ENRICO BOMBIERI

Su un teorema di A. C. Woods sul prodotto di n forme lineari reali non omogenee.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.3, p. 288–294.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_288_0>

Su un teorema di A. C. Woods sul prodotto di n forme lineari reali non omogenee.

Nota di ENRICO BOMBIERI (a Milano) (*) (1)

Sunto. - *Usando un teorema di A. C. Woods si danno alcuni nuovi risultati sul prodotto di* n *forme lineari reali non omogenee.*

Summary. - *Using a theorem of A. C. Woods one gives some informations on the product of* n *inhomogeneous real forms.*

1. *Il problema e i risultati noti.*

Siano $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n forme reali omogenee in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\det \xi = \Delta \neq 0$, e $\rho_1, \ldots, \rho_n$ n numeri reali assegnati.

Una nota congettura di MINKOWSKI afferma:

esiste almeno un punto $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a coordinate intere, tale che

$$\prod_{i=1}^{n} |\xi_i - \rho_i| \leq |\Delta| / 2^n. \tag{1}$$

Questa congettura è stata dimostrata per $n = 2$ dallo stesso MINKOWSKI [7] e da altri autori; per $n = 3$ da REMAK [10], H. DAVENPORT [2], BIRCH e SWINNERTON-DYER [1]; per $n = 4$ da DYSON [4].

Poniamo:

$$\mu_n = \operatorname*{Inf.}_{\xi, \rho} \ \operatorname*{Sup.}_{\boldsymbol{x}} \ |\Delta| / \Pi |\xi_i - \rho_i| \tag{2}$$

($\boldsymbol{x} \in \Lambda_0$ reticolo dei numeri interi; $\rho \equiv (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$)

$$\mu_n(\xi) = \operatorname*{Inf.}_{\rho} \ \operatorname*{Sup.}_{\boldsymbol{x}} \ |\Delta| / \Pi |\xi_i - \rho_i| . \tag{3}$$

La congettura di MINKOWSKI afferma:

$$\mu_n \geq 2^n \tag{4}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 5 agosto 1961.

(1) Studio eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n° 14 (1960-61) del C. N. R.

N. TSCHEBOTAREV [12] per primo è riuscito ad avvicinarsi alla congettura in questione, dimostrando:

(5) $$\mu_n \geq 2^{n/2}.$$

Ulteriori miglioramenti sono dovuti a L. J. MORDELL [8] e H. DAVENPORT [3]; in particolare è

(6) $\mu_n \geq (2e-1-\eta)2^{n/2}$ per ogni $\eta > 0$ e $n \geq n_0(\eta)$ (H. DAVENPORT [3]).

A. C. WOODS [13] e, in seguito, L. J. MORDELL [9], hanno migliorato la (5) con un loro metodo semplice ed elegante, senza però raggiungere la disuguaglianza (6).

Vogliamo in questa nota occuparci del problema di ottenere disuguaglianze per $\mu_n(\xi)$, in cui il secondo membro dipende anche dal sistema di forme ξ.

Dal nostro risultato otteniamo come corollario che la congettura di MINKOWSKI è vera per una vasta classe di sistemi di forme ξ.

Il risultato di questo corollario è stato però già dimostrato da S. S. KOWNER [6] e da Th. SCHNEIDER [11] con un metodo più semplice.

Th. SCHNEIDER [11] ha ottenuto anche una sua ulteriore generalizzazione.

Osserviamo infine che B. J. BIRCH e H. P. F. SWINNERTON-DYER [1] hanno dimostrato che, quando si assuma la validità della congettura di MINKOWSKI per 1, 2, ..., $n-1$ dim., la congettura in questione è valida anche in n dim. per una certa classe di sistemi di forme ξ; questa classe è notevolmente più vasta della nostra. Tuttavia il metodo da noi usato per giungere al nostro teorema è indipendente da quello seguito da BIRCH e SWINNERTON-DYER.

2. *Il risultato.*

Def. 1:

Sia M un reticolo a n dim. e $d(M)$ il suo determinante.

La regione $\mathfrak{S} \equiv |x_i| < \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, non contenga punti di M oltre l'origine e sia $V(\mathfrak{S})$ il suo volume.

Poniamo allora

$$\gamma = \gamma(M) = \underset{\mathfrak{S}}{\text{Sup.}}\ (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)/d(M)$$

Osservazioni.

Se $V(\mathfrak{S}) > 2^n d(M)$, allora $\mathfrak{S}$ contiene almeno un punto di M oltre l'origine a causa del classico teorema di MINKOWSKI.

Dunque, per la definizione di S, $V(S) \leq 2^n d(M)$.

