Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Caprioli

Sul campo elettromagnetico nelle guide rettangolari con pareti assorbenti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.3, p. 273–280.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_273_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Sul campo elettromagnetico nelle guide rettangolari con pareti assorbenti.

Nota di LUIGI CAPRIOLI (a Bologna) (*)

Sunto. - *Il secondo capoverso del n. 1.*

1. In una nota precedente (1) ho dimostrato che, ammessa l'ipotesi di SCHELKUNOFF circa i componenti tangenziali dei vettori elettromagnetici sulla superficie interna delle pareti (non perfettamente conduttrici) di una guida circolare, la determinazione del campo è subordinata alla risoluzione di equazioni trascendenti nel campo complesso. Rilevato poi che, anche in presenza di assorbimento, sono possibili nella guida circolare modi simmetrici del tipo *TM* o *TE* (ma non, in generale, modi dissimmetrici), ho inoltre determinato, per via diretta, espressioni della costante di attenuazione, valide anche per frequenze prossime o uguali a quelle critiche e particolarmente atte alle applicazioni numeriche (2).

Con l'intendimento di estendere, se possibile, tali risultati alle guide rettangolari imperfette, mi sono proposto di vedere se, ammessa ancora la relazione di SCHELKUNOFF tra i componenti tangenziali dei vettori del campo sulla superficie interna delle pareti d'una guida rettangolare, possano sussistere in quest'ultima modi trasversali dei tipi *TE, TM* simili a quelli delle guide perfette: il risultato è stato negativo, com'era, del resto, prevedibile (3).

(*) Pervenuta alla segreteria dell' U. M. I. il 4 luglio 1961.

(1) *Sulla attenuazione nelle guide circolari con pareti assorbenti,* « Bollettino U. M. I. » (3), Vol. 12, 1957.

(2) *L'attenuazione nelle guide circolari con pareti assorbenti,* « Alta Frequenza », XXVII, 5, 1958.

(3) L'assorbimento sulle pareti non perfettamente conduttrici di una guida dà luogo, in generale, a una degenerazione del campo che, in tal caso, non può più avere il carattere dei modi delle guide perfette.

Questo problema è stato oggetto di numerose ricerche. alcune delle quali anche relativamente recenti: cfr. ad es., R. MÜLLER, *Über Stabilität und Dampfung von Rohrwellen elektrischen und magnetischen Typs gleicher Grenzfrequenz,* « Zeitschr. fur Naturforsch. », Bd. 4, 1949, V. M. PA-

Ho infine provato che eventuali campi del tipo di quelli delle guide perfette, con componenti longitudinali elettrico e magnetico entrambi non nulli non possono ottenersi col metodo di separazione delle variabili, valido invece, com'è ben noto, per le guide perfette (e, limitatamente ai modi simmetrici, anche per le circolari non perfette).

2. Indico, come di consueto, con $\boldsymbol{k}$ il versore di propagazione (asse z, parallelo alle generatrici della guida); con $\boldsymbol{t}$ ed $\boldsymbol{n}$ i versori tangente e normale, rispettivamente, al contorno s della sezione normale generica σ della guida, il cui spazio interno, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$, suppongo occupato da un dielettrico perfetto, omogeneo, isotropo di costanti ε, μ. Dette μ_c, γ_c, rispettivamente, la permeabilità e la conducibilità delle pareti, sicchè ne sia

$$Z = R(1 + i) \qquad \left[R = \sqrt{\frac{\omega\mu_c}{2\gamma_c}}\right] \tag{1}$$

l'impedenza superficiale alla pulsazione ω, ammetto verificata in ogni punto della superficie interna Σ delle pareti la relazione di SCHELKUNOFF [4]

$$\boldsymbol{E}_\Sigma = Z\boldsymbol{H}_\Sigma \wedge \boldsymbol{n}, \tag{2}$$

fra i componenti tangenziali, su Σ,

$$\boldsymbol{E}_\Sigma = (\boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{t})\boldsymbol{t} + E_z\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{H}_\Sigma = (\boldsymbol{H}_t \times \boldsymbol{t})\boldsymbol{t} + H_z\boldsymbol{k} \tag{3}$$

dei vettori (complessi)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(x, y, z) &= [E_z(x, y)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{E}_t(x, y)]e^{-i\omega\alpha z}, \qquad [(\boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{k}) = 0)] \\ \boldsymbol{H}(x, y, z) &= [H_z(x, y)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{H}_t(x, y)]e^{-i\omega\alpha z}, \qquad [(\boldsymbol{H}_t \times \boldsymbol{k}) = 0)] \end{aligned} \tag{4}$$

PADOPOULOS, *Propagation of electromagnetic waves in cylindrical waveguides with imperfectly conducting walls* », « Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math. », Vol. VII, 1954. A. E. KARBOWIAK, *Theory of imperfect Waveguides: the effect of walls impedence*, « P. I. E. E. », Part. B, Vol. 102, 1955. M. DE SOCIO, *Sull'instabilità delle onde elettromagnetiche in una guida a pareti non perfettamente conduttrici*, « Acc. delle Scienze di Bologna », 1953.

