Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tino Zeuli

Sul vortice cilindrico in un mezzo gassoso, altamente conduttore dell'elettricità, che riempie un semispazio.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.1, p. 31–38.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_1_31_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Sul vortice cilindrico in un mezzo gassoso, altamente conduttore dell'elettricità, che riempie un semispazio.

Nota di TINO ZEULI (a Torino) (*)

Sunto. - *È contenuto nel n.* 1.

1. Utilizzando alcuni risultati del prof. AGOSTINELLI [1] relativi all'equilibrio magnetodinamico di una massa gassosa in rotazione non uniforme, si determinano in modo esplicito le caratteristiche dinamiche e magnetiche di un vortice cilindrico circolare che si può formare in seno ad un mezzo gassoso altamente conduttore dell'elettricità, che riempie un semispazio, caso che può interessare, ad es., lo studio della formazione delle macchie solari.

2. Consideriamo senz'altro le equazioni dell'equilibrio adiabatico magnetodinamico, supponendo che le forze di massa siano trascurabili e che la velocità angolare di rotazione sia non uniforme. Ci serviremo, al solito, di coordinate cilindriche r, φ, z, essendo $z=0$ il piano che delimita il semispazio e l'asse z l'asse del vortice cilindrico, di raggio R. Supporremo nullo il campo magnetico trasversale e data la componente assiale H_z del campo magnetico $\vec{H}$ sul piano $z=0$ e per $0 \leq r \leq R$.

Se, al solito, $V(r, z)$ è la funzione del campo magnetico $\vec{H}$, legata ad esso dalle relazioni

$$H_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{1}$$

μ la permabilità magnetica (costante), ρ la densità, C e γ costanti

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 30 gennaio 1961.

[1] C. AGOSTINELLI, *Sull'equilibrio adiabatico magnetodinamico di una massa fluida gassosa gravitante, in rotazione non uniforme*, «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», serie VIII, vol. XXVIII, fasc. 3 Marzo 1960.

caratteristiche del mezzo, ω_0, α_0, β_0 costanti e se ∇_2 è l'operatore differenziale associato al Δ_2 di LAPLACE, con che

$$\nabla_2 V = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \tag{2}$$

le equazioni fondamentali per l'equilibrio magnetodinamico della massa fluida sono [1]:

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla_2 V + \frac{4\pi}{\mu} r^2\rho\left(\frac{1}{2}\alpha_0 r^2 - \beta_0\right) = 0, \\ &C(\nu+1)u - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \beta_0 V = \text{cost.}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha_0 V = \alpha_0\left(\frac{\omega_0^2}{\alpha_0} + V\right), \tag{4}$$

essendo

$$u = \rho^{\gamma-1}, \qquad \nu = \frac{1}{\gamma - 1} \quad \text{e quindi} \qquad \rho = u^\nu. \tag{5}$$

Se vogliamo che per $r = R$ sia $\omega = 0$ dovrà essere

$$V = -\frac{\omega_0^2}{\alpha_0}, \qquad \text{per } r = R;$$

indicando inoltre con u_1 il valore di u per $r = R$, dalla 2ª delle (3) seguirà

$$C(\nu+1)\,u_1 - \beta_0\frac{\omega_0^2}{\alpha_0} = \text{cost.}$$

e la 2ª delle (3) diventa

$$C(\nu+1)(u - u_1) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \beta_0\left(V + \frac{\omega_0^2}{\alpha_0}\right) = 0.$$

Da questa ricaviamo

$$u = u_1 + \frac{\alpha_0 r^2 - 2\beta_0}{2C(\nu+1)}\left(\frac{\omega_0^2}{\alpha_0} + V\right),$$

cioè, ponendo

$$W = V + \frac{\omega_0^2}{\alpha_0}, \quad \text{con } W = 0, \ \text{per } r = R, \tag{6}$$

si ha

$$u = u_1 + \frac{\alpha_0 r^2 - 2\beta_0}{2C(\nu+1)}W \qquad \text{ed} \qquad \omega^2 = \alpha_0 W. \tag{7}$$

