Bollettino Unione Matematica Italiana

Franco Fava

Geometria delle V_m in uno spazio proiettivo curvo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.2, p. 124–144.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_2_124_0>

Geometria delle V_m in uno spazio proiettivo curvo.

Nota di Franco Fava (a Torino) (*)

Sunto. *É contenuto nel n. 1.*

1. L'estensione dell'ordinaria geometria differenziale a varietà V_m di uno spazio proiettivo curvo X_n (¹), può essere fondata sulla considerazione di certe « giaciture », che chiameremo *osculatrici*, alle quali è possibile pervenire tramite elementi differenziali di convenienti ordini degli enti interessati (siano essi curve, superficie, varietà): alcune ricerche di E. Bompiani lasciano del resto chiaramente intravedere i fondamenti di una tale possibilità. (²)

Il punto di partenza della presente indagine rivolta appunto all'accennata estensione ed a porre, nello stesso tempo, alcuni fondamenti per ulteriori sviluppi (³), è da vedersi nella nozione (che fornisce l'analogo dell'ordinario S_k osculatore) di k - *giacitura osculatrice* ad una curva C di X_n: alla giacitura in questione si giunge (n. 2) con l'ausilio della V_k formata da autoparallele (uscenti dal punto considerato) ed avente un contatto di ordine k con C.

Per i valori 2 e 3 di k, il procedimento di calcolo che si rivela particolarmente idoneo per la determinazione delle giaciture oscu-

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 12 giugno 1961.

(¹) Ossia uno spazio numerico in cui siano date le autoparallele di una connessione; cfr.: E. Bompiani. *Topologia differenziale.* Nota V. « Rend. Acc. Naz. Lincei », S. VIII. Vol. VIII, fasc. 4 (1950).

(²) Il Bompiani estende infatti alle superficie di X_3 l'ordinaria teoria dell'applicabilità proiettiva di Fubini sfruttando la nozione di giacitura principale (cfr. l. c. (1)).

Tenere inoltre presenti le note I. II. III. IV. di E. Bompiani degli stessi « Rend. » citati in (1), fasc. 1, 2, 3.

(³) Alcune delle questioni che sono a fondamento del presente lavoro furono trattate - però da un punto di vista differente da quello attuale - in una mia comunicazione dal titolo: *Geometria delle varietà in uno spazio a connessione affine,* tenuta ad Innsbruck in occasione del « V Österreichischer Mathematiker kongress und internationales Mathematikertreffen », 12-17 settembre, 1960.

latrici (corrispondenti ai precisati valori di k) risulta essere, come appare dal contenuto del n. 3, il procedimento di derivazione di un vettore lungo una linea quando, il detto procedimento, lo si applichi ripetutamente ed in modo adeguato a partire dal vettore tangente.

Immediato si presenta, di conseguenza, il passaggio dalle giaciture osculatrici, relative a curve uscenti da uno stesso punto ed appartenenti ad una varietà $V_m (2 \leq m < n)$, alle giaciture che (per ragioni di analogia con quanto avviene in un ordinario S_n proiettivo) sono qui dette *k - osculatrici* (n. 4); i casi a cui danno luogo i valori 2 e 3 di k si prestano per di più ad essere trattati con sviluppi formali aventi l'aspetto tipico di quelli ordinari (nn. 4 e 8).

Con l'ausilio poi degli enti testé menzionati da noi introdotti, riesce agevole la caratterizzazione di classi di varietà V_m di X_n e su di esse di particolari sistemi di curve, in modo da ottenere, tra l'altro, l'estensione agli spazi in questione di alcune ben note classi di superficie e varietà considerate da C. SEGRE (nn. 5... 9) (4).

Tra i sistemi di curve esistenti su varietà di un ordinario spazio proiettivo che qui vengono estesi a spazi (proiettivi) curvi, figurano:

a) i sistemi di *quasi - asintotiche* $\gamma_{1,2}$ (n. 6);

b) i sistemi di *linee caratteristiche* (di una superficie Φ di S_n) (n. 7);

c) i sistemi di *linee principali* esistenti su ogni superficie di S_5 (n. 9).

Attraverso le estensioni suddette si vede in particolare che le « asintotiche » di una V_{n-1} di uno spazio a connessione affine, introdotte ordinariamente per altra via, rientrano nei sistemi di *quasi - asintotiche* $\gamma_{1,2}$ da noi considerati.

2. Sia X_n uno spazio proiettivo curvo nel quale sono date le autoparallele con le equazioni (5)

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{hk} \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{1}$$

(4) C. SEGRE: *Su una classe di superficie degli iperspazi....* « Atti Acc. Sc., Torino ». Vol. XLII, 1906-07.

(5) Per notazioni e terminologia da noi utilizzate tenere presente, oltre il lavoro citato in (1), il seguente trattato: L. P. EISENHART. *Non Riemannian Geometry.* « Am. Math. Soc., Colloquium publ. », vol. VIII, (New York, 1927) ed anche: G. VRANCEANU. *Leçons de Géométrie différentielle.* (Bucarest, 1947).

e sia Γ la connessione simmetrica – che diremo associata ad X_n – avente come componenti le Γ^i_{hk} (6).

Assegnata in X_n la curva C di equazioni:

$$x^i = x^i(t), \tag{2}$$

indichiamo con V_k la varietà formata dalle autoparallele uscenti da $P(x^i)$ ed avente con C un contatto di ordine k.
Supponiamo che P sia l'origine delle coordinate: quali equazioni dell'autoparallela (per P) tangente al vettore ξ^i si hanno notoriamente (cfr. EISENHART, l. c. in (5), pag. 58) le seguenti:

$$x^i = \xi^i s - \frac{1}{2}\Gamma^i_{hk}\xi^h\xi^k s^2 - \frac{1}{3\,!}\Gamma^i_{hkl}\xi^h\xi^k\xi^l s^3 - \frac{1}{4\,!}\Gamma^i_{hklm}\xi^h\xi^k\xi^l\xi^m s^4 - \dots; \tag{3}$$

diamo al vettore ξ^i l'espressione che segue (formata con i k vettori $\xi^i_{(r)}$):

$$\xi^i = \varepsilon^r\xi^i_{(r)}, \qquad (r = 1,\ 2, \dots k)$$

e di essa teniamo conto per sostituire nella (3); seguono così le:

$$x^i = \xi^i_{(r)}\varepsilon^r s - \frac{1}{2}\Gamma^i_{hk}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\varepsilon^p\varepsilon^q s^2 - \frac{1}{3\,!}\Gamma^i_{hkl}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\xi^l_{(r)}\varepsilon^p\varepsilon^q\varepsilon^r s^3 - \tag{4}$$
$$- \frac{1}{4\,!}\Gamma^i_{hklm}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\xi^l_{(r)}\xi^m_{(z)}\varepsilon^p\varepsilon^q\varepsilon^r\varepsilon^z s^4 - \dots$$

Al variare delle ε^r, le (4) vengono a rappresentare tutte le autoparallele tangenti ai vettori della giacitura a k dimensioni individuata da $\xi^i_{(r)}$($r = 1,\ 2 \dots k$); introducendo perciò i parametri u^r attraverso le relazioni:

$$u^r = \varepsilon^r s$$

e sostituendo nelle (4), si ottengono le:

$$x^i = \xi^i_{(r)}u^r - \frac{1}{2}\Gamma^i_{hk}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}u^p u^q - \frac{1}{3\,!}\Gamma^i_{hkl}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\xi^l_{(r)}u^p u^q u^r - \tag{5}$$
$$- \frac{1}{4\,!}\Gamma^i_{hklm}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\xi^l_{(r)}\xi^m_{(z)}u^p u^q u^r u^z \dots$$

(6) Gli indici dei quali si fa uso assumono i valori da 1 ad n ogni qualvolta non figura alcuna precisazione al riguardo.

quali equazioni della varietà formata dalle autoparallele tangenti alla giacitura dei k vettori $\xi^i_{(r)}$.