[4] S. A. SCHELKUNOFF, *The impedence Concept and Its Applications to Problems of Reflection, Refraction, Shielding and Power Absorption*, « Bell. Syst. Techn. Journ. », vol. XVII, 1938.

($\omega\alpha$, costante complessa di propagazione) del campo armonico qui oggetto di studio.

Dalle (2) seguono allora, tenuto conto delle (3) e delle relazioni

$$\begin{aligned} h^2\boldsymbol{E}_t &= -\,i\omega\alpha \operatorname{grad} E_z - i\omega\mu \operatorname{grad} H_z \wedge \boldsymbol{k}, \\ h^2\boldsymbol{H}_t &= -\,i\omega\alpha \operatorname{grad} H_z + i\omega\varepsilon \operatorname{grad} E_z \wedge \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{5}$$

$$(h^2 = \omega^2(\varepsilon\mu - \alpha^2)), \tag{6}$$

ben note dalla teoria delle guide d'onda ([5]), le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} h^2 Z(H_z)_s &\equiv -\,i\omega\alpha\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_s + i\omega\mu\left(\frac{\partial H_z}{\partial n}\right)_s, \\ h^2(E_z)_s &\equiv Z\left[i\omega\alpha\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)_s + i\omega\varepsilon\left(\frac{\partial H_z}{\partial n}\right)_s\right], \end{aligned} \tag{7}$$

cui debbono soddisfare, in ogni punto del contorno s, gli scalari E_z, H_z, soluzioni delle equazioni

$$\Delta E_z + h^2 E_z = 0, \qquad \Delta H_z + h^2 H_z = 0 \tag{8}$$

che, insieme alla (5) (e (6)), seguono direttamente dalle equazioni di MAXWELL ([5]).

3. L'esistenza, nella guida rettangolare qui in esame, di modi TM o TE simili a quelli delle guide perfette è subordinata a quella di una funzione (non costante) $F(P)$ dei punti P di σ, che sia soluzione dell'equazione differenziale

$$\Delta F + h^2 F = 0 \tag{9}$$

e che soddisfi in ogni punto del contorno s di σ le condizioni

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_s = Ah^2(F)_s = C, \tag{10}$$

([5]) Cfr., ad es. D. GRAFFI, *Onde Elettromagnetiche*, Istituto Superiore delle Telecomunicazioni, Roma, 1958.

dove C è un'opportuna costante ed A un'altra costante legata alla natura del moto ([6]).

Ora, è facile provare che se è $Z \neq 0$, necessariamente la funzione F si riduce a una costante nulla. Sia infatti, in prima ipotesi, $h^2 = 0$; la F, ora funzione armonica dei punti di σ, con derivata normale nulla al contorno s di σ, si riduce ad una costante.

Detta K tale costante, nel caso TM è evidentemente

$$(11) \qquad H_z = 0, \qquad E_z = K,$$

sicchè dalle (2), (3) segue l'identità

$$(12) \qquad (\boldsymbol{H}_t \times \boldsymbol{t})_s = \frac{1}{Z} K;$$

d'altra parte, tenuto conto delle equazioni di MAXWELL e della (4), è anche

$$\oint_s \boldsymbol{H}_t \times \boldsymbol{t} ds = i\omega\varepsilon \int_\sigma E_z d\sigma;$$

cioè, per le (10), (11),

$$\left(\frac{1}{Z} s - i\omega\varepsilon\sigma\right) K = 0:$$

la costante K è dunque nulla, come abbiamo dianzi asserito ([7]).

