S dagli elementi di D^0 sarà isomorfo ad un G_{12} oppure ad un G_{24}.

Se F *è un* G_{12} la catena $G \supset \bar{D}^0 \supset C^0 \supset E$ è senz'altro una catena semidispersa di G, e in questo caso il teorema è dimostrato.

Se invece F *è un* G_{24}, per un classico teorema ([6]), G/C^0, contenendo come sottogruppo normale D^0/C^0 che è un gruppo completo (cioè senza automorfismi esterni e senza centro) è prodotto diretto di questo e di un altro suo sottogruppo normale H/C^0, isomorfo a $(G/C^0)/(D^0/C^0)$, cioè a G/D^0.

([5]) Perchè, S/T essendo di ordine tre, e T abeliano, gli elementi dei laterali di S rispetto a T devono indurre su T automorfismi identici o di ordine tre

([6]) Cfr. per es. [1] § 70.

Inoltre G/H risulta isomorfo a D^0/C^0 e dunque deve essere un G_{24}.

Dico ora che $G \supset H \cap D^0 \supset H \cap D^0 \supset E$ *è una catena semidispersa di* G.

Raffiniamo in una serie principale Σ la catena $G \supset D^0 \supset D^0 \supset \supset C^0 \supset E$ e consideriamo la catena ottenuta intersecando con H ciascuno dei termini della Σ. Si otterà così un raffinamento Σ' della catena principale $H \supset H \cap \bar{D}^0 \supset (H \cap D^0) = C^0 \supset E$. Essendo H/C^0 isomorfo a G/D^0 i fattoriali di Σ compresi nel tratto da G a D^0 e quelli di Σ' compresi nel tratto da H a C^0 saranno nello stesso numero e anzi saranno ordinatamente isomorfi. Da questo e dal fatto che D^0 è un 2-gruppo discende senz'altro che la catena raffinata da Σ' è semidispersa. Dal fatto poi che tutti i termini di Σ' sono normali in G e che G/H è un G_{24} si deduce quanto era stato enunciato poco sopra. Dopo l'analisi precedente questo è sufficiente a dimostrare il nostro teorema.

3. – Osservazione: $G/\bar{D}$ *è prodotto diretto di* G_{24}. Questo discende semplicemente dal fatto che i G_{24} sono gruppi completi, e dal teorema sui gruppi completi che è già stato utilizzato nel corso della precedente dimostrazione.
Inoltre si ha che D/D *è prodotto diretto* di G_{12}. Questo discende dal più generale.

Lemma. – *Un gruppo* G *che abbia una catena principale tutti i cui fattoriali siano isomorfi ad un* G_{12} *è prodotto diretto di un certo numero di* G_{12}.

Svolgiamo la dimostrazione per induzione sulla lunghezza della catena indicata dall'enunciato. Sia $G \supset G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_n \supset G_{n+1} = E$ una tale catena e sia C il centralizzante di G_n. L'indice di C in G può essere soltanto 12 o 24, perchè 12 è l'ordine del gruppo degli automorfismi interni di G_n, e 24 è l'ordine del suo automorfo. Se però C avesse indice 24 in G il gruppo $K = G_n \cup C$ $(= CG_n)$, che è prodotto diretto di C e di G_n, avrebbe indice due in C. Allora, detto G_i il massimo dei gruppi di Σ contenuto in K, $(K \cap G_{i-1})/G_i$ dovrebbe avere indice due in G_{i-1}/G_i, perchè intersecando i termini della catena $G \supset K \supset G_i$ con G_{i-1} si ha la catena $G_{i-1} \supset (G_{i-1} \cap K) \supset G_i$; allora se G_{i-1} non sta in K, l'indice di $K \cap G_{i-1}$ in G_{i-1} non può essere che 2. Ora, poichè G_{i-1}/G_i è per ipotesi un G_{12}, e dunque non ha sottogruppi di indice due, questo non è possibile. Pertanto C ha indice 12 in G, e G è prodotto diretto di G_n e di C (cioè $K = G$). Poichè C è allora isomorfo a G/G_n, esso ha una catena principale Σ' tutti i cui fattoriali sono isomorfi ad un

G_{12}, e per l'ipotesi induttiva è prodotto diretto di G_{12}. Il lemma è così dimostrato.