Ma ora $V(S) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n 2^n$, da cui

$$0 \leq \gamma(M) \leq 1.$$

Il reticolo M sia definito dalle forme lineari $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono n numeri reali, e M' è il reticolo formato dalle nuove forme $a_1 m_1, a_2 m_2, \dots, a_n m_n$ allora $\gamma(M') = \gamma(M)$. Questa osservazione ci sarà utile nel seguito.

La dimostrazione è immediata se si osserva che $d(M') = a_1 \dots a_n d(M)$ e che, posto $S' \equiv |x_i| < \lambda'_i = a_i \lambda_i$ risulta S' libero da punti di M' distinti dall'origine e inoltre

$$V(S') = a_1 \dots a_n V(S).$$

Il problema di determinare $k_n = \operatorname*{Inf.}_{\Lambda} \gamma(\Lambda)$ è stato considerato da MORDELL (vedi ad es. J. London Math. Soc. 12, (1937) p. 34) in relazione alla congettura di MINKOWSKI; bisogna però osservare che i suoi risultati furono superati con altri metodi dalla (5) dovuta a TSCHEBOTAREV.

Introdotta questa definizione e con essa il concetto del $\gamma(M)$ associato a un reticolo, poniamo per definizione:

$\gamma(m) = \gamma(M)$, dove $m_1, \dots, m_n$ sono le forme lineari che definiscono il reticolo M.

Avremo allora il seguente

TEOREMA A:

Siano $\xi_1, \dots, \xi_n$ n forme lineari reali in $x_1, \dots, x_n$ con $\det \xi = \Delta \neq 0$ e $\gamma(\xi) > 1/2$, e siano $\rho_1, \dots, \rho_n$ n numeri reali assegnati.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a coordinate intere tale che:

$$\prod_{i=1}^{n} |\xi_i - \rho_i| \leq |\Delta| / \mu^n + \varepsilon,$$

dove

$$\mu = 2/(2\gamma^{1/n} - (2\gamma - 1)^{1/n}), \qquad \gamma = \gamma(\xi) \qquad (\gamma > 1/2).$$

COROLLARIO:

La congettura di MINKOWSKI è vera per ogni sistema di forme ξ per cui $\gamma(\xi) = 1$. (S. S. KOWNER [6], Th. SCHNEIDER [11]).

OSSERVAZIONE. Esistono sistemi di forme $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ per i quali $\gamma > 1/2$; p. es. i reticoli critici della regione $S \equiv |x_i| < \lambda_i$, $(1 \leq i \leq n)$

hanno $\gamma = 1$; tali reticoli sono in corrispondenza biunivoca con i sistemi triangolari di forme (definiti a meno di una trasformazione unimodulare e l'eventuale permutazione degli indici). Questa classe di sistemi di forme rientra nella classe considerata da BIRCH e SWINNERTON-DYER.

3. *Dimostrazione del teorema A.*

La dimostrazione del teorema A si basa sul seguente lemma:

LEMMA 1: (WOODS [13], MORDELL [9])

Sia $\mathcal{C}$ una regione a n dim. che per nessuna traslazione contenga due punti di un reticolo Λ.

Allora

$$d(\Lambda) \geq 2V(\mathcal{C}) - V_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{z}),$$

dove:

$$V(\mathcal{C}) = \text{vol. } \mathcal{C},$$

e

$$V_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{u} \in \Lambda} V[\mathcal{C}(\boldsymbol{u}) \cap \mathcal{C}(\boldsymbol{z})],$$

avendo indicato con $\mathcal{C}(\boldsymbol{z})$ la regione $\mathcal{C}$ traslata secondo il vettore $\boldsymbol{z}$.

Il seguente lemma è immediato:

LEMMA 2: (WOODS [13])

Sia $\mathcal{S}$ la regione $|x_i| < \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$.

Allora

$$V[\mathcal{S}(\boldsymbol{o}) \cap \mathcal{S}(\boldsymbol{z})] = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} (2\lambda_i - |z_i|) & \text{se} \quad \boldsymbol{z}/2 \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{se} \quad \boldsymbol{z}/2 \notin \mathcal{S}. \end{cases}$$

Infatti la regione $\mathcal{S}(\boldsymbol{o}) \cap \mathcal{S}(\boldsymbol{z})$ è un parallelepipedo rettangolo.

Veniamo alla dimostrazione del teorema.

Si può supporre $\Delta = 1$.

Poniamo $d = \operatorname{Inf.}_{\boldsymbol{x}} \prod |\xi_i - \rho_i|$ per $\boldsymbol{x}$ a coordinate intere.

