Bollettino
Unione Matematica Italiana

Marziano Marziani

Sull'energia irradiata da un dipolo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.2, p. 117–123.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_2_117_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sull'energia irradiata da un dipolo.

Nota di MARZIANO MARZIANI (a Ferrara) (*)

Sunto. - *Si calcola col metodo delle condizioni al contorno approssimate il valore dell'ene gia irradiata da un dipolo in presenza di una terra piana a conduttività finita e si confronta poi tale valore con quello trovato da A. Sommerfeld.*

1. Lo studio dell'effetto della terra sulla propagazione delle radio-onde è stato iniziato da A. SOMMERFELD nel 1909 e sviluppato poi attraverso l'opera di vari Autori. Recentemente la questione è stata ripresa per quanto concerne l'uso di certe condizioni al contorno approssimate stabilite da ricercatori russi (LEONTOVITCH, ALPERT, PANUTCH, ecc.) [1] e che D. GRAFFI [2] ha mostrato essere equivalenti alle condizioni di S. A. SCHELKUNOFF [3] già introdotte nella teoria della propagazione guidata delle onde elettromagnetiche. Le condizioni di SCHELKUNOFF tengono conto nel problema che ora ci interessa della imperfetta conduttività della terra, esprimendo un legame fra i componenti tangenziali $\boldsymbol{E}_t$ e $\boldsymbol{H}_t$ del vettore elettrico $\boldsymbol{E}$ e di quello magnetico $\boldsymbol{H}$ sulla superficie σ della terra. Più precisamente, supposta la costante dielettrica complessa ε' della terra grande in modulo rispetto alla costante dielettrica dell'atmosfera, si può ritenere soddisfatta su σ la seguente condizione approssimata:

$$\boldsymbol{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\, \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_t \tag{1}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 16 aprile 1961.

(1) Per una esposizione di tali condizioni al contorno approssimate si veda ad es. G. BOUDOURIS, *Une nouvelle solution du problême de propagation au-dessus d'une terre plane*, « Suppl. Nuovo Cimento », V (1957), pp. 71-91. Si veda anche dello stesso Autore il libro *Propagation tropospherique* », Centre de documentation universitaire, Paris, 1957.

(2) D. GRAFFI, *Sulle condizioni al contorno approssimate dell'elettromagnetismo*, « Atti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Rend. serie XI, t. V (1958), pp. 88-94.

(3) S. A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic waves*, Van Nostrand, New York, 1943, p. 320.

dove $\boldsymbol{k}$ è il versore normale alla superficie terrestre orientato verso l'atmosfera, μ la permeabilità della terra (che supporremo uguale a quella dell'atmosfera), $\varepsilon' = \varepsilon + i\gamma/\omega$ (ε e γ sono al solito la costante dielettrica e la conduttività della terra, ω la pulsazione del campo elettromagnetico, i l'unità immaginaria).

Se ora, come nella teoria delle guide d'onda ([4]), si ammette che non porti praticamente differenza sostituire nella relazione approssimata (1) al valore effettivo di $\boldsymbol{H}_t$ quello che tale componente avrebbe nell'ipotesi della perfetta conduttività, il valore di $\boldsymbol{E}_t$ che ne risulta consente di determinare $\boldsymbol{E}$ nella regione occupata dall'atmosfera senza dover considerare quanto avviene all'interno della terra.

In questa nota mi propongo di mostrare che il valore dell'energia irradiata da un dipolo in presenza di una terra a conduttività finita, calcolato facendo uso di tale valutazione approssimata del campo elettromagnetico, s'identifica con quello ottenuto dal SOMMERFELD mediante approssimazioni semplificatrici della soluzione esatta del problema ([5]). Il metodo delle condizioni al contorno approssimate appare così soddisfacente anche in questo caso e suscettibile di ulteriori applicazioni.