Utilizzando quanto detto possiamo ancora porre il teorema precedente nella seguente forma:

TEOREMA 2. - *Un gruppo* G *finito di rango due ha una catena normale principale, anzi, caratteristica* $G \supset \bar{G} \supset D \supset E$ *in cui* D *è dispersibile.* $\bar{G}/D$ *è prodotto diretto di* G_{12} *(tedraedrici) e* $G/\bar{G}$ *è un 2-gruppo* (7).

Conservando le notazioni del teorema 1 si avrà infatti che $G/\bar{D}$, essendo prodotto diretto di G_{24} contiene come sottogruppo normale il prodotto diretto $\bar{G}/\bar{D}$ dei G_{12} contenuti nei suoi fattori, di modo che $G/\bar{G}$ sarà un 2-gruppo. Allora $G/\bar{D}$ avrà una catena principale i cui fattori saranno tutti G_{12}, e così, per il lemma sopra dimostrato sarà prodotto diretto di G_{12}. Questo basta per dimostrare il teorema enunciato.

4. A titolo di esercizio, e generalizzando un noto ragionamento (Cfr. [3] pag. 159) possiamo ricavare un'altra informazione sulle precedenti catene.

Si ha cioè che *il secondo derivato di* G/D *è speciale.* Più in generale mostriamo anzi che *il secondo derivato di un* (2, 3)*-gruppo* G *di rango 2 che non abbia fattoriali principali* (abeliani elementari) *di ordine* 9, *è un gruppo speciale* (8).

Per la dimostrazione cominciamo ad osservare che il derivato dell'automorfo A del gruppo trirettangolo è abeliano. Infatti A è isomorfo al gruppo totale di sostituzioni su tre lettere, ed il suo derivato deve stare entro il gruppo alterno di sostituzioni su tre lettere, che è ciclico di ordine tre.

Sia ora $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_r = E$ una serie principale di G: i suoi fattoriali dovranno essere ciclici o isomorfi al gruppo trirettangolo. Sia H_i l'intersezione del derivato secondo G'' di G con G_i. Allora $G'' = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_r = E$ è una catena principale Σ di G. Chiamiamo K_i i successivi termini distinti di Σ: formano ancora una catena principale, i cui fattoriali sono ancora ciclici o trirettangoli. *Dico che i* K_i *formano una serie centrale per* G''.

Infatti ogni K_i, intersezione di sottogruppi normali in G, è normale in G. Ogni elemento di G subordina pertanto un automorfismo su K_{i-1}/K_i. Ma ogni elemento di G'' induce su K_{i-1}/K_i un automorfismo

(7) Di qui si potrebbe ricavare in modo molto semplice il teorema del n. 2 del nostro lavoro [2].

(8) Per esempio è sufficiente, per la validità dell'enunciato, che G non contenga 3-gruppi normali.

appartenente al secondo derivato del gruppo degli automorfismi di K_{i-1}/K_i, e cioè l'identità. Allora K_{i-1}/K_i sta nel centro di G''/K_i, ed i K_i vengono a formare una serie centrale di G'', che è dunque speciale. Questo è quello che volevamo dimostrare.

Il ragionamento precedente può essere generalizzato in modo ovvio: si vede che basta sapere che tutti i k-esimi derivati dei gruppi degli automorfismi che possono essere indotti dagli elementi di un gruppo G sui fattoriali di una sua data catena o serie principale devono essere abeliani per concludere che il $(k+1)$-esimo derivato di G è speciale.

5. Possiamo così dare il

TEOREMA 3. – *Il quinto derivato di un gruppo G di rango due è speciale.*

Cominciamo con una osservazione atta a semplificare la questione.