Cerchiamo ora di imporre che la varietà rappresentata con le (5) abbia un contatto di ordine k con la C; utilizziamo per la C gli sviluppi

$$x^i = \lambda^i t + \frac{1}{2}\frac{d\lambda^i}{dt}t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2\lambda^i}{dt^2}t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^3\lambda^i}{dt^3}t^4 + \dots, \qquad \left(\lambda^i = \frac{dx^i}{dt}\right) \tag{6}$$

e per $u^r = u^r(t)$ i seguenti:

$$u^r = \overset{r}{a}_1 t + \overset{r}{a}_2 t^2 + \overset{r}{a}_3 t^3 + \overset{r}{a}_4 t^4 + \dots \qquad (r = 1,\ 2,\ \dots\ k) \tag{7}$$

essendo le $\overset{r}{a}_1$, $\overset{r}{a}_2$, $\overset{r}{a}_3$, ... tali che le funzioni definite dalle (7) siano quelle con cui si realizza il contatto richiesto.

Dalle (5), ove si siano sostituite le espressioni (7), per confronto con le (6), si deducono le condizioni:

$$\begin{aligned}
&\overset{r}{a}_1\xi^i_{(r)} = \lambda^i, \\
&\overset{r}{a}_2\xi^i_{(r)} - \frac{1}{2}\Gamma^i_{hk}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\overset{p}{a}_1\overset{q}{a}_1 = \frac{1}{2}\frac{d\lambda^i}{dt}, \\
&\overset{r}{a}_3\xi_{(r)} - \frac{1}{2}\Gamma^i_{hk}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}(\overset{p}{a}_1\overset{q}{a}_2 + \overset{p}{a}_2\overset{q}{a}_1) - \\
&\qquad - \frac{1}{3!}\Gamma^i_{hkl}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\xi^l_{(r)}\overset{p}{a}_1\overset{q}{a}_1\overset{r}{a}_1 = \frac{1}{3!}\frac{d^2\lambda^i}{dt^2}, \\
&\overset{r}{a}_4\xi_{(r)} - \frac{1}{2}\Gamma^i_{hk}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}(\overset{p}{a}_1\overset{q}{a}_3 + \overset{p}{a}_2\overset{q}{a}_2 + \overset{p}{a}_3\overset{q}{a}_1) - \\
&\qquad - \frac{1}{3!}\Gamma^i_{hkl}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\xi^l_{(r)}(\overset{p}{a}_1\overset{q}{a}_1\overset{r}{a}_2 + \overset{p}{a}_1\overset{q}{a}_2\overset{r}{a}_1 + \overset{p}{a}_2\overset{q}{a}_1\overset{r}{a}_1) - \\
&\qquad - \frac{1}{4!}\Gamma^i_{hklm}\xi^h_{(p)}\xi^k_{(q)}\xi_{(r)}\xi^m_{(z)}\overset{p}{a}_1\overset{q}{a}_1\overset{r}{a}_1\overset{z}{a}_1 = \frac{1}{4!}\frac{d^3\lambda^i}{dt^3} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8}$$

le (8), come si riconosce senza difficoltà, sono riconducibili a relazioni la cui forma è la seguente:

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
a_1^{r}\xi^i_{(r)} &= \lambda^i, \\
a_2^{r}\xi^i_{(r)} &= \frac{1}{2}\lambda_1^i, \\
a_3^{r}\xi^i_{(r)} &= \frac{1}{3!}\lambda_2^i, \\
a_4^{r}\xi^i_{(r)} &= \frac{1}{4!}\lambda_3^i, \\
&\dots\dots
\end{aligned}
$$

ove λ_1^i, λ_2^i, λ_3^i..., al pari di λ^i, sono da riguardare come vettori noti.

Dalle (9) segue così che il contatto di ordine k con C impone k condizioni per la giacitura tangente alla V_k la quale risulta pertanto - in generale - determinata. La giacitura a k dimensioni tangente alla V_k ora considerata, la diremo: k - *giacitura osculatrice alla* C *nel punto* P. (7)

La giacitura suddetta può dunque ritenersi individuata dal vettore tangente λ^i e dai vettori λ_1^i, λ_2^i, λ_3^i,... aventi le espressioni che si deducono da ciascuna delle (8) eliminando, a norma di quelle che la precedono, le quantità $a_l^{r}\xi^i_{(r)}$.

Del significato delle espressioni di λ_1^i, λ_2^i, λ_3^i ... ci occuperemo al n. successivo; a conclusione del presente numero osserviamo soltanto che la k - giacitura osculatrice a C (in P) viene a coincidere, per $k=2$, con la *giacitura principale* di Bompiani relativa all'E_2 di C (di centro P) ed all'E_2 di autoparallela tangente. (8)

3. Indichiamo con: $\frac{D\lambda^i}{dt}$ *il vettore derivato lungo la curva* C - *rispetto alla connessione* Γ - *del vettore tangente* λ^i, ossia il vettore seguente:

$$
(10) \qquad \frac{D\lambda^i}{dt} = \frac{d\lambda^i}{dt} + \Gamma^i_{hk}\lambda^h\lambda^k
$$

(7) La giacitura per cui sono soddisfatte le (9), in casi particolari, può presentare dimensione $< k$; così ad es., se λ_2^i non è linearmente indipendente rispetto a λ^i, λ_1^i, imponendo che il contatto in questione sia del 3° ordine, risulta determinata soltanto una 2 - giacitura la quale va riguardata come 2 - giacitura osculatrice *stazionaria*: i punti di C in corrispondenza ai quali si verifica un tale fatto sono l'analogo degli ordinari *punti planari* di una curva.

(8) Cfr.: l. c. (2). Note I, V.

e con: $\dfrac{D^n\lambda^i}{dt^n}$ indichiamo più generalmente il vettore (ottenuto con procedimento ricorrente) derivato di ordine n (rispetto a Γ) di λ^i lungo la stessa curva C.