Nel caso TE, detto K' il valore costante di F, si ha invece

$$(11') \qquad H_z = K', \qquad E_z = 0$$

e, in luogo della (12), l'altra identità

$$(12') \qquad (\boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{t})_s = ZK';$$

([6]) Infatti, per un modo TM ($H_z = 0$), la prima delle (7) dà $\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_s = 0$, quindi $(E_z)_s =$ cost. ; la seconda, conseguentemente, si riduce alla $\left(\frac{\partial E_z}{\partial n}\right)_s = \frac{h^2}{i\omega\varepsilon Z} (E_z)_s$, risultando con ciò giustificate le (10) $\left[\text{nelle quali è, in questo caso, } A = \frac{1}{i\omega\varepsilon Z}\right]$. Analogamente, nel caso $TE (E_0 = 0)$ seguono dalle (7) le relazioni $(H_z)_s =$ cost., $\left(\frac{\partial H_z}{\partial n}\right)_s = \frac{h^2 Z}{i\omega\mu} (H_z)_s$ manifestamente ancora del tipo (10) $\left(\text{con } A = \frac{Z}{i\omega\mu}\right)$.

([7]) Non può infatti annullarsi, per la (1), il binomio entro parentesi al primo membro dell'ultima relazione scritta.

la relazione

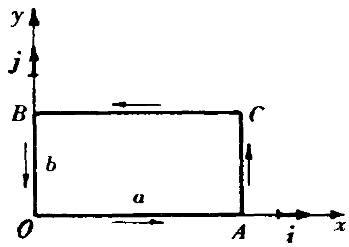
$$\oint_s (\boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{t}) ds = - i\omega\mu \int_\sigma H_z d\sigma,$$

diretta conseguenza delle equazioni di MAXWELL e della (4), assume allora la forma

$$(Zs - i\omega\mu\sigma)K' = 0,$$

dalla quale segue che è $K' = 0$, in accordo con la nostra tesi.

Sia ora $h' \neq 0$; per essere F differenziabile, l'incremento dF che la stessa F subisce quando P passa dalla posizione $O \equiv (0, 0)$ al punto di coordinate $(dx, 0)$ di OA, vale evidentemente $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{0,0} dx$.



Ma, per le (10), è $dF = 0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{0,0} = C$; segue dunque, necessariamente, che dev'essere $C = 0$; ma allora, per un noto teorema ([8]), la funzione F, soluzione della (9) e nulla al contorno s di σ insieme alla sua derivata normale, è identicamente nulla in σ. Risulta così provata in ogni caso la nostra tesi, cioè l'impossibilità che risultino verificate, nella guida rettangolare, le condizioni al contorno (7) con campi *TM*, *TE* del tipo di quelli della guida perfetta.

4. Non è difficile provare, infine, che campi con componenti longitudinali elettrica e magnetica entrambe non nulle, quali ad esempio si hanno nelle guide perfette come sovrapposizione dei modi *TE*, *TM*, non possono determinarsi, nella guida rettangolare a pareti assorbenti, con il metodo di separazione delle variabili.

([8]) Cfr., ad es., F. POCKELS, *Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren auftreten in der Matematischen Physik*, Leipzig, 1891 C. III, par. 3.

Siano infatti

$$(13)\qquad \begin{aligned} E_z(x,\ y) &= (Me^{ih_1x} + Ne^{-ih_1x})(Pe^{ih_2y} + Qe^{-ih_2y}), \\ H_z(x,\ y) &= (Re^{ih_3x} + Se^{-ih_3x})(Ue^{ih_4y} + Ve^{-ih_4y}) \end{aligned}$$

(con h_1, h_2, h_3, h_4 costanti complesse tali che sia

$$(14)\qquad h_1^2 + h_2^2 = h_3^2 + h_4^2 = h^2$$

e con M, N, P, Q, R, S, U, V costanti), le componenti longitudinali, entrambe non nulle, di un campo a variabili separate, soluzioni in σ delle equazioni(8).

Dette a, b le dimensioni della guida, le condizioni al contorno (7), relative ai quattro lati OA, AC, CB, BO (e assunto il verso $\boldsymbol{t}$ di percorso su s coincidente con $\boldsymbol{i}$ su OA), si riducono alle identità

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} & h^2 Z(Re^{ih_3x} + Se^{-ih_3x})(U + V) \equiv \\ & \equiv \omega\alpha h_1(Me^{ih_1x} - Ne^{-ih_1x})(P + Q) + \omega\mu h_4(Re^{ih_3x} + Se^{-ih_3x})(U - V) \\ & h^2 \frac{1}{Z}(Me^{ih_1x} + Ne^{-ih_1x})(P + Q) \equiv \\ & \equiv -\omega\alpha h_3(Re^{ih_3x} - S^{-ih_3x})(U + V) + \\ & + \omega\varepsilon h_2(Me^{ih_1x} + Ne^{-ih_1x})(P - Q), \end{aligned} \right.$$