Sostituendo nella 1ª delle (3) si ha l'equazione in W

(8) $$\nabla_2 W + \frac{4\pi}{\mu} r^2 \left(\frac{1}{2}\alpha_0 r^2 - \beta_0\right)\left[u_1 + \frac{\alpha_0 r^2 - 2\beta_0}{2C(\nu+1)} W\right]^\nu .$$

Se supponiamo le costanti α_0, β_0, sufficientemente piccole da poter trascurare i termini di ordine superiore al 1° rispetto ad esse si ha

$$u^\nu = u_1{}^\nu + \nu u_1{}^{\nu-1} \frac{\alpha_0 r^2 - 2\beta_0}{2C(\nu+1)} W$$

e l'equazione precedente diventa

(8′) $$\nabla_2 W + \frac{2\pi}{\mu} r^2(\alpha_0 r^2 - 2\beta_0)\left[u_1{}^\nu + \nu u_1{}^{\nu-1} \frac{\alpha_0 r^2 - 2\beta_0}{2C(\nu+1)} W\right] = 0$$

cioè

(9) $$\nabla_2 W + \frac{2\pi}{\mu} u_1{}^\nu r^2(\alpha_0 r^2 - 2\beta_0) = 0.$$

Poniamo ora

(10) $$W = W^* + \alpha_0 W_1 + \beta_0 W_2 :$$

sostituendo si ha

(9′) $$\nabla_2 W^* + \alpha_0 \nabla_2 W_1 + \beta_0 \nabla_2 W_2 + \frac{2\pi}{\mu} u_1{}^\nu r^2(\alpha_0 r^2 - 2\beta_0) = 0$$

che si verifica con

(9₁′) $$\nabla_2 W^* = 0,$$

(9₂′) $$\nabla_2 W_1 + \frac{2\pi}{\mu} u_1{}^\nu r^4 = 0,$$

(9₃′) $$\nabla_2 W_2 - \frac{4\pi}{\mu} u_1{}^\nu r^2 = 0.$$

La ($9_1'$) scritta per esteso risulta

$$r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0,$$

che ammette la soluzione

$$W^* = ArJ_1(\lambda r)e^{-\lambda z},$$

con A e λ costanti. Se vogliamo che W^* si annulli per $r=R$, dobbiamo porre $\lambda R = x_{1m}$, essendo x_{1m} uno zero positivo della $J_1(x)$. Si ha quindi la soluzione generale

$$W^* = \sum_m^\infty A_m r J_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{x_{1m}}{R}z}.$$

Supponendo poi W_1 e W_2 indipendenti da z, poichè della variabilità di z si è tenuto conto nella W^*, si ha

$$(9_2'') \qquad r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dW_1}{dr}\right) + \frac{2\pi}{\mu}u_1{}^\nu r^4 = 0,$$

$$(9_3'') \qquad r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dW_2}{dr}\right) - \frac{4\pi}{\mu}u_1{}^\nu r^2 = 0,$$

da cui, a meno di costanti additive, si ha

$$W_1 = -\frac{\pi}{12\mu}u_1{}^\nu r^6 + \frac{1}{2}C_1 r^2,$$

$$W_2 = \frac{\pi}{2\mu}u_1{}^\nu r^4 + \frac{1}{2}C_2 r^2,$$

e quindi, ponendo

$$\frac{1}{2}(\alpha_0 C_1 + \beta_0 C_2) = C',$$

con C_1 ancora costante arbitraria, si ha

$$(10) \quad W = \sum_1^\infty{}_m A_m r J_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{x_{1m}}{R}z} - \frac{\pi}{12\mu}\alpha_0 u_1{}^\nu r^6 + \frac{\pi}{2\mu}\beta_0 u_1{}^\nu r^4 + C' r^2,$$

ma per $r=R$ deve essere $W=0$, quindi

$$C' = \frac{\pi}{12\mu}\alpha_0 u_1{}^\nu R^4 - \frac{\pi}{2\mu}\beta_0 u_1{}^\nu R^2$$

e perciò

$$(10') \qquad W = \sum_1^\infty{}_m A_m r J_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{x_{1m}}{R}z} +$$

$$+ \frac{\pi}{12\mu} r^2 u_1{}^\nu [\alpha_0(R^4 - r^4) - 6\beta_0(R^2 - r^2)].$$

Segue che, a meno di termini del 2° ordine in α_0 e β_0, si ha [v.(7)]

$$\omega^2 = \alpha_0 \sum_{1}^{\infty}{}_m A_m r J_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{x_{1m}}{R}z} \tag{11}$$

e per $r = R$ si ha $\omega = 0$.