2. Prendiamo in considerazione un dipolo elettrico di HERTZ verticale (schematizzazione di un elemento di antenna trasmittente), situato in un punto $A(0, 0, h)$ con $h > 0$ dell'atmosfera, supposta la terra omogenea e coincidente la sua superficie σ col piano xy. Il campo elettromagnetico armonico $e^{-i\omega t}\boldsymbol{E}$, $e^{-i\omega t}\boldsymbol{H}$ che si genera nasce dalla sovrapposizione del campo primario e di quello indotto e soddisfa nell'atmosfera alle equazioni di MAXWELL

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= i\omega\mu \boldsymbol{H} \end{aligned}$$

(ε_0 essendo la costante dielettrica dell'atmosfera) ([6]) e verifica su σ alle condizioni al contorno (1) di SCHELKUNOFF. Com'è noto $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$

([4]) Cfr. ad es. G. TORALDO DI FRANCIA, *Onde elettromagnetiche,* Zanichelli. Bologna, 1953, p. 232.

([5]) Cfr. A. SOMMERFELD, *Partial differential equations in physics,* Academic Press Inc., New York, 1949, p. 270 e segg.

([6]) Si può ritenere che le (2) valgano anche nel dominio (peraltro molto piccolo) occupato dal dipolo purchè si aggiunga al secondo membro della prima di tali equazioni il vettore $\boldsymbol{j}$ rappresentante la densità di corrente che percorre il dipolo.

derivano attraverso le relazioni

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \text{grad div}\,\Pi + k_0^2\Pi \\ \boldsymbol{H} &= -i\omega\varepsilon_0 \,\text{rot}\,\Pi \end{aligned}$$

dal vettore

$$\Pi = \Pi \boldsymbol{k} \qquad (\boldsymbol{k} \text{ versore dell'asse } z)$$

ove Π è la somma della funzione di HERTZ

$$\text{(4)} \qquad \Pi_0 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^{ik_0r_0}}{r_0}$$

del campo primario e di quella Π_1 del campo indotto. Nella (4) si è indicato con p il momento elettrico del dipolo, con k_0 il numero d'onda nell'atmosfera uguale a $\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu}$, infine con r_0 la distanza fra A e il generico punto P_0 dell'atmosfera (ricevitore) dove si valuta il campo.

Ora, se la terra è perfettamente conduttrice, il campo magnetico è in ogni punto dell'atmosfera la somma del campo magnetico del dipolo posto in $A(0, 0, h)$ e di quello di un dipolo uguale posto in $A_1(0, 0, -h)$ (7). Esso deriva dunque dalla funzione di HERTZ

$$\text{(5)} \qquad \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^{ik_0r_0}}{r_0} + \frac{e^{ik_0r_1}}{r_1}\right)$$

r_1 essendo la distanza fra A_1 e il punto che si considera. Introdotto quindi il sistema di coordinate cilindriche (ρ, φ, z) con origine e asse z coincidenti con quelli del riferimento cartesiano, la componente tangenziale del vettore magnetico in un punto $P(\rho, \varphi, 0)$ di σ risulta

$$\text{(6)} \qquad H_t(P) = H_\varphi(P) = 2i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^{ik_0r_1}}{r_1}\right)$$

essendo in questo caso $r_0 = r_1$, mentre è nulla la componente tangenziale del vettore elettrico. Quando invece la terra è imperfettamente conduttrice, tale componente del vettore elettrico è diversa da zero, ed assunta la (6) come espressione approssimata

(7) Cfr. A. SOMMERFELD, loc. cit. p. 243.

di H_t nel caso in questione, si avrà per la (1) in $P(\rho, \varphi, 0)$

$$E_t(P) = E_\rho(P) = -\frac{2ik_0}{n}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0r_1}}{r_1}\right) \tag{7}$$

ove $n = \sqrt{\varepsilon'/\varepsilon_0}$ è l'indice complesso di rifrazione della terra.

I valori della (7) determinano nel semispazio $z > 0$ occupato dall'atmosfera il campo elettromagnetico regolare che, a causa della conduttività finita della terra, si aggiunge a quello derivante dalla funzione di HERTZ (5). In particolare, il valore assunto in un generico punto P_0 del semispazio suddetto dal vettore elettrico $\boldsymbol{E}'$ di tale campo aggiuntivo risulta [8]:

$$\boldsymbol{E}'(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{rot}_{P_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0r}}{r}(\boldsymbol{E}_t \wedge \boldsymbol{k})d\sigma \tag{8}$$

ove $\boldsymbol{E}_t$ è dato dalla (7) e r è la distanza di P_0 dal punto P variabile su σ.

