BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIORGIO FERRERO

Una particolare soluzione stazionaria della magnetofluidodinamica relativa ad una massa fluida cilindrica indefinita uniformemente rotante e soggetta alla propria gravitazione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.1, p. 68–74.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_1_68_0>

Una particolare soluzione stazionaria della magnetofluidodinamica, relativa ad una massa fluida cilindrica indefinita uniformemente rotante e soggetta alla propria gravitazione.

Nota di GIORGIO FERRERO (a Torino) (*)

Sunto. - *In questo lavoro si considera una soluzione particolare delle equazioni della magnetofluidodinamica relativa ad una massa fluida cilindrica circolare indefinita, di elevata conduttività elettrica (da poterla ritenere infinita), soggetta alla propria gravitazione e rotante intorno ad un asse, soluzione che può interessare la cosmogonia. Gli elementi che intervengono si ritengono indipendenti dal tempo.*

Supponendo che il campo magnetico sia diretto assialmente, la questione viene ridotta alla determinazione della densità, con la condizione che si annulli in superficie (ove finisce la massa fluida) ed essa risulta espressa mediante la funzione di BESSEL *di 1ª specie di ordine zero.*

Dopo ciò il campo magnetico viene determinato con una quadratura.

1. Trattandosi di un fluido di alta conduttività elettrica, che si comporta come un fluido perfetto, cioè la sua viscosità si può ritenere nulla, le equazioni da considerare, col ben noto significato dei simboli, nel caso in cui gli elementi che intervengono non dipendono dal tempo, ma solo dalla posizione, sono:

$$\mathrm{rot}\,(\overrightarrow{H} \wedge \overrightarrow{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{H} = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} - \frac{\mu}{4\pi\rho}\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{H} \wedge \overrightarrow{H} + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 - U\right) = 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,(\rho\overrightarrow{v}) = 0 \tag{4}$$

$$p = C\rho^{\gamma}. \tag{5}$$

In particolare μ è la permeabilità magnetica, ρ rappresenta la densità delle particelle fluide, U il potenziale delle forze d'attra-

(*) Pervenuta alla segreteria dell' U. M. I. il 23 febbraio 1961.

zione che si esercitano fra esse; C e γ sono due costanti di cui la seconda rappresenta il rapporto fra il calore specifico a pressione ed a volume costante ed è $<$ di 2.

Essendo il fluido dotato di un moto di rotazione uniforme intorno ad un asse, che scegliamo come asse z, di versore $\vec{K}$, con velocità angolare costante $\omega\vec{K}$, in riferimento a coordinate cilindriche r, φ, z, si verifica facilmente che la velocità $\vec{v}$ di una sua particella P è data da:

$$\vec{v} = \omega r^2 \operatorname{grad} \varphi. \tag{6}$$

Se inoltre supponiamo che il campo magnetico sia diretto secondo l'asse z, sia cioè:

$$\vec{H} = H\vec{K}, \tag{7}$$

l'equazione (1), in base a note proprietà del rotore, diventa

$$\operatorname{grad} H \wedge \operatorname{grad} r = 0,$$

da cui, segue che

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

Quindi l'intensità H del campo magnetico è funzione solo di r; di conseguenza la (2) è identicamente soddisfatta.

Dalla (6), in base alle proprietà della divergenza (espressa in coordinate cilindriche) si ha poi che

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

e quindi l'equazione di continuità (4), porge

$$\operatorname{grad} \rho \times \vec{v} = 0, \qquad \text{cioè} \; \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0.$$

Perciò la densità ρ e quindi, per la (5), anche la pressione p, è indipendente dall'anomalia φ.

Rimane da considerare l'equazione (3).

Ricordate la (6) e la (7), in base alle proprietà del rotore, risulta ora:

$$\text{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} = -\,\omega^2\,\text{grad}\,r^2, \qquad \text{rot}\,\vec{H} \wedge \vec{H} = -\,\frac{1}{2}\,\text{grad}\,H^2;$$

e l'equazione (3) del moto diventa:

$$\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\left(\frac{\mu H^2}{8\pi} + p\right) - \text{grad}\left(\frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 + U\right) = 0. \tag{8}$$

Poichè l'intensità H del campo magnetico e la densità ρ sono indipendenti da φ, segue dalla (8) che anche il potenziale U delle forze di mutua attrazione delle particelle fluide è indipendente da φ. Se in oltre supponiamo, per semplicità, U indipendente da z, allora, essendo H soltanto funzione di r, tutte le grandezze che figurano nella (8) dipendono solo da r.