$$(16)\qquad \left\{ \begin{aligned} & h^2 Z(Re^{ih_3a} + Se^{-ih_3a})(Ue^{ih_4y} + V^{-ih_4y}) \equiv \\ & \qquad \equiv \omega\alpha h_2(Me^{ih_1a} + Ne^{-ih_1a})(Pe^{ih_2y} - Qe^{-ih_2y}) - \\ & \qquad - \omega\mu h_3(Re^{ih_3a} - Se^{-ih_3a})(Ue^{ih_4y} + Ve^{-ih_4y}), \\ & h^2 \frac{1}{Z}(Me^{ih_1a} + Ne^{-ih_1a})(Pe^{ih_2y} + Qe^{-ih_2y}) \equiv \\ & \qquad \equiv -\omega\alpha h_4(Re^{ih_3a} + Se^{-ih_3a})(Te^{ih_4y} - Ve^{-ih_4y}) - \\ & \qquad - \omega\varepsilon h_1(Me^{ih_1a} - Ne^{-ih_1a})(Pe^{ih_2y} + Qe^{-ih_2y}); \end{aligned} \right.$$

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} & h^2 Z(Re^{ih_3x} + Se^{-ih_3x})(Ue^{ih_4b} + Ve^{-ih_4b}) \equiv \\ & \qquad \equiv -\omega\alpha h_1(Me^{ih_1x} - Ne^{-ih_1x})(Pe^{ih_2b} + Qe^{-ih_2b}) - \\ & \qquad - \omega\mu h_4(Re^{ih_3x} + Se^{-ih_3x})(Ue^{ih_4b} - Ve^{-ih_4b}), \\ & h^2 \frac{1}{Z}(Me^{ih_1x} + Ne^{-ih_1x})(Pe^{ih_2b} + Qe^{-ih_2b}) \equiv \\ & \qquad \equiv \omega\alpha h_3(Re^{ih_3x} - Se^{-ih_3x})(Ue^{ih_4b} + Ve^{-ih_4b}) - \\ & \qquad - \omega\varepsilon h_2(Me^{ih_1x} + Ne^{-ih_1x})(Pe^{ih_2b} - Qe^{-ih_2b}), \end{aligned} \right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} & h^2 Z(R+S)(Ue^{ih_4y}+Ve^{-ih_4y}) = \\ & \qquad = -\omega\varepsilon h_2(M+N)(Pe^{ih_2y}-Qe^{-ih_2y}) + \\ & \qquad + \omega\mu h_3(R-S)(Ue^{ih_4y}+Ve^{-ih_4y}) \\ & h^2\frac{1}{Z}(M+N)(Pe^{ih_2y}+Qe^{-ih_2y}) = \\ & \qquad = \omega\alpha h_4(R+S)(Ue^{ih_4y}-Ve^{-ih_4y}) + \\ & \qquad + \omega\varepsilon h_1(M-N)(Pe^{ih_2y}+Qe^{-ih_2y}) \end{aligned}\right.$$

le quali risultano compatibili (con la condizione di E_z, H_z entrambe non nulle), se le quantità $h_1(=\pm h_3)$, $h_2(=\pm h_4)$ (9) sono soluzioni, o di uno dei sistemi:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} & Z^2\omega\varepsilon h_1(1\mp e^{-ih_1a})^2 - \\ & \qquad - Z(h_1^2+\omega^2\varepsilon\mu)(e^{-2ih_1a}-1)+\omega\mu h_1(e^{-ih_1a}\pm 1)^2 = 0 \\ & Z^2\omega\varepsilon h_2(1-\Phi e^{-2ih_2b})^2 - \\ & \qquad - Z(h_2^2+\omega^2\varepsilon\mu)(\Phi^2e^{-4ih_2b}-1)+\omega\mu h_2(1+\Phi e^{-2ih_2b})^2 = 0 \\ & h_1(\Phi e^{-2ih_2b}-1)(1\pm e^{-ih_1a}) - h_2(\Phi e^{-2ih_2b}+1)(1\mp e^{-ih_1a}) + \\ & \qquad + Z\omega\varepsilon(\Phi e^{-2ih_2b}-1)(1\mp e^{-ih_1a}) = 0 \end{aligned}\right.$$