[8] Il vettore $\boldsymbol{E}'$ è privo di singolarità nel semispazio $z \geq 0$ e in conseguenza delle equazioni di MAXWELL soddisfa all'equazione delle onde

$$\Delta\boldsymbol{E}' + k_0^2\boldsymbol{E}' = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Se si suppone che $\boldsymbol{E}'$ verifichi all'infinito a condizioni di radiazione, allora (cfr. ad es. B. B. BAKER e E. T. COPSON, *The mathematical theory of Huygens' principle*, Clarendon Press, Oxford, 1950, pp. 157-158) ciascuna delle sue componenti E'_x ed E'_y espressa mediante i rispettivi valori assunti su σ risulta in ogni punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 > 0$:

$$E'_x(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0r}}{r}E_x d\sigma$$

$$E'_y(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0r}}{r}E_y d\sigma.$$

E poichè $\operatorname{div}\boldsymbol{E}' = 0$, la componente E'_z soddisferà all'equazione

$$\frac{\partial E'_z}{\partial z_0} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0r}}{r}E_x d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0r}}{r}E_y d\sigma\right)$$

donde

$$E'_z(P_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0r}}{r}E_x d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0r}}{r}E_y d\sigma\right).$$

La (8) compendia vettorialmente tali risultati.

3. Considerando ora l'energia totale (media per periodo) irradiata dal dipolo

$$W = S_+ - S_-$$

somma dell'energia S_+ effettivamente irradiata nell'atmosfera e dell'energia $-S_-$ assorbita dalla terra ([9]). si ha, com'è noto, la seguente relazione ([10])

$$W = -\frac{I_0 l}{2} \operatorname{Re} \{ E_z(A) \}$$

ove Re denota la parte reale del numero complesso in parentesi, l la lunghezza del dipolo, I_0 l'intensità della corrente che lo percorre. Allora, poichè si conosce il valore dell'energia dovuta al campo primario ([11]), ci si può limitare a considerare il contributo del campo indotto e, ricordando i risultati del paragrafo precedente, affermare che *il contributo del campo indotto nell'espressione dell'energia totale irradiata uguaglia* (a parte il fattore $-I_0 l/2$) *la somma dei valori reali assunti in A dalla componente verticale del vettore elettrico* (riflesso) *derivante dalla funzione di Hertz* $\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}$ *e dalla componente verticale del vettore elettrico* (8) *dovuto alla conduttività finita della terra.*

4. Resta ora da confrontare il risultato che abbiamo ottenuto con quello stabilito dal SOMMERFELD e a tal fine sarà sufficiente esaminare il contributo portato dalla componente verticale del vettore elettrico $\boldsymbol{E}'$. Questa è data, per la (8) e la (7) in un punto

([9]) Ricordiamo che S_+ e S_- uguagliano i valori dell'integrale

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_\Sigma \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}^* \times \boldsymbol{k} d\Sigma \right)$$

(ove $\boldsymbol{H}^*$ è il coniugato del vettore $\boldsymbol{H}$) quando si prendano per Σ rispettivamente i piani σ_+ (di equazione $z = h + \delta$) e σ_- (di equazione $z = h - \delta$) con $\delta \to 0_+$.

([10]) Noi ammettiamo (a differenza del SOMMERFELD) di scegliere l'origine dei tempi in modo da rendere uguale a zero la fase iniziale della corrente (e quindi j reale) (cfr. A. SOMMERFELD, loc. cit., pp. 327-328.

([11]) Cfr. ad es. S. A. SCHELKUNOFF, loc. cit. p. 133.

generico $P_0(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ con $z_0 > 0$ dalla relazione:

$$E'_z(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{2ik_0}{n}\operatorname{div}_{P_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0 r}}{r}\operatorname{grad}_\sigma\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right)d\sigma$$

$$\left(\operatorname{grad}_\sigma = \frac{\partial}{\partial\rho}\operatorname{grad}\rho\right)$$

dalla quale, derivando rispetto a z_0, si trae [12]:

$$\frac{\partial E'_z(P_0)}{\partial z_0} = \frac{2ik_0}{n}\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\Delta_2\left(\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right) \tag{9}$$

$$\left(\Delta_2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\rho_0}\left(\rho_0\frac{\partial}{\partial\rho_0}\right)\right).$$

