BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI FERRERO

Un'osservazione su certi gruppi risolubili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 16
(1961), n.3, p. 269–272.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_269_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Un' osservazione su certi gruppi risolubili (*).

Nota di GIOVANNI FERRERO (a Firenze) (*)

Sunto. - Si dimostra che ogni gruppo finito risolubile di rango 2 ha p -lunghezza ≤ 2 , qualunque sia il numero primo p .

Dicesi gruppo (finito risolubile) di rango k ogni gruppo G che abbia una catena principale $G = \bar{G}_0 \supset \bar{G}_1 \supset \dots \supset \bar{G}_n = E$ in cui $\bar{G}_i/\bar{G}_{i+1}$ (per $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) sia un gruppo abeliano avente al più k generatori. Naturalmente tutti i sottogruppi e tutti i gruppi fattoriali di un gruppo di rango k hanno ancora rango k .

I gruppi di rango 1 non sono che i gruppi supersolubili e come tali, se finiti, sono dispersibili, e dunque, per ogni numero primo p , hanno p lunghezza 1. ⁽¹⁾

ZAPPA [2] ha dimostrato che ogni gruppo (finito) G di rango 2 contiene un sottogruppo normale dispersibile D il cui ordine è il massimo divisore dell'ordine di G che sia primo con 6. Ne risulta subito che G ha (se p è un numero primo diverso da 2 e da 3), al più p -lunghezza 1. Qui dimostreremo che G ha 2-lunghezza e 3-lunghezza al più eguali a 2. ⁽²⁾

1. Per semplicità introduciamo la seguente nomenclatura. Diremo catena di rango k ogni catena principale i cui fattoriali siano gruppi abeliani elementari aventi al più k generatori. I fattoriali di una catena di rango 2 di un (2, 3)-gruppo avranno allora ordine 2, 3, 4 oppure 9. Diremo 9'-catena (di rango 2) ogni catena (di rango 2) che non abbia fattoriali di ordine 9. Dimostriamo ora il seguente

LEMMA. - Ogni (2, 3) gruppo G di rango 2 contiene un 3-gruppo normale N tale che G/N ammette una 9'-catena.

Svolgiamo la dimostrazione per induzione sulla lunghezza delle serie principali di G . L'enunciato è intanto vero quando tali serie

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca matematica n. 8 del C.N.R.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 12/6/61.

(1) Un gruppo G ordine $p_1^{i_1} p_2^{i_2} p_3^{i_3} \dots p_h^{i_h} \dots$ (i p_i sono numeri primi distinti tali che $p_i < p_j$ se e solo se $i < j$) si dice *dispersibile* se ha una catena caratteristica $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset E$ in cui G_n ha ordine $p_h^{i_h}$, G_{n-1} ordine $p_h^{i_h} p_{h-1}^{i_{h-1}}$ eccetera. Infine G_1 avrà ordine $p_h^{i_h} p_{h-1}^{i_{h-1}} \dots p_3^{i_3} p_2^{i_2}$.

(2) Per la definizione di p -lunghezza, dovuta a P. HALL e G. HIGMANN [1] vedi n. 2.

hanno lunghezza 1, perchè allora G è addirittura ciclico, di ordine 2 oppure 3. Supponiamo ora che l'enunciato valga per tutti i gruppi le cui serie principali abbiano lunghezza minore di quella delle serie principali del nostro gruppo G .

a) Se G contiene almeno un 3-gruppo invariante non banale M è chiaro che, per l'ipotesi induttiva, G/M ha un sottogruppo normale N/M tale che $(G/M)/(N/M)$ ammette una 9'-catena. Allora, se N è l'immagine inversa completa di N/M nell'omomorfismo naturale di G su G/M , anche G/N (che è isomorfo a $(G/M)/(N/M)$) ammette una 9'-catena. Ora, essendo N ancora un 3-gruppo, il lemma, almeno in questo caso, risulta verificato.

b) Diversamente G avrà un sottogruppo normale minimo M di ordine 2 oppure 4 (e precisamente l'ultimo termine di una sua serie principale). Ancora per l'ipotesi induttiva esisterà in G un sottogruppo normale N contenente M e tale che G/N abbia una 9'-catena, e N/M sia un 3-gruppo. Di più, N non avrà 3-gruppi caratteristici perchè ciascuno di questi sarebbe normale in G .