Per il vettore derivato del 2° ordine di λ^i si deduce l'espressione che segue (si utilizzi la (10) per introdurre $\dfrac{D\lambda^i}{dt}$ in luogo di $\left.\dfrac{d\lambda^i}{dt}\right)$:

$$\frac{D^2\lambda^i}{dt^2} = \frac{d^2\lambda^i}{dt^2} + \Gamma^i_{hkl}\lambda^h\lambda^k\lambda^l + 3\Gamma^i_{hk}\frac{D\lambda^h}{dt}\lambda^k. \tag{11}$$

Se si tengono presenti le (8), (9), si riconosce che è:

$$\lambda^i_1 = \frac{D\lambda^i}{dt}, \qquad \lambda^i_2 = \frac{D^2\lambda^i}{dt^2} \tag{12}$$

per cui si può anzitutto precisare quanto segue:

la 2 - giacitura osculatrice alla curva C (*in* P) *è determinata dal vettore tangente* λ^i *e dal suo derivato* (*lungo* C *rispetto a* Γ) $\dfrac{D\lambda^i}{dt}$; *la 3 - giacitura osculatrice, dai vettori precedenti e dal vettore* $\dfrac{D^2\lambda^i}{dt^2}$. [9]

Veniamo ora all'esame della 4 - giacitura osculatrice attraverso l'analisi dell'espressione di λ^i_3.

L'espressione in questione risulta:

$$\lambda^i_3 = \frac{d^3\lambda^i}{dt^3} + \Gamma^i_{hklm}\lambda^h\lambda^k\lambda^l\lambda^m + 6\,\Gamma^i_{hkl}\lambda^h\lambda^k\lambda^l_1 + 3\Gamma^i_{hk}\lambda^h_1\lambda^k_1 + 4\Gamma^i_{hk}\lambda^h\lambda^k_2\,; \tag{13}$$

per il vettore derivato 3° di λ^i otteniamo (tenendo conto delle (10), (11), (12)):

$$\frac{D^3\lambda^i}{dt^3} = \frac{d^3\lambda^i}{dt^3} + \Gamma^i_{hklm}\lambda^h\lambda^k\lambda^l\lambda^m + 3\Gamma^i_{hkl}\lambda^h\lambda^k_1\lambda + \tag{14}$$
$$+ 3\bar{\Gamma}^i_{hkl}\lambda^h\lambda^k_1\lambda^l + 3\Gamma^i_{hk}\lambda^h_1\lambda^k_1 + 4\Gamma^i_{hk}\lambda^h\lambda^k_2$$

[9] Se λ^i, $\dfrac{D\lambda^i}{dt}$, $\dfrac{D^2\lambda^i}{dt^2}$ non sono linearmente indipendenti, la 2-giacitura osculatrice è stazionaria (cfr. n. (7)).

essendo

$$\bar{\Gamma}^i_{hkl} = \frac{1}{2}(\Lambda^i_{hlk} + \Lambda^i_{lhk}) \tag{15}$$

e

$$\Lambda^i_{hlk} = \frac{\partial \Gamma^i_{hk}}{\partial x^l} - \Gamma^i_{hm}\Gamma^m_{lk} - \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{hl}\,. \tag{15'}$$

Se si procede al confronto delle (13), (14), segue la relazione:

$$\lambda^i_3 = \frac{D^3\lambda^i}{dt^3} + 3(\Gamma^i_{hkl} - \bar{\Gamma}^i_{hkl})\lambda^h\lambda^k_1\lambda^l\,. \tag{16}$$

Poichè:

$$\Gamma^i_{hkl} = \frac{1}{3}(\Lambda^i_{hlk} + \Lambda^i_{khl} + \Lambda^i_{lkh}),$$

ed inoltre

$$\Lambda^i_{hlk} = \Lambda^i_{klh}$$

si deduce:

$$\Gamma^i_{hkl} - \bar{\Gamma}^i_{hkl} = \frac{1}{6}(2\Lambda^i_{lkh} - \Lambda^i_{hlk} - \Lambda^i_{khl})\,.$$

D'altronde, introducendo il tensore di curvatura, si ha (cfr. (15')):

$$\Lambda^i_{lkh} - \Lambda^i_{hlk} = B^i_{hkl}\,,$$

$$\Lambda^i_{lkh} - \Lambda^i_{khl} = B^i_{lkh}$$

e di conseguenza

$$3(\Gamma^i_{hkl} - \bar{\Gamma}^i_{hkl}) = \frac{1}{2}(B^i_{hkl} + B^i_{lkh}).$$

Alla (16) si può pertanto dare la forma seguente ben più espressiva:

$$\lambda^i_3 = \frac{D^3\lambda^i}{dt^3} + B^i_{hkl}\lambda^h\lambda^k_1\lambda^l. \tag{16'}$$

Da quanto precede si possono trarre senz'altro le seguenti conclusioni:

poichè il vettore λ^i_3 *differisce da* $\frac{D^3\lambda^i}{dt^3}$ *e, più generalmente:* $\lambda^i_h \neq \frac{D^h\lambda^i}{dt^h}$ *per* $h \geq 3$, *la giacitura dei vettori* λ^i, $\frac{D\lambda^i}{dt}$, ... $\frac{D^{k-1}\lambda^i}{dt^{k-1}}$ *è* k *- giaci-*

tura osculatrice a C soltanto per $k < 3$ e ciò a meno che sia:

$$\overset{i}{B}_{hkl} = 0$$

nel qual caso la connessione Γ è euclidea; perciò:

soltanto se Γ è una connessione euclidea, i vettori derivati successivi del vettore tangente (calcolati lungo C e rispetto a Γ) conducono a k - giaciture osculatrici anche per $k > 3$.

In quest'ultimo caso, introdotte delle coordinate cartesiane, la derivazione lungo C si riduce alla derivazione ordinaria.

In definitiva quindi, quando k assume i valori 2 e 3, le k - giaciture osculatrici sono immediatamente determinabili per mezzo della derivazione lungo la curva considerata, ossia con un procedimento che è la più naturale estensione agli spazi in questione di quello valido nel caso di uno spazio ordinario.

4. Una volta stabilita la nozione di k - giacitura osculatrice ad una curva C di X_n, è possibile pervenire alla nozione di *giacitura k - osculatrice* ad una varietà V_m di $X_n (2 \leq m < n)$ così come, nel caso dell'ordinario spazio proiettivo S_n, dagli S_k osculatori alle curve di una varietà uscenti da un suo punto, si giunge allo spazio k - osculatore alla varietà stessa (nel punto).

Nel presente numero ci occuperemo in particolare delle giaciture 2 - osculatrici ovvero dell'analogo (in X_n) degli spazi 2 - osculatori ad una V_m di S_n.

Siano dunque

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \dots u^m) \tag{17}$$

le coordinate del punto P che descrive la V_m di X_n e C una generica curva (di V_m) uscente da P.