D'altra parte, poichè com'è noto [13]

$$\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1} = \int_0^{+\infty} J_0(\lambda\rho_0)\frac{e^{-\eta|z_0+h|}}{\eta}\lambda d\lambda$$

con J_0 funzione di BESSEL di ordine zero e $\eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2_0}$, sostituendo nella (9) e ricordando che $\Delta_2 J_0(\lambda\rho_0) = -\lambda^2 J_0(\lambda\rho_0)$, si avrà:

$$\frac{\partial E'_z(P_0)}{\partial z_0} = -\frac{2ik_0}{n}\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+\infty} J_0(\lambda\rho_0)\frac{e^{-\eta(z_0+h)}}{\eta}\lambda^3 d\lambda$$

(12) Dalla formula:

$$F(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0 r}}{r}F(P)d\sigma$$

che rappresenta nel semispazio $z_0 > 0$ ogni soluzione F dell'equazione delle onde mediante i valori da essa assunti sul piano σ (cfr. B. B. BAKER e E. T. COPSON, loc. cit. in nota (8)) si ha infatti:

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\int_\sigma \frac{e^{-ik_0 r}}{r}\operatorname{grad}_\sigma\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right)d\sigma = \frac{\partial}{\partial\rho_0}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0 r_1}}{r_1}\right)\operatorname{grad}\rho_0.$$

(13) Cfr. ad es. A. SOMMERFELD, loc. cit., p. 242, oppure A. N. TYCHONOFF e A. A. SAMARSKI, *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959, pp. 580-581.

donde

$$E'_z(P_0) = \frac{2ik_0}{n} \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z_0}^{+\infty} d\zeta \int_0^{+\infty} J_0(\lambda\rho_0) \frac{e^{-\eta(\zeta+h)}}{\eta} \lambda^3 d\lambda =$$

$$= \frac{2ik_0}{n} \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{+\infty} J_0(\lambda\rho_0) \frac{e^{-\eta(z_0+h)}}{\eta^2} \lambda^3 d\lambda.$$

Si ottiene così, per $\rho_0 = 0$ e $z_0 = h$, la seguente espressione:

(10) $$E'_z(A) = \frac{2ik_0}{n} \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\eta h}}{\eta^2} \lambda^3 d\lambda$$

che coincide con quella che può dedursi dal risultato del SOMMERFELD per $|n|$ sufficientemente grande ([14]). Il valore dell'energia irradiata dal dipolo trovato da tale Autore s'identifica dunque (nei limiti delle dette approssimazioni) con quello da noi stabilito col metodo delle condizioni al contorno approssimate.

([14]) Il termine che nell'espressione esatta dell'energia irradiata rappresenta il contributo della conduttività finita della terra è infatti, con le nostre notazioni, (cfr. A. SOMMERFELD, loc. cit., p. 279, formula (23)):

$$\frac{1}{8\pi} \frac{l^2}{k_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\, I_0^2 \,\mathrm{Re} \left\{ i \int_0^{+\infty} \frac{2\eta_E}{n^2\eta + \eta_E} \frac{e^{-2\eta h}}{\eta} \lambda^3 d\lambda \right\}$$

con

$$\eta_E = \sqrt{\lambda^2 - n^2 k^2_0}$$

ed esso diventa quando $|n|$ è abbastanza grande $\Big($ricordando che $\frac{iI_0 l}{\omega} = p$: e trascurando, come fa il SOMMERFELD, η_E nei confronti di $n^2\eta$ e λ^2 nei confronti di $n^2 k^2_0\Big)$

$$-\frac{I_0 l}{2} \mathrm{Re} \left\{ \frac{2ik_0}{n} \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\eta h}}{\eta^2} \lambda^3 d\lambda \right\}$$

conforme a quanto risulta dalla sostituzione della nostra (10) nell'espressione di W. Si potrebbe del resto dimostrare, ma su ciò non insisteremo, che la funzione di HERTZ Π' da cui deriva E' vale nel semispazio $z > 0$

$$\Pi'(P_0) = \frac{2ik_0}{n} \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \int_h^{+\infty} \frac{e^{ik_0 R}}{R} dh'$$

con $R = \sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + h')^2}$ in pieno accordo con quanto trovato dal SOMMERFELD (loc. cit., p. 250, formula 10 d).