Consideriamo la divergenza di ambo i membri della (8); in tal modo, poichè per l'equazione di Poisson è:

$$\text{div grad}\,U = \Delta_2\,U = -\,4\pi f\rho$$

dove f è la costante di gravitazione universale, si elimina il potenziale U.

Inoltre, poichè tutti i termini della (8) dipendono solo da r, per note proprietà del gradiente e della divergenza, si ha che

$$\text{div}\left[\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\left(\frac{\mu H^2}{8\pi} + p\right)\right] = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu H^2}{8\pi} + p\right)\right] \quad \text{ed essendo } \Delta_2 r^2 = 4,$$

la (8) porge:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu H^2}{8\pi} + p\right)\right] + 4\pi f\rho - 2\omega^2 = 0, \tag{9}$$

che è un'equazione in cui figurano come incognite la densità ρ e l'intensità H del campo magnetico.

2. Se cerchiamo di soddisfare la (9) ponendo

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu H^2}{8\pi}+p\right)=\omega^2 r+\frac{1}{a^2}\frac{d\rho}{dr}. \tag{10}$$

con a^2 costante, si ricava l'equazione:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho}{dr}\right)+4\pi f a^2\rho=0. \tag{11}$$

in cui l'unica incognita è la densità ρ.

Determinata la densità ρ con la condizione che essa si annulli sulla superficie del cilindro, cioè per $r=R$, la (10) fornisce successivamente l'intensità H del campo magnetico con una quadratura.

La (11) è l'equazione differenziale delle funzioni di Bessel di ordine zero, per cui

$$\rho=\rho_0 J_0(\sqrt{4\pi f}\,a r), \tag{12}$$

ove J_0 è la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero, mentre ρ_0 è una costante da determinare.

Poichè la densità ρ deve annullarsi sulla superficie del cilindro fluido, cioè per $r=R$, se indichiamo con ξ_0 il primo zero (notoriamente positivo) della J_0 avremo $\sqrt{4\pi f}\,aR=\xi_0$ e quindi la costante a risulta determinata dalla relazione:

$$a=\frac{\xi_0}{R\sqrt{4\pi f}}.$$

Si ha perciò [1]

$$\rho=\rho_0 J_0\left(\xi_0\frac{r}{R}\right). \tag{13}$$

[1] Poichè in tutto l'intervallo (O, R) la densità ρ deve ovviamente risultare positiva ed annullarsi per $r=R$ (ove finisce la massa fluida), si considera solo il primo zero della funzione J_0, perchè è noto che la funzione $J_0(\xi)$ nell'intervallo compreso fra $\xi=0$ e il suo primo zero è positiva e decrescente e per la funzione $J_0\left(\xi_0\frac{r}{R}\right)$ tale intervallo è (O, R). S'intende che pure la costante ρ_0 deve essere positiva.

Rimane da determinare la costante ρ_0, il cui significato fisico è di rappresentare la densità dei punti dell'asse di rotazione; invero per $r = 0$, dalla (13) si ricava che

$$\rho = \rho_0 .$$

Se ora indichiamo con m la massa del cilindro relativa all'unità di lunghezza di esso, si ha

$$m = 2\pi \int_0^R \rho r dr = 2\pi\rho_0 \int_0^R J_0\left(\xi_0 \frac{r}{R}\right) r dr.$$

Ponendo $\xi = \xi_0 \frac{r}{R}$ poichè dalle formule ricorrenti delle funzioni di Bessel si ha che

$$J_0(\xi)\xi = \xi \frac{dJ_1(\xi)}{d\xi} + J_1(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left[\xi J_1(\xi)\right],$$

si ottiene

$$m = \frac{2\pi\rho_0 R^2}{\xi_0} J_1(\xi_0). \tag{14}$$

Per cui fissati m ed R, mediante tale relazione rimane determinata la costante ρ_0 ed è ovviamente positiva perchè $J_1(\xi_0)$ è > 0.

Perciò la (13) definisce pienamente la densità ρ.