Poniamo

$$\overset{i}{\mu}_{(h)} = \partial_h x^i \qquad \left(\partial_h x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^h}\right) \tag{18}$$

di guisa che

$$\overset{i}{\mu}_{(1)}, \quad \overset{i}{\mu}_{(2)}, \quad \overset{i}{\mu}_{(3)}, \dots \overset{i}{\mu}_{(m)} \tag{18'}$$

siano i vettori che individuano la giacitura tangente (in generale di dimensione m) alla V_m. Indicando ancora con λ^i il vettore tangente alla curva C che supporremo di equazioni:

$$x^i = x^i(u^1(t), u^2(t), \dots u^m(t)),$$

si ha:

$$\lambda^i = \overset{i}{\mu}_{(h)} \frac{du^h}{dt} \tag{18''}$$

e successivamente

$$\frac{D\lambda^i}{dt} = \overset{i}{\mu}_{(rs)} \frac{du^r}{dt} \frac{du^s}{dt} + \overset{i}{\mu}_{(h)} \frac{d^2u^h}{dt^2} \tag{19}$$

avendo posto:

$$\overset{i}{\mu}_{(rs)} = \partial_{rs} x^i + \overset{i}{\Gamma}_{hk} \partial_r x^h \partial_s x^k \qquad \left(\partial_{rs} x^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^r \partial u^s}\right) \tag{19'}$$

ossia: *avendo indicato con* $\overset{i}{\mu}_{(rs)}$ *il vettore* $\frac{D\overset{i}{\mu}_{(r)}}{\partial u^s}$, *derivato (rispetto alla connessione* Γ*) lungo la linea (su cui varia)* u^s, *del vettore tangente alla* u^r.

In base alla (19) e in virtù di quanto si è stabilito al n. precedente, si ha subito che:

le 2 - giaciture osculatrici alle curve della V_m *aventi in* P *una stessa tangente* $\left(\textit{determinata da } \frac{du^h}{dt}\right)$, *descrivono la* (m + 1) - *giacitura individuata dalla giacitura tangente* (*a* V_m) *e dal vettore*

$$\overset{i}{\mu}_{(rs)} \frac{du^r}{dt} \frac{du^s}{dt}; \tag{20}$$

la giacitura in questione la diremo: *giacitura* (2, 1) - *osculatrice* alla V_m secondo la direzione considerata. [10]

Se la direzione considerata si fa variare (nella giacitura tangente), il vettore (20) varierà a sua volta restando però nella giacitura dei vettori:

$$\overset{i}{\mu}_{(rs)}; \qquad (r, s = 1, 2, \dots m) \tag{21}$$

la giacitura dei vettori (18'), (21) la diremo: *giacitura* 2 - *osculatrice alla* V_m; la sua dimensione N risulta, in generale, data da:

$$N = \frac{m(m+3)}{2}$$

sempre che sia: $N \leq n$.

(10) Cfr., per la terminologia usata, l. c. (2), nota III, pag. 85.

Ed ancora:

le giaciture (2, 1) - *osculatrici alle curve di* V_m *uscenti da* P, *descrivono un cono di dimensione* 2m *e di ordine* 2m — 1 *che è l'analogo del « cono di Del Pezzo generalizzato »*.

Per $m = 2$ la giacitura 2 - osculatrice ha, in generale, dimensione 5 e il cono considerato è l'analogo del cono V_4^2 di DEL PEZZO. [11]

5. Da quanto si è detto al n. precedente si possono dedurre immediatamente alcune conseguenze circa la dimensione della giacitura 2 - osculatrice alla V_m considerata; infatti, se tra i vettori che individuano la giacitura in questione sussistono q relazioni lineari:

$$M_l^{rs} \mu_{(rs)}^{i} + M_l^{r} \mu_{(r)}^{i} = 0 \quad (l=1, 2 \ldots q;\ r,\ s=1, \ldots m) \tag{22}$$

(M_l^{rs}, M_l^{r} sono delle assegnate funzioni di u^1, u^2, ... u^m), allora la corrispondente dimensione anzichè N risulta essere $N-q$. [12]

Avuto riguardo alle espressioni effettive (cfr. (18), (19')) dei vettori che figurano nelle (22), si vede che le (22) stesse rappresentano q sistemi di n equazioni (ciascuno) alle derivate parziali in n funzioni incognite (di m variabili), lineari nelle derivate 2^e^

[11] La nozione di giacitura 2 - osculatrice (ad una V_m di X_n), al pari della nozione di 2 - giacitura osculatrice ad una curva, ha un fondamento di natura topologica: essa può invero dedursi dalla nozione di *giacitura principale* relativa a due calotte σ^2_m (del 2° ordine) tangenti ed appartenenti ad uno spazio topologico T_n; con sviluppi che generalizzano il procedimento seguito dal BOMPIANI (l. c. (2), nota III.) per il caso di due calotte superficiali, si può provare che: *le calotte* σ^2_{n-1} *che contengono due calotte* σ^2_m *di* T_n *tra loro tangenti, risultano tutte tangenti ad una giacitura fissa la cui dimensione è:*

$$N = \frac{m(m+3)}{2} \qquad (N \leq n).$$

La nozione di giacitura 2 - osculatrice deriva da quella precedente supponendo che le due calotte appartengano ad X_n e che una di esse sia formata dalle autoparallele tangenti all'altra nel centro. Pure di natura topologica viene, di conseguenza, ad essere l'analogo del cono di DEL PEZZO (generalizzato o no).

[12] $q \leq \binom{m+1}{2} - 1$ nell'ipotesi che la dimensione della giacitura tangente alla V_m sia: m.

e di 2° grado nelle derivate 1e; quindi:

la giacitura 2 - osculatrice ad una varietà V_m *ha dimensione* $N-q$ *se la varietà è soluzione di* q *sistemi del tipo* (22). *E viceversa: se la giacitura in questione ha dimensione* $N-q$ *anzichè* N, *la* V_m *è soluzione di* q *sistemi del tipo considerato.*

Nel caso particolare $q=1$, le varietà che si ottengono sono soluzioni di un solo sistema di tipo (22), il quale assume l'aspetto seguente (sopprimendo l'indice inferiore nei coefficienti):

$$M^{rs}(\partial_{rs}x^i+\Gamma^i_{hk}\partial_r x^h\partial_s x^k)+M^r\partial_r x^i=0\,; \tag{22'}$$

le V_m in questione risultano, come ora vedremo, di natura tale da rendere soddisfatte proprietà che sono le analoghe di altre ben note relative a varietà dello spazio ordinario S_n soluzioni di *un'equazione di Laplace.*

Cercando di mantenere più stretta possibile l'analogia con il caso dello spazio proiettivo, facciamo ricorso ad una calotta σ^2_{n-1} (del 2° ordine) di una V_{n-1} di X_n, utilizzando per essa la rappresentazione che segue:

$$a_i x^i=a_{p_1p_2}x^{p_1}x^{p_2}+\ldots\qquad (p_1,\,p_2=1,\,2,\,\ldots\,n) \tag{23}$$

valida nell'ipotesi che l'origine delle coordinate (che supponiamo corrispondere ad $u^1=u^2=\ldots u^m=0$) coincida con il centro della calotta σ^2_{n-1} (i puntini stanno al posto dei termini di grado ≥ 3 nelle x^p).