Esisterà allora, per ogni $\varepsilon_1 > 0$, un punto $\boldsymbol{x}^*$ a coordinate intere tale che

$$\prod |\xi_i^* - \rho_i| = d/(1 - \vartheta_1) \qquad 0 \leq \vartheta_1 < \varepsilon_1,$$

ϑ_1 adatto.

Poniamo (vedi G. H. HARDY e E. M. WRIGHT [5], pp. 403-405)

$$\xi_i' = \xi_i/(\xi_i^* - \rho_i). \tag{7}$$

Avremo

$$\det \xi' = (\det \xi)/\Pi \mid \xi_i^* - \rho_i \mid = (1 - \vartheta_1)/d.$$

Le forme ξ' determineranno un reticolo Λ, con

$$d(\Lambda) = (1 - \vartheta_1)/d. \tag{8}$$

Avremo poi:

$$\prod_{i=1}^{n} \mid \xi_i' + 1 \mid = \Pi \frac{\mid \xi_i + \xi_i^* - \rho_i \mid}{\mid \xi_i^* - \rho_i \mid} =$$

$$= (1 - \vartheta_1)/d \cdot \Pi \mid \xi_i + \xi_i^* - \rho_i \mid \geq (1 - \vartheta_1)/d \cdot d = (1 - \vartheta_1).$$

Poichè ora se $\boldsymbol{v} \in \Lambda$ è anche $-\boldsymbol{v} \in \Lambda$, otterremo

$$\Pi \mid v_i - 1 \mid \geq 1 - \vartheta_1 \quad \text{per ogni} \quad \boldsymbol{v} \in \Lambda. \tag{9}$$

Questa relazione (9) è dovuta a TSCHEBOTAREV.

Procediamo ora al completamento della nostra dimostrazione.

Per la def. 1 esisterà una regione $\mathfrak{S} \equiv \mid x_i \mid < \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$, che non conterrà punti di Λ oltre l'origine, e tale che per ogni $\varepsilon_2 > 0$ esiste un ϑ_2, $0 \leq \vartheta_2 < \varepsilon_2$ per cui

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = (1 - \vartheta_2)\gamma(\Lambda)d(\Lambda). \tag{10}$$

Supponiamo $\gamma(\Lambda) > 1/2$.

Sia $\mathfrak{S}_1$ la regione $\mid x_i \mid < \lambda_i/2$, $1 \leq i \leq n$.

Per un classico teorema di BLICHFELDT, a causa della simmetria e convessità di $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$ per nessuna traslazione conterrà due punti di Λ. Siamo perciò in grado di applicare i lemmi 1 e 2 a questa regione $\mathfrak{S}_1$. Avremo, per un punto $\boldsymbol{z}$ arbitrario:

$$d(\Lambda) \geq 2V(\mathfrak{S}_1) - V_{\mathfrak{S}_1}(\boldsymbol{z}) = 2(1 - \vartheta_2)\gamma(\Lambda)d(\Lambda) - \tag{11}$$

$$- \sum_{\boldsymbol{u} \in \Lambda} V[\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{u}) \cap \mathfrak{S}_1(\boldsymbol{z})].$$

Osserviamo ora, seguendo WOODS [13], che per ogni $\boldsymbol{z}$ vi sono al più 2^n punti $\boldsymbol{u} \in \Lambda$ tali che:

$$V[\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{u}) \cap \mathfrak{S}_1(\boldsymbol{z})] > 0.$$

Se infatti due regioni $\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{u})$ e $\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{u}')$ contenessero un medesimo vertice di $\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{z})$, si avrebbe un assurdo per il teorema di BLICHFELDT.

Tutte le volte che è $V(\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{u}) \cap \mathfrak{S}_1(\boldsymbol{z})] > 0$, la regione $\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{u})$ contiene almeno un vertice di $\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{z})$, e poichè $\mathfrak{S}_1$ ha esattamente 2^n vertici ne segue la proprietà segnalata da WOODS.

Possiamo osservare che $V_{\mathfrak{S}_1}(\mathbf{1}) > 0$; infatti se fosse $V_{\mathfrak{S}_1}(\mathbf{1}) = 0$ si avrebbe un assurdo a causa della (11) e dell'ipotesi $\gamma(\Lambda) > 1/2$.