Se N/M ha ordine 3^x , N ha ordine $2^y 3^x$, con $y = 1$ oppure $y = 2$. Sia allora C il centralizzante di M in N . Per un noto teorema M ha un complemento normale H in C , cioè $C = H \cdot M$ dove H deve essere di ordine 3^x . Ma, essendo ogni elemento di H permutabile con ogni elemento di M , C è prodotto diretto di H ed M , onde H , se non è l'identità, è un 3-gruppo caratteristico in C , e dunque normale in G . Data l'ipotesi in cui ci siano messi in questo caso b), questo non è possibile, e dunque deve essere $H = E$ cioè $C = M$.

D'altra parte N/C deve essere un 3-gruppo isomorfo ad un sottogruppo dell'automorfo di M , e come tale, se non è identico, deve essere di ordine tre. Nel secondo caso M deve inoltre essere isomorfo al gruppo trirettangolo. *Di qui si ha che N coincide con M oppure è isomorfo al G_{12} , gruppo alterno di sostituzioni su quattro lettere.*

In ogni caso la serie principale che raffina la catena $G \supset N \supset M \supset E$ è una 9'-catena: l'enunciato del lemma risulta anche ora verificato, e questo completa appunto la sua dimostrazione.

2. TEOREMA. - *Ogni gruppo (finito risolubile) G di rango 2 ha al più 2-lunghezza 2 ed al più 3-lunghezza 2.* ⁽³⁾

Supponiamo dapprima che G sia un (2,3)-gruppo. Per il lemma

⁽³⁾ Seguendo HALL e HIGMAN dato un gruppo risolubile G ed un numero primo p diciamo p -serie superiore di G la catena:

$$E = P_0 \subset N_0 \subset P_1 \subset N_1 \dots P_l \subset N_l = G$$

in cui N_i/P_i è il massimo p '-sottogruppo normale di G/P_i , mentre P_{i+1}/N_i è il massimo p -sottogruppo normale di G/N_i . Allora il minimo intero l per cui $N_l = G$ si dirà p -lunghezza di G .

ora dimostrato G conterrà un 3-sottogruppo normale N tale che G/N abbia una 9'-catena. Ora il massimo 3-sottogruppo normale K di G non è che il gruppo generato da tutti i suoi 3-gruppi normali, cioè in definitiva l'intersezione di tutti i suoi 3-gruppi di Sylow, e contiene N . Pertanto G/K , su cui G/N è omomorfo, deve avere una 9'-catena di rango 2. Questo ci servirà tra poco: intanto chiamiamo L/K il massimo 2-gruppo normale di G/K , ed L la sua immagine inversa completa nell'omomorfismo naturale di G su G/K . Se $L = G$, G ha 2-lunghezza 1.

Supporremo pertanto che L sia diverso da G .

Diciamo ancora H/L l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di G/L il cui indice in G sia una potenza di 2. Si tratta in sostanza del minimo sottogruppo di questo tipo: basta pensare al teorema dell'isomorfismo per convincersi che l'intersezione di due sottogruppi normali il cui indice in uno stesso G sia potenza di uno stesso numero primo viene ancora a godere di questa proprietà.

Così, se H è l'immagine inversa completa di H/L nell'omomorfismo naturale di G su G/L , G/H è un 2-gruppo.

Ormai basta dimostrare che H/L è un 3-gruppo per avere che H/L è il massimo 3-sottogruppo normale di G/L , ed infine che $G \supset H \supset L \supset K \supset E$ è una 2-catena ascendente di G , e dunque che G ha 2-lunghezza 2.

Veniamo a tale dimostrazione. Procediamo per assurdo, supponendo che H/L non sia un 3-gruppo.

Si considerino tutte le serie principali di G passanti per H e per L . Ognuna di queste, per l'ipotesi ora fatta, deve avere almeno un fattoriale di ordine 2 o 4. Se Σ è una qualunque serie principale passante per H ed L , deve esistere un sottogruppo R_Σ appartenente a Σ con $H \supset R_\Sigma \supset L$ tale che:

a) R/L sia un 3-gruppo,

b) Detto S_Σ il sottogruppo che precede immediatamente R_Σ in Σ , S_Σ/R_Σ ha ordine 2 o 4.

