Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ivan Bandić

Sur le critère d'intégrabilité de l'équation différentielle généralisée de Liénard.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.1, p. 59–67.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_1_59_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Sur le critère d'intégrabilité de l'équation différentielle généralisée de Liénard.

Nota di Ivan Bandić (a Belgrado) (*)

Résumé. - *Dans le présent travail le critère d'intégrabilité de l'équation non-linéaire* (1) *est déterminé de la condition d'intégrabilité de l'équation d'Abel de forme* (13). *De cette façon-ci on arrive aux conditions* (19) *et* (3.3). *Les résultats obtenus sont appliqués, dans les paragraphes* (2.3) *et* (2.4) *aux équations* (2) *et* (3), *qui apparaissent en mécanique. dans la théorie des oscillations et la théorie de l'elasticité.*

Il s'agit de l'équation différentielle non-linéaire

$$y'' + \psi(y)y'^2 + \varphi(y)y' + f(y) = 0, \qquad \left(y^{(\nu)} = \frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right) \tag{1}$$

dont les formes spéciales apparaissent en mécanique, dans la théorie des oscillation, dans la théorie de l'élasticité etc.

Ainsi, pour $\psi(y) \equiv 0$ de (1) on obtient l'équation générale de Liénard

$$y'' + \varphi(y)y' + f(y) = 0. \tag{2}$$

A (1) se réduit également l'équation non-linéaire de forme

$$y'' + P(y') + yQ(y') = 0, \tag{3}$$

laquelle, en supposant que $Q(y') \equiv 1$, est aussi réduite à l'équation

$$y'' + P(y') + y = 0, \tag{4}$$

connue de la théorie des oscillations.

Dans le présent travail, la détermination du critére d'intégrabilité de l'équation (1), et par cela même aussi de celui des autres équations citées, se réduit à l'examen de l'integrabilité d'une équation différentielle spéciale du premier ordre d'Abel.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 14 febbraio 1961.

1° Si l'on considére, dans (1), x comme fonction inconnue et y comme variable indépendante, on obtient

$$x'' = f(y)x'^3 + \varphi(y)x'^2 + \psi(y)x'. \qquad \left(x^{(\nu)} = \frac{d^\nu x}{dy}\right)$$

d'où, par voie de substitution

$$\frac{dx}{dy} = z, \tag{5}$$

où $z = z(y)$ est la nouvelle fonction inconnue, on arrive à l'équation du premier ordre du type d'ABEL

$$z' = f(y)z^3 + \varphi(y)z^2 + \psi(y)z, \qquad \left(z' = \frac{dz}{dy}\right). \tag{6}$$

En introduisant la nouvelle fonction inconnue $w = w(y)$ par la substitution

$$z = w \exp \int \psi(y)dy \tag{7}$$

on trouve, en vertu de (6),

$$w' = \mathfrak{F}(y)w^3 + \Phi(y)w^2, \tag{8}$$

où

$$\mathfrak{F}(y) = f(y) \exp 2\int \psi(y)dx; \quad \Phi(y) = \varphi(y) \exp \int \psi(y)dy. \tag{9}$$

Soit $w = w(y, c_1)$ l'intégrale générale de l'équation (8). Dans ce cas-ci, l'intégrale générale de l'équation (8) est obtenue de (5)

$$\int \left\{ w(y, c_1) \exp \int \psi(y)dy \right\} dy = x + c_2. \tag{10}$$

THÉORÈME. - L'équation différentielle non-linéaire

$$y'' + \psi(y)y'^2 + \varphi(y)y' + f(y) = 0 \tag{11}$$

est résolue au moyen des quadratures si

$$(12) \qquad f(y) = \mathfrak{F}(y) \exp\left(-2\int \psi(y)dy\right); \quad \varphi(y) = \Phi(y)\exp\left(-\int \psi(y)dy\right),$$

où $\mathfrak{F}(y)$ et $\Phi(y)$ sont des coefficients de l'équation intégrable d'ABEL

$$(13) \qquad w' = \mathfrak{F}(y)w^3 + \Phi(y)w^2, \qquad \left(w' = \frac{dw}{dy}\right)$$

dont l'intégrale générale est $w = w(y, c_1)$.