Ma allora, ricordando il lemma 2 e ponendo $\boldsymbol{z} = \mathbf{1}$:

$$V_{\mathfrak{S}_1}(\mathbf{1}) \leq 2^n \max_{\boldsymbol{u} \in \Lambda}.\ V[\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{u}) \cap \mathfrak{S}_1(\mathbf{1})] = 2^n \max_{\boldsymbol{u} \in \Lambda}.\ V[\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{o}) \cap \mathfrak{S}_1(\boldsymbol{u} - \mathbf{1})] =$$

$$= 2^n \max_{\boldsymbol{u} \in \Lambda}.\ \Pi\ (\lambda_i - |\ u_i - 1\ |\ ).$$

Infine, applicando successivamente la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica due volte e tenendo conto della (9) e della (10), otteniamo:

$$\Pi\ (\lambda_i - |\ u_i - 1\ |\ ) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n\ \Pi\ (1 - |\ u_i - 1\ |\ /\lambda_i) \leq$$

$$\leq \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n (1 - \frac{1}{n}\ \Sigma_i\ |\ u_i - 1\ |\ /\lambda_i)^n \leq$$

$$\leq \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n (1 - (\ \Pi\ |\ u_i - 1\ |\ /\ \lambda_i)^{1/n})^n \leq$$

$$\leq \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \left(1 - \left(\frac{1 - \vartheta_1}{\lambda_1 \dots \lambda_n}\right)^{1/n}\right)^n =$$

$$= ((\lambda_1 \dots \lambda_n)^{1/n} - (1 - \vartheta_1)^{1/n})^n =$$

$$= \{ [(1 - \vartheta_2)\gamma(\Lambda) d(\Lambda)]^{1/n} - (1 - \vartheta_1)^{1/n} \}^n.$$

In forza della (11) otteniamo:

$$d(\Lambda) \geq 2(1 - \vartheta_2)\gamma(\Lambda) d(\Lambda) - 2^n \{ [(1 - \vartheta_2)\gamma(\Lambda) d(\Lambda)]^{1/n} - (1 - \vartheta_1)^{1/n} \}^n.$$

Poichè questa disuguaglianza non dipende dai λ_i, si ha per $\vartheta_2 \to 0$:

$$2^n \{ [\gamma(\Lambda) d(\Lambda)]^{1/n} - (1 - \vartheta_1)^{1/n} \}^n \geq [2\gamma(\Lambda) - 1] d(\Lambda)$$

$$d^{1/n}(\Lambda) \geq 2(1 - \vartheta_1)^{1/n} / [2\gamma^{1/n} - (2\gamma - 1)^{1/n}], \qquad (\gamma = \gamma(\Lambda))$$

e ricordando la (8)

$$(1/d)^{1/n} \geq 2/[2\gamma^{1/n} - (2\gamma - 1)^{1/n}].$$

Ricordiamo ora l'osservazione alla def. 1 e la (7).

Avremo $\gamma(\Lambda) = \gamma(\xi') = \gamma(\xi)$, e quindi la dimostrazione del nostro teorema è completata.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. J. BIRCH and H. P. F. SWINNERTON-DYER: *On the inhomogeneous minimum of the product of* n *linear forms.* « Mathematika », 3 (1956), pp. 25-39.

[2] H. DAVENPORT: *A simple proof of Remak's Theorem on the product of 3 linear forms.* « J. London Math. Soc. », 14 (1939), pp. 47-51.

[3] H. DAVENPORT: *On a Theorem of Tschebotareff.* « J. London Math. Soc. », 21. (1946) pp. 28-34 e *Corrigendum* 24, (1949) p. 316.

[4] F. J. DYSON: *On the product of four non-homogeneous forms.* « Annals of Math. », (2) 49 (1948), pp. 82-109.

[5] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An introduction to the Theory of Numbers*, III ed., Oxford 1954.

[6] S. S. KOWNER: *Über einen Satz von Tschebyscheff-Minkowski.* « Recueil Math. Soc. Math. Moscou », 32 (1925), pp. 528-541.

[7] H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig 1910.

[8] L. J. MORDELL: *Tschebotareff's Theorem on the product of non-homogeneous linear forms.* « Vjschr. naturforsch. Ges. Zurich », 85, Beiblatt (Festschrift Rudolf Fueter), pp. 47-50.

[9] L. J. MORDELL: *Tschebotareff's Theorem on the product of non-homogeneous linear forms II,* « J. London Math. Soc. », 35 (1960), pp. 91-97.

[10] R. REMAK: *Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes,* « Math. Zeit. », 17 (1923), pp. 1-34 e 18 (1924), pp. 173-200.

[11] TH. SCHNEIDER: *Eine Bemerkung zur Minkowskischen Vermutung über inhomogene Linearformen,* « Archiv der Mathematik, » 2 (1949-50), pp. 87-79.

[12] N. TSCHEBOTAREV: *Beweis des Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen* (in lingua russa), « Ucen. Zapiski Kazansk. Gos. Univ. », 94 (1934), pp. 3-16.

[13] A. C. WOODS: *On a Theorem of Tschebotareff,* « Duke Math. Jour. », 25 (1958), pp. 631-638.