3. Determiniamo infine l'intensità H del campo magnetico. Posto per semplicità

$$\mathfrak{P} = \frac{\mu H^2}{8\pi} + p$$

dalla (10) si ha

$$\frac{d}{dr}\left(\mathfrak{P} - \frac{1}{2a^2}\rho^2\right) = \omega^2 r\rho,$$

da cui integrando, ricordando il valore di P e la (5), si ottiene

$$\frac{\mu}{8\pi} H^2 + C\rho^\gamma = \frac{1}{2a^2}\rho^2 + \omega^2 \int r\rho dr + \text{cost.} \tag{15}$$

Ma

$$\int r\rho dr = \rho_0 \int r J_0\left(\xi_0 \frac{r}{R}\right) dr = \frac{R\rho_0}{\xi_0} r J_1\left(\xi_0 \frac{r}{R}\right),$$

per cui la (15) diventa:

$$\frac{\mu}{8\pi} H^2 + C\rho^\gamma = \frac{1}{2a^2}\rho^2 + \frac{\omega^2 R\rho_0}{\xi_0} r J_1\left(\xi_0 \frac{r}{R}\right) + \text{cost.} \tag{16}$$

Il campo magnetico in superficie (ove $\rho = 0$) abbia intensità costante ed eguale al valore H_0 del campo esterno.

Allora dalla (16) per $r = R$ e $\rho = 0$ si ricava

$$\text{cost} = \frac{\mu}{8\pi} H_0^2 - \frac{\omega^2 R^2 \rho_0}{\xi_0} J_1(\xi_0).$$

Per cui in definitiva la (16) diventa:

$$\frac{\mu}{8\pi}(H^2 - H_0^2) = \frac{1}{2a^2}\rho^2 - C\rho^\gamma + \frac{\omega^2 R\rho_0}{\xi_0}\left| r J_1\left(\xi_0 \frac{r}{R}\right) - R J_1(\xi_0)\right| \tag{17}$$

che fornisce il valore dell'intensità H.

Se deriviamo la (16) rispetto ad r ed osserviamo che

$$\frac{d}{dr}\left[r J_1\left(\xi_0 \frac{r}{R}\right)\right] = r J_0\left(\xi_0 \frac{r}{R}\right) = \frac{r}{\rho_0}\rho, \quad \text{si ottiene}$$

$$\frac{\mu}{8\pi}\frac{dH^2}{dr} = -\frac{\rho}{a^2}\frac{d\rho}{dr}\left[\frac{Ca^2\gamma}{\rho^{2-\gamma}} - 1\right] + \frac{\omega^2 Rr}{\xi_0}\rho. \tag{18}$$

Poichè per $0 < r \leq R$ la densità ρ è decrescente, ma positiva, il secondo termine del secondo membro della (18) è positivo.

Siccome è $\gamma < 2$, $\frac{1}{\rho^{2-\gamma}}$ è una funzione crescente in (O, R) che per $r = 0$ assume il valore minimo $\frac{1}{\rho_0^{2-\gamma}}$. Perciò se

(19) $$\frac{Ca^2\gamma}{\rho_0^{2-\gamma}} \geq 1,$$ cioè ricordato il valore di a, se

(19′) $$\rho_0 \leq \left(\frac{C\xi_0^2\gamma}{4\pi f R^2}\right)^{\frac{1}{2-\gamma}},$$

allora pure il primo termine del secondo membro della (18) è positivo e quindi H^2 è crescente in (O, R); cioè, quando ci si allontana dall'asse di rotazione, l'intensità del campo magnetico aumenta. Perciò si può ritenere che, avvicinandosi alla superficie della massa, l'azione del campo magnetico esterno sia più sensibile. Naturalmente questo si verifica quando è soddisfatta per ρ_0 la limitazione (19′); precisamente se il raggio R della massa fluida cilindrica è «piccolo», praticamente ρ_0 non ha limitazione; se viceversa R è molto «grande», ρ_0, soddisfacente la (19′), è prossima a zero e quindi la densità ρ è molto «piccola» e cioè la massa è molto rarefatta.

In conclusione, in masse fluide cilindriche sottili o molto rarefatte (caso di maggior interesse), il campo magnetico cui è soggetto il fluido, a mano a mano che si avvicina alla superficie, cresce; per cui si può ritenere che, in prossimità della superficie di tali masse, sia più sensibile l'azione del campo magnetico esterno.