Tra tutte le serie principali di G passanti per H ed L , sia $\bar{\Sigma}$ una di quelle per cui il sottogruppo $R_{\bar{\Sigma}}$ dianzi definito sia di ordine minimo.

Poniamo per brevità $R_{\bar{\Sigma}} = R$, e $S_{\bar{\Sigma}} = S$. Non è possibile che sia $R = L$, perchè in quel caso R/K sarebbe un 2-sottogruppo normale di G/K , più ampio di L/K , contro la definizione di L . Sia $T \supset L$ il sottogruppo che segue immediatamente R nella $\bar{\Sigma}$. Allora R/T ha ordine 3, perchè G/K ha una 9'-catena, e pertanto nessun fattore principale di G/K , può avere ordine 9.

Il centralizzante C/T di R/T in G/T è normale in G/T , ed ha in esso al più indice 2, perchè l'automorfo di R/T ha appunto ordine 2. Ne segue che C/L è normale in G/L , ed ha in esso indice 2, onde C/L contiene H/L , e di conseguenza C/T contiene H/T e

contiene quindi anche S/T . Ne segue che S/T è prodotto diretto di R/T e di un gruppo V/T di ordine 2 o 4, che risulta caratteristico in S/T , quindi normale in G/T . Ne segue che V , è normale in G , ed ha indice 3 in S , mentre T ha indice 2 o 4 in V . Allora se nella $\bar{\Sigma}$, si pone V in luogo di R , si ottiene una nuova serie principale Σ^* in cui V/T ha ordine 2 o 4, e T è un 3-gruppo. Ne segue che $T = R_{\Sigma^*}$, e che T ha ordine minore di quello di R , contro l'ipotesi che avevamo fatto su Σ . Si giunge così ad un assurdo. Pertanto H/L è un 3-gruppo.

Ne segue che: K è il massimo 2'-sottogruppo normale di G , L/K è il massimo 2-sottogruppo normale di G/K ; H/L è il massimo 2'-sottogruppo normale di G/L (perchè, essendo G/H un 2-gruppo, un sottogruppo di G/L più ampio di H/L non può essere un 2'-sottogruppo); e infine il massimo 2-sottogruppo normale di G/H è G/H stesso.

Ne segue che, se $H \neq G$, la catena $E \subset K \subset L \subset H \subset G$ è la 2-serie ascendente di G , onde G ha 2-lunghezza 2, mentre, se $H = G$, la catena $E \subset K \subset L \subset H = G$ è la 2-serie ascendente di G , onde G ha 2-lunghezza 1.

Per vedere che anche la 3-lunghezza di G è al più 2 è sufficiente considerare ancora la catena $E \subset K \subset L \subset H \subset G$. Se infatti chiamiamo E' il massimo 2-gruppo normale di G , e H' , L' , K' le immagini inverse complete (nell'omomorfismo naturale π di G su G/E') delle immagini di H , L e K nel citato omomorfismo π , si ha successivamente che E' è il primo termine della 3-serie ascendente di G , K' sta nel suo secondo termine, L' sta nel terzo, H' nel quarto H ed infine G stesso sta nel quinto. Tale serie contiene pertanto soltanto (al più) due fattoriali che sono 3-gruppi, e così la 3-lunghezza di G non supererà 2.

Sia ora G un gruppo qualunque di rango 2. In base al citato teorema di ZAPPA, G ha un sottogruppo normale dispersibile D , d'ordine primo con 6, tale che G/D è un (2,3)-gruppo.

Se ora N'/D è il massimo 2'-sottogruppo normale di G/D , si ha che N' è il massimo 2'-sottogruppo normale di G . Di qui è facile dedurre che, avendo G/D 2-lunghezza minore od eguale a due, altrettanto avviene per G . Similmente si prova che G ha anche 3-lunghezza minore od eguale a 2.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. HALL e G. HIGMAN. *The p-length of a p-soluble group. and reduction theorems for BURNSIDE'S problem*, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1956) 1-42.
- [2] G. ZAPPA. *Sui sottogruppi finiti dei gruppi di HIRSCH*, Giorn. di Mat. di Battaglini, 77 (1947), 56-70.