L'intégrale générale de l'équation (11) est donnée, dans ce cas-ci, par la relation

$$(14) \qquad \int \left\{ w(y, c_1) \exp \int \psi(y)dy \right\} dy = x + c_2.$$

2° Il résulte de ce théorème qu'à chaque équation intégrable d'ABEL de forme (13) correspond l'équation intégrable (11), ce qui veut dire qu'il existe de très vastes possibilités pour déterminer le critère d'intégrabilité de l'equation (11) (¹).

Dans ce paragraphe on résout les problèmes suivants:

(a). On établit l'intégrabilité de l'équation (11) par l'application d'une proposition de CHIELLINI à (13).

(b). L'équation d'ABEL (13), et par céla même aussi l'équation (11), sont mises au rapport avec une classe d'équations algébriques, de sorte qu'à chaque solution de n'importe quelle équation appartenant à cette classe, il correspond une équation intégrable (11).

(c) Les résultats de deux problémes précédent s'appliquent aux équations spéciales (2) et (3).

(2.1). La proposition susmentionnée de CHIELLINI, [1], est conçue en termes suivants:

S'il est possible de déterminer la constante k de telle façon qu'entre les coeefficients de l'équation d'ABEL

$$(15) \qquad y' = a_0 y^3 + a_1 y^2, \qquad (a_\nu = a_\nu(x))$$

(¹) E KAMKE, *Differentialgleichungen* I, pp. 24-28, Leipzig, 1943.

il existe l'identité

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)' = ka_1, \tag{16}$$

alors (15), par la substitution

$$y = \frac{a_1}{a_0}\eta, \qquad (\eta = \eta(x)) \tag{17}$$

est transformé en l'équation

$$\eta^1 = \frac{a^2{}_1}{a_0}(\eta^3 + \eta^2 + k\eta), \tag{18}$$

dans laquelle les variables sont séparées.

(2.1.1). De (16) on trouve, en prenant en considération (12) et (13)

$$\left\{\frac{f(y)}{\varphi(y)}\exp\int\psi(y)\alpha y\right\}' = k\varphi(y)\exp\int\psi(y)dy,$$

et de là

$$\psi(y) = k\frac{\varphi^2(y)}{f(y)} + \triangle_1\left[\frac{\varphi(y)}{f(y)}\right], \tag{19}$$

où l'opérateur $\triangle_1$ désigne la dérivée relative de M. Petrović, [2].

W. Fragner, [3], trouve un cas spécial de la condition (19).

L'intégrale générale de l'équation (11), dans laquelle est satisfaite la condition (19), peut être trouvé de (14), où, en vertu de (17) et (18), $w = w(y, c_1)$ est donné par le système d'équations

$$w = \eta\exp\left(-k\int\frac{\varphi^2(y)}{f(y)}dy\right); \qquad \eta' = \frac{\varphi^2(y)}{f(y)}(\eta^3 + \eta^2 + k\eta). \tag{20}$$

(2.2). En introduisant l'hypothèse

$$\mathfrak{F}(y) = y\theta(y); \qquad \theta(y) = \beta + \theta(y), \qquad (\beta = \text{const.})$$

où $\theta(y)$ est la fonction arbitraire, ou bien, en vertu de (12)

$$\left.\begin{aligned} f(y) &= y\theta(y)\varepsilon^2 \\ \varphi(y) &= (\beta + \theta(y))\varepsilon \end{aligned}\right\}, \qquad \varepsilon = \exp\left(-\int \psi(y)dy\right) \tag{21}$$

on obtient de (13)

$$w' = y\theta w^3 + (\beta + \theta)w^2, \qquad (\theta = \theta(y)). \tag{22}$$

La condition (16) devient maintenant

$$\beta y\theta' = (\beta + \theta)[k(\beta + \theta)^2 - \theta],$$

d'où

$$\int \frac{d\theta}{(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)} = \frac{k}{\beta} \ln \beta y, \tag{23}$$

et où

$$\theta_1 = -\beta; \qquad \theta_{2,3} = \frac{1}{2k}(1 - 2k\beta \pm \sqrt{1 - 4k\beta}). \tag{24}$$