Poichè alla V_m considerata si possono attribuire gli sviluppi che seguono:

$$x^i=\partial_p x^i du^p+\frac{1}{2}\partial_{rs}x^i du^r du^s+\ldots,\qquad (r,\ s\ =1,\,2,\,\ldots\,m) \tag{24}$$

per avere la V'_{m-1} intersezione della V_{n-1} con la V_m, basta sostituire nella (23), ovvero imporre che sia:

$$a_i(\partial_p x^i du^p+\frac{1}{2}\partial_{rs}x^i du^r du^s+\ldots)=a_{p_1p_2}(\partial_r x^{p_1}\partial_s x^{p_2}du^r du^s+\ldots)\,; \tag{25}$$

fatta l'ipotesi che la giacitura tangente alla V_{n-1} contenga la giacitura tangente alla V_m, si ha anzitutto

$$a_i\partial_p x^i=0$$

per cui con l'equazione:

$$(a_{p_1p_2}\partial_r x^{p_1}\partial_s x^{p_2}-\frac{1}{2}a_i\partial_{rs}x^i)du^r du^s=0 \tag{26}$$

si viene a rappresentare, entro la m–giacitura tangente alla V_m, il cono V^2_{m-1} delle direzioni tangenti, nel punto considerato, alla V_{m-1} intersezione.

Se si suppone che la V_{n-1} sia formata dalle autoparallele uscenti dal punto considerato, dalle (23), utilizzando le (5), oltre alla condizione

$$a_i \xi^i_{(r)} = 0$$

si deducono facilmente le:

$$a_{p_1 p_2} = -\frac{1}{2} a_i \Gamma^i_{p_1 p_2} ;$$

l'equazione (26) viene così ad assumere la forma (usando h e k in luogo di p_1, p_2):

$$(26') \qquad a_i(\partial_{rs} x^i + \Gamma^i_{kh} \partial_r x^h \partial_s x^k) du^r du^s = 0$$

od anche, in termini di vettori derivati lungo le linee parametriche (cfr. (19), (19')):

$$(26'') \qquad a_i \mu^i_{(rs)} du^r du^s = 0 \quad (^{13})$$

Se, come vogliamo supporre, la V_m è soluzione del sistema (22'), ossia se è:

$$(22'') \qquad M^{rs} \mu^i_{(rs)} + M^r \mu^i_{(r)} = 0$$

segue subito:

$$(27) \qquad M^{rs}(a_i \mu^i_{(rs)}) = 0 ; \qquad\qquad (a_i \mu^i_{(r)} = 0)$$

la (27) è la nota condizione di apolarità tra il cono di equazione (26'') ed il cono - inviluppo (di $(m-1)$ - giaciture) seguente:

$$(28) \qquad M^{rs} \eta^r \eta^s = 0 ;$$

quindi: *i coni rappresentanti le direzioni tangenti alla sezione della* V_m *con le* V_{n-1} *formate da autoparallele e tangenti alla* V_m *stessa (nel punto considerato), formano un sistema apolare al cono (fisso) di equazione* (28).

(13) Si noti che la (26'') è anche la condizione che deve essere verificata dalle tangenti alle curve di V_m (uscenti da P) affinchè la relativa 2 - giacitura osculatrice appartenga alla giacitura $a_i x^i = 0$: basta invero imporre che sia (cfr. (19)):

$$a_i \frac{D\lambda^i}{dt} = 0$$

e tenere conto delle $a_i \mu^i_{(h)} = 0$.

Il cono di equazione (28) può pertanto dirsi: *cono caratteristico.* [14]

Nel caso di V_m soluzioni di q sistemi del tipo considerato, si otterranno q coni caratteristici ed altrettante condizioni di apolarità.

Per il valore massimo di q (cfr. n. (12)) il cono di equazione (26″) è fisso e, per i fatti che si vedranno al n. successivo, esso si può chiamare in tal caso *cono asintotico* della V_m.

6. Ulteriori deduzioni si possono fare allorchè la V_m è soluzione dei sistemi (22).

Riprendiamo in considerazione le q condizioni (22) ed indichiamo con $N_1 = \binom{m+1}{2}$ il numero dei vettori $\overset{i}{\mu}_{(rs)}(q \leq N_1 - 1)$: poichè si suppone che i coefficienti M_l^{rs} non verifichino particolari condizioni, posto $q_1 = N_1 - q$, dalle (22) stesse risulta possibile esprimere q vettori $\overset{i}{\mu}_{(rs)}$ per mezzo dei q_1 rimanenti; alle (22) possono quindi essere sostituite relazioni del tipo:

$$\overset{i}{\mu}_{(\bar{r}\bar{s})} = Q_{\bar{r}\bar{s}}^{rs} \overset{i}{\mu}_{(rs)} + \ldots \tag{29}$$

ove:

$\bar{r}\bar{s}$ indica uno generico dei q accoppiamenti di indici corrispondenti ai vettori rispetto cui si risolvono le (22);

rs uno generico degli accoppiamenti residui ed i puntini i termini formati con i vettori $\overset{i}{\mu}_{(r)}$.

Con l'uso delle (29), la (27) si scrive:

$$a_i \overset{i}{\mu}_{(rs)}(Q_{\bar{r}\bar{s}}^{rs} du^{\bar{r}} du^{\bar{s}} + du^r du^s) = 0\,; \tag{30}$$

la (30) rappresenta un sistema di ∞^{q_1-1} coni; se $q_1 \leq m-1 (q \geq N_1 - - m + 1)$ si hanno, in generale, direzioni comuni ai q_1 coni di equazioni:

$$Q_{\bar{r}\bar{s}}^{rs} du^{\bar{r}} du^{\bar{s}} + du^r du^s = 0 \tag{31}$$

e quindi a tutti i coni del sistema (30).

D'altronde la (19), in virtù delle (29), fornisce:

$$\frac{D\lambda^i}{dt} = (Q_{\bar{r}\bar{s}}^{rs} du^{\bar{r}} du^{\bar{s}} + du^r du^s) \overset{i}{\mu}_{(rs)} + \ldots \tag{32}$$

ove non si sono scritti i termini nelle $\overset{i}{\mu}_{(r)}$.

(14) Anche la nozione di cono caratteristico può essere considerata di pertinenza degli spazi topologici (cfr. n. (11)).

Le (31) sono dunque condizioni necessarie e sufficienti affinchè nelle (32) non figurino i vettori $\overset{i}{\mu}_{(rs)}$, ossia affinchè $\frac{D\lambda^i}{dt}$ sia combinazione lineare dei vettori $\overset{i}{\mu}_{(r)}$ unicamente; quindi:

le direzioni comuni ai coni rappresentati con le (31), *sono direzioni tangenti a curve (della* V_m*) la cui giacitura osculatrice appartiene alla giacitura tangente alla* V_m: per questo le direzioni in questione possono dirsi *direzioni asintotiche* e le curve aventi in ogni loro punto come direzione tangente una direzioni asintotica, curve *quasi-asintotiche* $\gamma_{1,2}$ (semplicemente *asintotiche* quando $m = 2$).

Se $q_1 = 1$, si ottiene un cono di direzione asintotiche ossia il *cono asintotico* già nominato al termine del n. precedente.