Le componenti assiale H_z e radiale H_r del campo magnetico sono ora date da

$$H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} = \sum_{1}^{\infty}{}_m A_m \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rJ_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right)\right] e^{-\frac{x_{1m}}{R}z} - \tag{12}$$

$$- \frac{\pi}{2\mu}\alpha_0 u_1 \nu r^4 + \frac{2\pi}{\mu}\beta_0 u_1 \nu r^2 + 2C',$$

$$H_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z} = \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{A_m x_{1m}}{R} rJ_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{x_{1m}}{R}z}. \tag{13}$$

Per $z = 0$ si ha

$$(H_z)_{z=0} = \sum_{m}{}_1 A_m \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rJ_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right)\right] -$$

$$- \frac{\pi}{2\mu}\alpha_0 u_1 \nu r^4 + \frac{2\pi}{\mu}\beta_0 u_2 \nu r^2 + 2C' = H(r),$$

dove $H(r)$, $(0 \leq r \leq R)$ è la componente assiale del campo magnetico sul cerchio terminale del cilindro, appartenente al piano $z = 0$, $(0 \leq r \leq R)$. Essa è una funzione di r che supponiamo assegnata.

Per $r = R$ si ha poi $H_r = 0$.

Dalle formule ricorrenti delle funzioni di Bessel si ha

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rJ_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right)\right] = \frac{x_{1m}}{R} J_0\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right),$$

quindi segue

$$H_z = \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{A_m x_{1m}}{R} J_0\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{x_{1m}}{R}z} - \tag{12'}$$

$$- \frac{\pi}{2\mu}\alpha_0 u_1 \nu r^4 + \frac{2\pi}{\mu}\beta_0 u_1 \nu r^2 + 2C',$$

e si ha che H_z si mantiene finito per $z \to \infty$ ed $0 \leq r \leq R$.

Per la determinazione delle costanti A_m abbiamo l'equazione

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{A_m x_{1m}}{R} J_0\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) = H(r) + \frac{\pi}{2\mu}\alpha_0 u_1{}^\nu r^4 - \frac{2\pi}{\mu}\beta_0 u_1{}^\nu r^2 - 2C',$$

il cui secondo membro è una funzione nota di r. Indicandola con $f(r)$ segue

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{A_m x_{1m}}{R} J_0\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) = f(r)$$

che si può scrivere anche

$$\sum_1^\infty{}_m A_m \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rJ_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right)\right] = f(r).$$

Si ricava così

$$\sum_1^\infty{}_m A_m \frac{d}{dr}\left[rJ_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right)\right] = rf(r)$$

$$\sum_1^\infty{}_m A_m J_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) = \frac{1}{r}\int_0^r rf(r)dr.$$

Se poniamo $r/R = \xi$, si ha

$$\sum_1^\infty{}_m A_m J_1(x_{1m}\xi) = \frac{R}{\xi}\int_0^\xi f(R\xi)\xi d\xi = g(\xi).$$

Ora sussistono le relazioni di ortogonalità

$$\int_0^1 J_1(x_{1n}\xi)J_1(x_{1m}\xi)\xi d\xi = 0, \qquad \text{per } n \neq m,$$

quindi

$$A_m\int_0^1 J_1{}^2(x_{1m}\xi)\xi d\xi = \int_0^1 g(\xi)J_1(x_{1m}\xi)\xi d\xi = R\int_0^1 J_1(x_{1m}\xi)d\xi\int_0^\xi f(R\xi)\xi d\xi;$$

si ha inoltre

$$\int_0^1 J_1{}^2(x_{1m}\xi)\xi d\xi = \frac{1}{2}J_1{}'^2(x_{1m}) = \frac{1}{2}J_2{}^2(x_{1m})$$

e perciò

$$(14)\qquad A_m = \frac{2R\int\limits_0^1 J_1(x_{1m}\xi)d\xi\int\limits_0^\xi f(R\xi)\xi d\xi}{J_2^2(x_{1m})}$$

e le costanti A_m risultano così determinate.