De (23), il s'ensuit

$$(\theta - \theta_1)^{2\sqrt{D}} \cdot (\theta - \theta_2)^{1-\sqrt{D}} \cdot (\theta - \theta_3)^{-1-\sqrt{D}}, (\beta y)^{2\sqrt{D}} \quad (D = 1 - 4k\beta). \tag{25}$$

En introduisant, au lieu de k, la nouvelle constante λ par la substitution

$$k = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\beta(1 - 2\lambda)^2}, \tag{26}$$

les relations (24) deviennent

$$\theta_1 = -\beta, \qquad \theta_2 = \beta\frac{\lambda - 1}{\lambda}, \qquad \theta_3 = \beta\frac{\lambda}{\lambda - 1}, \tag{27}$$

et l'équation (25)

$$\left(\frac{\theta-\theta_2}{\theta-\theta_3}\right)^{\lambda}=\frac{1}{\beta y}\frac{\theta-\theta_1}{\theta-\theta_3}. \tag{28}$$

Finalment, après avoir introduit également la nouvelle fonction inconnue $\Im=\Im(y)$ par la sobstitution

$$\theta=\frac{\theta_2-\theta_3\Im}{1-\Im}, \tag{29}$$

l'équation (28) devient

$$3y\Im^{\lambda}=\lambda\Im+(1-\lambda). \tag{30}$$

De (27) et (29) on trouve à présent

$$\theta=\beta\frac{(\lambda-1)^2-\lambda^2\Im}{\lambda(1-\lambda)(1-\Im)},$$

où $\Im$ représente une solution de l'équation (31).

Théorème. - La fonction différentielle non-linéaire

$$y''+\psi(y)y'^2+\varphi(y)y'+f(y)=0 \tag{32}$$

est résolue au moyen des quadratures si

$$\left.\begin{aligned} f(y)&=y\theta(y)\varepsilon^2 \\ \varphi(y)&=(\beta+\theta(y))\varepsilon \end{aligned}\right\}\ \varepsilon=\exp\left(-\int\psi(y)dy\right),\qquad (\beta=\text{const.}), \tag{33}$$

où

$$\theta(y)=\beta\frac{(\lambda-1)^2-\lambda^2\Im}{\lambda(1-\lambda)(1-\Im)},\qquad (\lambda=\text{const.}) \tag{34}$$

$\Im=\Im(y)$ y représentant une solution de l'équation elgébrique

$$\beta y\Im^{\lambda}=\lambda\Im+(1-\lambda) \tag{35}$$

L'intégrale génerale de l'équation (32) est donnée, dans ce cas-ci, par la relation

$$\int \frac{1}{\varepsilon} w(y,\ c_1)dy = x + c_2, \tag{36}$$

et on trouve $w = w(y,\ c_1)$ en éliminant η des équations

$$w = \frac{\beta + \theta(y)}{y\theta(y)}\eta; \quad \eta' = \frac{(\beta + \theta(y))^2}{y\theta(y)}(\eta^3 + \eta^2 + k\eta); \quad k = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\beta(1 - 2\lambda^2)} \tag{37}$$

où $\theta(y)$ est donné par les égalités (34) et (35).

Exemple. - Soit $B = 1$, $\lambda = -1$. Dans ce cas-ci l'équation (35) s'exprime par

$$\theta^2 - 2\vartheta + y = 0,$$

dont une solution est

$$\theta = 1 + \sqrt{1 - y}.$$

Par la substition de cette valeur en (33) on obtient

$$\left.\begin{aligned} f(y) &= \frac{y(3 - \sqrt{1 - y})}{2\sqrt{1 - y}}\varepsilon^2 \\ \varphi(y) &= \frac{3 + \sqrt{1 - y}}{2\sqrt{1 - y}}\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = \exp\left(-\int \psi(y)dy\right),$$

et de (37)

$$w = \frac{3 + \sqrt{1 - y}}{y(3 - \sqrt{1 - y})}\eta; \quad \eta' = \frac{(3 + \sqrt{1 - y})^2}{2y\sqrt{1 - y}(3 - \sqrt{1 - y})}\left(\eta^3 + \eta^2 + \frac{2}{9}\eta.\right)$$