OSSERVAZIONE. Sia $\overset{(p)}{\nu_i}$ uno degli $n - m$ vettori covarianti (linearmente indipendenti) pseudo-ortogonali alla V_m; allora è:

$$\overset{(p)}{\nu_i}\,\overset{i}{\mu}_{(r)} = 0\,; \quad (p = 1,\ 2, \dots n - m\,;\ r = 1,\ 2, \dots m) \tag{33}$$

per derivazione (rispetto a Γ) lungo la curva C (di V_m), dalla (33) si ottiene:

$$\overset{(p)}{\nu}_{i,j}\frac{dx^j}{dt}\overset{i}{\mu}_{(r)} + \overset{(p)}{\nu_i}\,\overset{i}{\mu}_{(rs)}\frac{du^s}{dt} = 0,$$

da cui, moltiplicando per $\frac{du^r}{dt}$ e sommando, segue:

$$\overset{(p)}{\nu}_{i,j}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} + \overset{(p)}{\nu_i}\,\overset{i}{\mu}_{(rs)}\frac{du^r}{dt}\frac{du^s}{dt} = 0. \tag{34}$$

Dalla (34) si deduce, in particolare, che le direzioni per cui:

$$\overset{(p)}{\nu}_{i,j}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0, \tag{35}$$

sono anche tali da rendere soddisfatte le

$$\overset{(p)}{\nu_i}\,\overset{i}{\mu}_{(rs)}\frac{du^r}{dt}\frac{du^s}{dt} = 0 \tag{36}$$

e *viceversa*.

Ma le (36), se valgono le (29), possono scriversi come segue:

$$\overset{(p)}{\nu_i}\,\overset{i}{\mu}_{(rs)}\left(Q^{rs}_{\cdot\cdot\,rs}\frac{d\bar{u}^r}{dt}\frac{d\bar{u}^s}{dt} + \frac{du^r}{dt}\frac{du^s}{dt}\right) = 0\,; \tag{36'}$$

è dunque chiaro che le eventuali direzioni asintotiche (cfr. (31), (36')) della V_m sono anche date dal sistema (35) ($p=1, 2, \dots n-m$); d'altronde le (35) complessivamente dicono che: *la giacitura ottenuta derivando (rispetto a* Γ) *la* (n—m)-*giacitura pseudo-ortogonale alla* V_m *lungo la curva* C, *è pseudo-ortogonale alla curva stessa se e soltanto se* C *è una quasi-asintotica* $\gamma_{1,2}$.

Se, in particolare, è: $m=n-1 (p=1)$, le equazioni (35) si riducono ad una soltanto; se poi si aggiunge l'ipotesi che X_n sia una varietà a connessione affine, l'equazione in questione viene a coincidere con quella utilizzata da EISENHART per rappresentare le « asintotiche » di un'ipersuperficie: la proprietà, della quale lo EISENHART si serve per introdurre le curve che egli chiama « asintotiche », è appunto quella della « pseudo-ortogonalità » ora messa in evidenza. [15]

7. Aggiungiamo ancora qualche considerazione relativamente al caso $m=2$; mutando per comodità alcune notazioni, il sistema (22) (con $q=1$) può essere scritto come segue:

$$(37) \qquad A\overset{i}{\mu}_{(11)} + 2B\overset{i}{\mu}_{(12)} + C\overset{i}{\mu}_{(22)} + M^1\overset{i}{\mu}_{(1)} + M^2\overset{i}{\mu}_{(2)} = 0$$

od anche:

$$(37') \qquad A(\partial_{11}x^i + \overset{i}{\Gamma}_{hk}\partial_1 x^h \partial_1 x^k) + 2B(\partial_{12}x^i + \overset{i}{\Gamma}_{hk}\partial_1 x^h \partial_2 x^k) +$$
$$+ C(\partial_{22}x^i + \overset{i}{\Gamma}_{hk}\partial_2 x^h \partial_2 x^k) + M^1\partial_1 x^i + M^2\partial_2 x^i = 0:$$

le superficie soluzioni del sistema (37) (o (37')) risultano ovviamente l'analogo delle superficie della *specie* Φ *di C. Segre,* [16] e per tal motivo si potranno chiamare *superficie* Φ *di* X_n.

Il luogo (28) rappresenta ora la coppia di direzioni (della giacitura tangente) che corrispondono alle soluzioni dell'equazione:

$$(28') \qquad C(du^1)^2 - 2Bdu^1du^2 + A(du^2)^2 = 0$$

per cui, nell'ipotesi: $B^2 - AC \neq 0$:

le coppie di direzioni tangenti alle sezioni di una superficie Φ *con le varietà* V_{n-1} *formate da autoparallele e tangenti alla* Φ, *sono coniugate in un'involuzione avente per direzioni doppie quelle date dalla* (28').

[15] Cfr. l. c. (5), pp. 150-163. Si noti che su una V_m assegnata esistono quasi - asintotiche $\gamma_{1,2}$ se:

$$m+1 \leq n \leq 2m-1.$$

[16] Cfr. l c. (4).

Le direzioni fornite dalla (28′) si diranno: *direzioni caratteristiche* della superficie Φ di X_n; il doppio sistema formato dalle linee integrali della (28′) sarà, di conseguenza, *il doppio sistema di linee caratteristiche.* ([17])

Scelte le linee caratteristiche come linee parametriche, alle equazioni del sistema (37) si può dare la forma canonica seguente:

$$\overset{i}{\mu}_{(12)} = \overset{1}{M}\overset{i}{\mu}_{(1)} + \overset{2}{M}\overset{i}{\mu}_{(2)}\,; \quad ([18]) \tag{38}$$

in base alla (38) si ha pure la seguente caratterizzazione delle linee caratteristiche:

il (vettore) derivato, rispetto a Γ, del vettore tangente ad una linea caratteristica lungo l'altra linea caratteristica (passante per il punto considerato), appartiene alla giacitura tangente alla superficie.

Se poi la superficie soddisfa a due sistemi del tipo considerato ($q = 2$), le direzioni tangenti alle curve sezioni della superficie con le V_{n-1} prima considerate sono fisse e, conformemente ad una precedente affermazione, trattasi delle direzioni asintotiche; scelte come linee parametriche le linee asintotiche, le equazioni dei due sistemi assumono la forma:

$$\overset{i}{\mu}_{(11)} = M_1^r \overset{i}{\mu}_{(r)}, \qquad \overset{i}{\mu}_{(22)} = M_2^r \overset{i}{\mu}_{(r)}\,; \tag{39}$$

le (39) pongono bene in evidenza che la 2 - giacitura osculatrice alle linee asintotiche coincide con la giacitura tangente alla superficie: è così confermata, nel caso in questione, la proprietà già stabilita al n. precedente ed utilizzata dal BOMPIANI per introdurre le asintotiche delle superficie di X_3. ([19])

([17]) Se $B^2 - AC = 0$ i due sistemi vengono a coincidere in un unico sistema di asintotiche.

([18]) M^r sono degli invarianti della (38); se $M^2 = 0$ si ha che il vettore μ_1^i tangente alla linea u^1 viene trasportato parallelamente (per mezzo della connessione Γ) lungo la linea u^2: analogamente se $M^1 = 0$.