(ottenuti assumendo i segni superiori o quelli inferiori) ed in cui è da porsi, con la convenzione or ora detta circa i segni

$$(20)\qquad \Phi = \frac{Z[h_2(1\pm e^{-ih_1a})-h_1(1\mp e^{-ih_1a})]-\omega\mu(1\pm e^{-ih_1a})}{Z[h_2(1\pm e^{-ih_1a})+h_1(1\mp e^{-ih_1a})]+\omega\mu(1\pm e^{-ih_1a})};$$

o di uno degli altri sistemi (ottenuti da (19) sostituendovi h_2, b, rispettivamente, ad h_1, a):

(9) Non si riportano, per ragioni di brevità, i calcoli relativamente laboriosi ma del tutto privi di difficoltà, che l'eliminazione delle costanti $M, N, \ldots, U, V, h_3, h_4$ dalle (15), ... (18), (14) comporta.

$$(21)\quad \begin{cases} Z^2\omega\varepsilon h_2(1 \mp e^{-ih_2b})^2 - \\ \qquad - Z(h_2^2 + \omega^2\varepsilon\mu)(e^{-2ih_2b} - 1) + \omega\mu h_2(e^{-ih_2b} \pm 1)^2 = 0 \\ Z^2\omega\varepsilon h_1(1 - \Omega e^{-2ih_1a})^2 - \\ \qquad Z(h_1^2 + \omega^2\varepsilon\mu)(\Omega^2 e^{-4ih_1a} - 1) + \omega\mu h_1(1 + \Omega e^{-2ih_1a})^2 = 0 \\ h_2(\Omega e^{-2ih_1a} - 1)(1 \pm e^{-ih_2b}) - h_1(\Omega e^{-2ih_1a} + 1)(1 \mp e^{-ih_2b}) + \\ \qquad + Z\omega\varepsilon(\Omega e^{-2ih_1a} - 1)(1 \mp e^{-ih_2b}) = 0 \end{cases}$$

con

$$(22)\qquad \Omega = \frac{Z[h_1(1 \pm e^{-ih_2b}) - h_2(1 \mp e^{-ih_2b})] - \omega\mu(1 \pm e^{-ih_2b})}{Z[h_1(1 \pm e^{-ih_2b}) + h_2(1 \mp e^{-ih_2b})] + \omega\mu(1 \pm e^{-ih_2b})}.$$

Ora, è evidente che i sistemi (19), (21) ammettono, nell'ipotesi $Z = 0$, le ben note soluzioni

$$(23)\qquad h_{10} = r\frac{\pi}{a}, \qquad h_{20} = \frac{s\pi}{b} \qquad (r,\ s \text{ interi})$$

relative alla guida perfetta ([10]), ed è inoltre facile verificare che, se è $Z \neq 0$, essi sono incompatibili; si osservi infatti, con riferimento al sistema (19) [analoghe considerazioni potrebbero farsi per (21)], che per $Z \neq 0$ le prime due equazioni equivalgono alle

$$(24)\quad \begin{cases} \left(Z - \dfrac{h_1}{\omega\varepsilon}\,\dfrac{e^{-ih_1a} \pm 1}{e^{-ih_1a} \mp 1}\right)\left(Z - \dfrac{\omega\mu}{h_1}\,\dfrac{e^{-ih_1a} \pm 1}{e^{-ih_1a} \mp 1}\right) = 0 \\ \left(Z - \dfrac{h_2}{\omega\varepsilon}\,\dfrac{\Phi e^{-2ih_2b} + 1}{\Phi e^{-2ih_2b} - 1}\right)\left(Z - \dfrac{\omega\mu}{h_2}\,\dfrac{\Phi e^{-2ih_2b} + 1}{\Phi e^{-2ih_2b} - 1}\right) = 0 \end{cases} \qquad ([11])$$

e che nessuna delle soluzioni comuni delle (24) soddisfa la terza delle (19). Risulta così provato che eventuali campi non trasversali della guida rettangolare non perfetta non possono determinarsi con il metodo d'integrazione per separazione delle variabili ([12]) valido per le guide perfette.

([10]) Potrebbero ritrovarsi, in quest'ipotesi, le espressioni di E_z, H_z relative ai vari modi della guida perfetta; ma su ciò non insistiamo.

([11]) Si osservi che per $Z \neq 0$ risultano diversi da zero i binomi $(e^{-ih_1a} \pm 1)$, $(1 - \Phi e^{-2ih_2h})$. Considerazioni analoghe, che non riportiamo per brevità, valgono anche per il sistema (21).

([12]) Il campo nelle guide a pareti non perfette potrà esprimersi come somma di campi dei tipi *TE* e *TM*; si veda, a tale proposito, l'interessante studio di V. M. Papadopoulos (op. cit.).