(2.3). Les résultats obtenus s'appliquent directement à l'équation de LIÉNARD (2). Notamment, de (2.1.1) il résulte que (2) est intégrable si, en vertu de (19)

$$k\frac{\varphi^2(y)}{f(y)}+\triangle_1\left|\frac{\varphi(y)}{f(y)}\right|=0.$$

De là, $f(y)$ et $\varphi(y)$ peuvent être exprimes de façon suivante

$$f(y)=\omega^{2k}\triangle_1(\omega),\qquad \varphi(y)=\omega^k\triangle_1(\omega),$$

où $\omega=\omega(y)$ est la fonction arbitraire.

(2.3.1). Les formes intégrables de l'équation (2) peuvent être constituées également en vertu du théorème de (2.2).

Compte tenu que maintenant $\varepsilon\equiv 1$ on obtient de (33)

$$f(y)=y\theta(y);\qquad \varphi(y)=\beta+\theta(y),$$

où l'on trouve $\theta(y)$ de la façon démontrée en (34) et (35).

(2.4). Si l'on différentie (3) selon x on arrive à l'équation

$$(38)\quad y'''+\frac{dP(y')}{dy'}y''+Q(y')y'-y''(y''+P(y'))\triangle_1[Q(y')]y'=0.$$

laquelle, par la substitution

$$(39)\qquad \frac{dy}{dx}=z,$$

est transformée en l'équation de forme (1)

$$(40)\qquad z''+\psi_1(z)z'^2+\varphi_1(z)z'+f_1(z)=0,$$

où

$$(41)\qquad \psi_1(z)=-\triangle_1[Q(z)]_z,\quad \varphi_1(z)=\triangle_1\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]_z;\quad f_1(z)=zQ(z).$$

(2.4.1). En vertu des résultats de (2.1.1) il s'ensuit que l'équation (3) est intégrable si, d'après (10)

$$\psi_1(z)=k\frac{\varphi_1{}^2(z)}{f_1(z)}+\triangle_1\left[\frac{\varphi_1(z)}{f_1(z)}\right],$$

d'où, en vertu de (41)

$$P(z) = Q(z)\left(\frac{2}{k}\int \frac{z}{Q(z)}\,dz\right)^{1/2}, \qquad \left(z = \frac{dy}{dx}\right). \tag{42}$$

(2.4.2). Eu appliquant la condition (33) à l'équation (40) et en tenant compte de (41), on odtient

$$\left.\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{\theta(z)}\left(\beta z + \int \theta(z)dz\right) \\ Q(z) &= \frac{1}{\theta(z)} \end{aligned}\right\}$$

d'où l'on trouve, par l'élimination de $\theta(z)$

$$P(z) = Q(z)\left(\beta z + \int \frac{dz}{Q(z)}\right), \qquad (\beta = \text{const.}) \tag{43}$$

où, en vertu de (34) et (35), $Q(z)$ est donné par les relations

$$Q(z) = \frac{\lambda(1-\lambda)(1-\mathfrak{J})}{\beta[(\lambda-1)^2 - \lambda^2\mathfrak{J}]}; \qquad \beta z \mathfrak{J}^{\lambda} = \lambda\mathfrak{J} + (1-\lambda), \qquad (\lambda = \text{const.}). \tag{44}$$

Par conséquent, l'équation (3) est intégrable si entre les coefficients $P(z)$ et $Q(z)$, où $z = \frac{dy}{dx}$, il existe le rapport (43), $Q(z)$ étant *déterminé par les relations* (44).

LITTÊRATURE

[1] A. CHIELLINI, «Bollettino Unione Mat. Italiana», 10, (1931), 30-37.

[2] I. BANDIĆ, «Bollettino Unione Mat. Italiana», 13, (1958), 224-233.

[3] W. FRAGNER, «Journal für reine und angew. Math.», 194 (1955). No 1-4, 180-81.