Se $M^1 = M^2 = 0$ il trasporto per parallelismo (di cui si è detto) avviene sia lungo la u^1 che lungo la u^2: in tal caso, se si fa l'ipotesi che X_n sia uno spazio Riemanniano la cui connessione sia la Γ, le linee u^1, u^2 risultano coniugate nel senso di BOMPIANI (cfr.: *Surfaces de translation et surfaces minima dans les espaces courbes.* «Comptes rendus», vol. 169, (1919), pp. 840-843).

([19]) I sistemi (39), considerati in X_3, sono quelli già incontrati da E. BOMPIANI (l. c. (1), nota V) ed utilizzati per estendere, con ricorso a sistemi assiali di curve, le applicabilità proiettive di FUBINI.

8. Per introdurre la *giacitura* 3 - *osculatrice* alla varietà V_m (utilizzando 3 - giaciture osculatrici alle curve della V_m uscenti da un suo punto), associamo alle (18''), (19), l'espressione che dà il vettore $\frac{D^2\lambda^i}{dt^2}$ derivato 2° (lungo la curva C e rispetto a Γ) del vettore λ^i tangente a C; abbiamo:

$$\frac{D^2\lambda^i}{dt^2} = \overset{i}{\mu}_{(rsl)} \frac{du^r}{dt} \frac{du^s}{dt} \frac{du^l}{dt} + 3\overset{i}{\mu}_{(rs)} \frac{d^2u^r}{dt^2} \frac{du^s}{dt} + \overset{i}{\mu}_{(r)} \frac{d^3u^r}{dt^3} \tag{40}$$

$(r,\ s,\ l = 1,\ 2,\ \dots m)$

essendo

$$\overset{i}{\mu}_{(rsl)} = \frac{D\overset{i}{\mu}_{(rs)}}{\partial u^l} \qquad (\overset{i}{\mu}_{(rsl)} = \overset{i}{\mu}_{(srl)})$$

il vettore derivato di $\overset{i}{\mu}_{(rs)}$ lungo la linea u^l, ossia il vettore che risulta così espresso:

$$\begin{aligned} \overset{i}{\mu}_{(rsl)} &= \partial_{rsl}x^i + (\partial_p\Gamma^i_{hk} + \Gamma^i_{pm}\Gamma^m_{hk})\partial_r x^h \partial_s x^k \partial_l x^p + \\ &+ \Gamma^i_{hk}\partial_r x^h \partial_{sl} x^k + \Gamma^i_{hk}\partial_s x^h \partial_{lr} x^k + \Gamma^i_{hk}\partial_l x^h \partial_{rs} x^k; \end{aligned} \tag{41}$$

il vettore $\overset{i}{\mu}_{(rsl)}$, oltre ad essere simmetrico rispetto ai primi due indici, è tale da rendere soddisfatta la seguente relazione:

$$\overset{i}{\mu}_{(rsl)} - \overset{i}{\mu}_{(rls)} = B^i_{hpk}\partial_r x^h \partial_s x^p \partial_l x^k \tag{42}$$

come risulta applicando la (41).

In base alla (42) possiamo rilevare che si ha:

$$\overset{i}{\mu}_{(rsl)} = \mu_{(rls)}$$

se

$$B^i_{hpk} = 0$$

per cui: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'operazione di derivazione (lungo linee della* V_m*) espressa da* $\overset{i}{\mu}_{(rsl)}$ *non dipenda dalla successione degli indici, è che* Γ *sia una connessione euclidea.*

Posto ora:

$$\overset{i}{\nu}_{(rsl)} = \frac{1}{3}(\overset{i}{\mu}_{(rsl)} + \overset{i}{\mu}_{(lrs)} + \overset{i}{\mu}_{(slr)}) \tag{43}$$

ed osservato che i vettori $\overset{i}{\nu}_{(rsl)}$ risultano in totale: $\binom{m+2}{3}$, possiamo procedere senz'altro, in base alla (40), all'enunciazione dei fatti seguenti:

le 3 - giaciture osculatrici alle curve della V_m *uscenti da un punto* P, *variano nella giacitura dei vettori* (43) *e di tutti quelli che intervengono nella determinazione della giacitura* 2 - *osculatrice; la dimensione della giacitura così ottenuta, da dirsi giacitura* 3 - *osculatrice alla* V_m *in* P, *è, in generale :* $\binom{m+3}{3} - 1$.

Le 3 - giaciture osculatrici alle curve di V_m aventi una stessa tangente (in P), variano nella giacitura di dimensione $\frac{m(m+3)}{2} + 1$ individuata dai vettori:

$$\overset{i}{\mu}_{(r)}, \quad \overset{i}{\mu}_{(rs)}, \quad \overset{i}{\nu}_{(rsl)} \frac{du^r}{dt} \frac{du^s}{dt} \frac{du^l}{dt}$$

ed al variare della tangente, le giaciture suddette danno luogo ad un cono (*di dimensione* 3m) *avente come « giacitura vertice » la giacitura* 2 - *osculatrice.*

Naturalmente la dimensione della giacitura 3 - osculatrice non presenta il valore (massimo) dianzi precisato, se tra i vettori che la individuano intercedono delle relazioni lineari del tipo seguente:

$$N^{rsl}\overset{i}{\nu}_{(rsl)} + M^{rs}\overset{i}{\mu}_{(rs)} + M^{r}\overset{i}{\mu}_{(r)} = 0 \tag{44}$$

essendo N^{rsl}, M^{rs}, M^r dei coefficienti funzioni di $u^1, u^2, \ldots u^m$: in tal caso la V_m risulta soluzione di tanti sistemi di equazioni differenziali quante sono le relazioni (44), e di altrettante unità avviene la riduzione della dimensione della relativa giacitura 3 - osculatrice (in un suo punto generico).

I sistemi del tipo (44) possono essere facilmente scritti per disteso (usando le derivate parziali delle x^i) per mezzo delle (18), (19'), (41), (43).

Quando $m = 2$ e le relazioni del tipo (44) sono una soltanto, si ottengono superficie soluzioni di un sistema al quale conviene dare la forma (i puntini indicano termini nelle $\overset{i}{\mu}_{(rs)}$, $\overset{i}{\mu}_{(r)}$):

$$A\overset{i}{\nu}_{(111)} + 3B\overset{i}{\nu}_{(112)} + 3C\overset{i}{\nu}_{(122)} + D\overset{i}{\nu}_{(222)} + \ldots = 0. \tag{45}$$

Al riguardo si ha che:

le superficie soluzioni del sistema (45) *posseggono tre sistemi di linee* *caratteristiche*; *esse sono le linee integrali dell'equazione differenziale seguente*:

$$(46) \qquad A(du^2)^3 - 3B(du^2)^2du^1 + 3C(du^1)^2du^2 - D(du^1)^3 = 0\,;$$

infatti, sfruttando ancora il procedimento già seguito al n. 5 e adattandolo al caso che interessa (che dà luogo soltanto a maggiori complicazioni nei calcoli sui quali, del resto, non intendiamo soffermarci) ([20]), si può provare che:

le tre direzioni tangenti alla curva sezione della superficie V_2 *con una qualsiasi* V_{n-1} *formata da autoparallele e tangente ad una* (n — 1) - *giacitura contenente la giacitura* 2 - *osculatrice alla* V_2, *sono date da*:

$$(46') \qquad a_i\nu^i_{(rsl)}du^r du^s du^l = 0$$

che, quando la superficie è soluzione del sistema (45), *risultano apolari alla terna determinata dalla* (46).