Se $G \supset G_1 \supset G_2 \supset E$ è una catena principale di G, il gruppo G/G_2 (anzi, se G_1/G_2 è abeliano, lo stesso G/G_1) è omomorfo sul gruppo degli automorfismi A indotti su G_1/G_2 dagli elementi di G. Se G è di rango due pertanto anche A dovrà essere di rango due. D'altra parte, sappiamo che l'automorfo di un gruppo ciclico è abeliano, e dunque, per l'osservazione che conclude il numero precedente, ci basterà dimostrare che *il quarto derivato di un qualunque sottogruppo di rango due dell'automorfo di un gruppo abeliano elementare di ordine* p^2 *è, qualunque sia* p, *un gruppo abeliano.*

Noi sappiamo che l'automorfo di un gruppo abeliano elementare di ordine p^2 è isomorfo al gruppo delle matrici quadrate invertibili di rango due, i cui elementi siano presi in $\mathbf{Z}/(p)$, cioè siano numeri interi modulo p (9). Dobbiamo dunque studiare la catena derivata dei sottogruppi di rango due dei gruppi lineari omogenei di ordine $(p+1)p(p-1)^2$. Sia A uno di questi sottogruppi; poichè tutti i commutatori di un gruppo di matrici (quadrate) hanno determinante unitario, il derivato A' di A starà nel gruppo Γ delle matrici unimodulari di rango due su $\mathbf{Z}(p)$. Il gruppo $\bar{A}'$ generato da A' e dal centro D di Γ è ancora di rango 2. Infatti ([1], § 310) se p è un numero primo diverso da 2, D è di ordine 2, mentre se $p=2$, D si riduce alla sola identità, mentre $\bar{A}'$ può essere visto come estensione normale di D fatta per mezzo di A', quando pure non coincida addirittura con A'. Allora $\bar{A}'/D$ starà in Γ/D, che è un

(9) Per questo cfr. per es. [1] § 89.

gruppo ben noto, che verrà indicato con H. I sottogruppi di H possono essere soltanto ciclici, diedrici o poliedrici ([10]). Questo risulta dal § 311 di [1] se $p=2$ oppure $p=3$, e altrimenti dal paragrafo 326, e da quelli che lo precedono. Di questi sono risolubili (e di rango due) quelli ciclici, quelli diedrici e quelli isomorfi ad un G_{12} o ad un G_{24}. Di uno di questi tipi deve essere A'/D. Corrispondentemente il suo derivato $(\bar{A}'/D)'$ deve essere, se non identico, ciclico, trirettangolo od isomorfo ad un G_{12}. Il successivo derivato $(\bar{A}'/D)''$ è, se non identico, trirettangolo. Infine $(A'/D)'''$ è sempre identico. Ora le immagini inverse complete di A'/D e dei suoi successivi derivati nell'omorfismo naturale di A su A/D contengono rispettivamente i gruppi $A' \cup D$, $A'' \cup D$, $A''' \cup D$, $A'''' \cup D$. ([11]) Ne segue che $A'''' \cup D$ coincide con D e che dunque A'', se anche non è identico, deve essere almeno abeliano. Questo è sufficiente per dimostrare il nostro teorema.

La stessa dimostrazione porge qualcosa di più quando si aggiunga qualche ipotesi su G in modo che sia possibile escludere che A'/D sia un G_{24}, contenga un G_{12} eccetera. Si ha per esempio subito il

TEOREMA 4. – *Il secondo derivato di un* (2, 3)'*-gruppo di rango* 2 *è speciale.*

Osserviamo tuttavia che per migliorare il risultato dato dal teorema 3 è indispensabile aggiungere qualche ipotesi, perchè l'automorfo di un gruppo abeliano elementare di ordine 9 è di rango due, e il suo quarto derivato non è identico, benchè abeliano.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. BURNISIDE, *Theory of groups of finite order,* « Dover », 1955, New York.

[2] G. FERRERO, *Un'osservazione su certi gruppi risolubili,* « Boll. U.M.I.» 16 (3), (1961), pagg, 269-272.

[3] M. HALL, *The theory of groups,* « The Macmillan Company », 1959, New York.

[4] G. ZAPPA: *Sui sottogruppi finiti dei gruppi di Hirsch,* « Giorn. di Mat. di Battaglini », vol. 78 (2) (1948) pagg. 58-70.

([10]) Sono cioè tutti isomorfi a particolari gruppi finiti di omografie sulla retta complessa.

([11]) Basti pensare che in un qualunque omorfismo l'immagine di un commutatore è un commutatore, e che $A' \cup D' \supset A'' \cup D$.