É quindi ovvio che con particolari scelte delle linee coordinate si possono conseguire delle semplificazioni nella forma del sistema (45).

Osservazione. Lo studio degli intorni del 2° e del 3° ordine (dei punti di una varietà di X_n) si può dunque agevolmente condurre sfruttando il procedimento di derivazione lungo linee della V_m in modo da conservare, come provano gli sviluppi precedenti, una stretta analogia, anche formale, nei confronti di quanto avviene in uno spazio proiettivo ordinario.

Naturalmente uno studio degli intorni di ordine superiore al 3° — studio del quale qui non ci occuperemo — porta inevitabilmentead una minor analogia tra gli sviluppi relativi al caso attuale e quelli che si hanno nel caso ordinario e ciò a causa della constatata necessità di fare ricorso — per individuare giaciture osculatrici di dimensione > 3 — a vettori non completamente e direttamente determinabili attraverso il solito procedimento di derivazione (lungo linee). ([21])

9. Diamo infine un saggio circa il modo di utilizzare gli enti introdotti nella trattazione (in uno spazio proiettivo curvo) di un altro gruppo di questioni proprie della geometria differenziale di uno S_n proiettivo.

([20]) Si tenga anche presente il contenuto della nota (13) e, per avere la (43'), lo si estenda al caso delle 3 - giaciture osculatrici aggiungendo, alle $a_iM^i_{(r)}=0$ le condizioni: $a_iM^i_{(rs)}=0$ di evidente significato geometrico.

([21]) Cfr. n. 3

Supponiamo $n = 5$, $m = 2$ e procediamo alla determinazione dell'equazione differenziale di quei sistemi di linee che (per analogia con il caso ordinario) chiameremo « *linee principali* » di una superficie di X_5.

Indichiamo, come di consueto, con C la curva descritta dal punto $x^i(t)$ e con λ^i il vettore tangente a C; detto $a^i(t)$ un generico vettore funzione del parametro t, consideriamo la seguente funzione:

$$f(dt) = | \; x^i(t+dt) - x^i \quad \lambda^i(t) \quad a^i(t) \quad \lambda^i(t+dt) \quad a^i(t+dt) \; | \tag{47}$$

e definiamo:

ordine di dipendenza lineare (*lungo* C) *della* 2 - *giacitura determinata da* $\lambda^i(t+dt)$, $a^i(t+dt)$, *rispetto a quella dei vettori* $\lambda^i(t)$, $a^i(t)$, *l'ordine di infinitesimo della* $f(dt)$ *allorchè* dt *è considerato quale infinitesimo principale.*

Se si fa riferimento alle cose dette ai nn. 2, 3, si riconosce tosto che, a meno di infinitesimi di ordine superiore al 1°, al 2° ed al 3° rispettivamente, valgono le

$$a^i(t+dt) = a^i(t) + \frac{Da^i}{dt}\,dt, \tag{48}$$

$$\lambda^i(t+dt) = \lambda^i(t) + \frac{D\lambda^i}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{D^2\lambda^i}{dt^2}\,dt^2, \tag{49}$$

$$x^i(t+dt) - x^i(t) = \lambda^i dt + \frac{1}{2}\frac{D\lambda^i}{dt}\,dt^2 + \frac{1}{3!}\frac{D^2\lambda^i}{dt^2}\,dt^3; \tag{50}$$

trascurando gli infinitesimi di ordine > 5, la (47) per effetto delle (48), (49), (50), dà luogo alla

$$f(dt) = \frac{1}{2}\left| \lambda^i \quad \frac{D\lambda^i}{dt} \quad \frac{D^2\lambda^i}{dt^2} \quad a^i \quad \frac{Da^i}{dt} \right| dt^5; \tag{47'}$$

si trova così che l'ordine di dipendenza lineare per le giaciture considerate è generalmente 5. ([22])

Esistono però curve per le quali la dipendenza lineare in questione si presenta di ordine superiore al 5°: si tratta delle curve per cui è

$$\left| \lambda^i \quad \frac{D\lambda^i}{dt} \quad \frac{D^2\lambda^i}{dt^2} \quad a^i \quad \frac{Da^i}{dt} \right| = 0. \tag{51}$$

([22]) Se nella (47) in luogo di λ^i si introduce un generico vettore $b^i(t)$, il corrispondente ordine di dipendenza lineare risulta generalmente 3.

Si supponga la cuva C tracciata su una superficie di X_5; valgono allora le (18″), (19), (40) con $m = 2$, $n = 5$; se inoltre si pone:

$$a^i = \overset{i}{\mu}_{(1)}, \quad \frac{Da^i}{dt} = \overset{i}{\mu}_{(1s)} \frac{du^s}{dt}, \qquad (s = 1, 2)$$

la 2 – giacitura dei vettori a^i, λ^i, risulta tangente alla superficie e la (51) conduce immediatamente alla:

$$\left| \overset{i}{\mu}_{(1)} \; \overset{i}{\mu}_{(2)} \; \overset{i}{\mu}_{(1s)} \frac{du^s}{dt} \; \overset{i}{\mu}_{(2s)} \frac{du^s}{dt} \; \overset{i}{\nu}_{(rsl)} \frac{du^r}{dt} \frac{du^s}{dt} \frac{du^l}{dt} \right| = 0. \tag{52}$$

In base alla (52) si vede così che:

per ogni punto di una superficie di X_5 *si hanno* 5 *curve tali da rendere superiore a* 5 *l'ordine di dipendenza lineare relativo a giaciture tangenti alla superficie in due punti « successivi » di ciascuna di esse.*

Le linee integrali dell'equazione differenziale (52) sono le *linee principali cercate esistenti su una generica superficie di* X_5.

Attraverso l'equazione delle linee principali, in virtù del contenuto dei nn. precedenti, appare immediata la validità dei fatti seguenti i quali fanno riscontro ad altri ben noti validi nel caso di uno spazio proiettivo S_5:

1) *ogni curva di una superficie di* X_5 *avente in ogni suo punto giacitura osculatrice stazionaria, è una linea principale;*

2) *le linee caratteristiche di una superficie* Φ *di* X_5 *sono linee principali*;

3) *ogni superficie di* X_5 *che sia soluzione di due sistemi di equazioni differenziali di tipo* (39), *ha linee principali indeterminate.*

Da notare infine che l'equazione (52) potrebbe farsi derivare da considerazioni ispirate a concetti di minor generalità: con un procedimento analogo a quello classico si potrebbe infatti introdurre la nozione di « direzione tacnodale » e, suo tramite, raggiungere facilmente lo scopo.