Problema esterno.

3. All'esterno si deve avere equilibrio magnetostatico.

Ponendo $V=0$, $\omega=0$, l'equazione $\mathrm{rot}\,(\vec{v}\wedge\vec{H})=0$ è identicamente soddisfatta.

Deve essere al solito $\mathrm{div}\,\vec{H}^{(e)}=0$, quindi

$$(15)\qquad H_r^{(e)} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V^{(e)}}{\partial z}. \qquad\qquad H_z^{(e)} = \frac{1}{r}\frac{\partial V^{(e)}}{\partial r}.$$

L'equazione di equilibrio in assenza di forze di massa diventa ora

$$\mathrm{grad}\,p = \frac{\mu}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}\wedge\vec{H}\ ;$$

ma si ha

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}^{(e)}\wedge\vec{H}^{(e)} = -\frac{\nabla_2 V^{(e)}}{r^2}\,\mathrm{grad}\ V^{(e)},$$

quindi

$$\mathrm{grad}\ p^{(e)} + \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{\nabla_3 V^{(e)}}{r^2}\,\mathrm{grad}\ V^{(e)} = 0.$$

Per l'integrabilità deve essere

$$\frac{\nabla_2 V^{(e)}}{r^2} = \text{funzione di } V^{(e)}:$$

se poniamo

$$(16)\qquad \frac{\nabla_2 V^{(e)}}{r^2} = a_0 \qquad (= \text{cost.}) \qquad , \qquad\qquad \nabla_2\, V^{(e)} = a_0 r^2,$$

si ha

$$\operatorname{grad}\left(p^{(e)} + \frac{\mu}{4\pi} a_0 V^{(e)}\right) = 0$$

e quindi

$$p^{(e)} + \frac{\mu}{4\pi} a_0 V^{(e)} = \text{cost.} \tag{17}$$

Dalla (16) si ricava

$$V^{(e)} = \frac{1}{8} a_0 r^4 + B_0 r^2 + \sum_1^\infty {}_m B_m r J_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{x_{1m}}{R}z} \tag{18}$$

da cui

$$H_z^{(e)} = \frac{1}{r}\frac{\partial V^{(e)}}{\partial r} = \frac{1}{2} a_0 r^2 + 2B_0 + \sum_1^\infty {}_m B_m \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rJ_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right)\right] e^{-\frac{x_{1m}}{R}z} \tag{19}$$

in cui, essendo $H_z^{(e)}$ finito per $r \to \infty$, deve essere $a_0 = 0$. Dovendovi poi essere continuità attraverso la superficie cilindrica $r = R$, cioè

$$H_z^{(e)} = H_z^{(i)} \qquad \text{per} \quad r = R,$$

si avrà

$$2B_0 = \frac{\pi}{\mu}\beta_0 u_1{}^\nu R^2 - \frac{\pi}{3\mu}\alpha_0 u_{1\nu} R^4, \qquad B_m = A_m\,.$$

Si ha inoltre

$$H_r^{(e)} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V^{(e)}}{\partial z} = \sum_1^\infty {}_m A_m \frac{x_{1m}}{R} J_1\left(x_{1m}\frac{r}{R}\right) e^{-\frac{x_{1m}}{R}z}$$

e risulta $H_r^{(e)} = 0$ per $r = R$. Anche questa componente è continua attraverso la superficie cilindrica.

L'integrale della pressione dà all'esterno $p^{(e)} = \text{cost.}$ e quindi $\rho = \text{cost.}$, cioè la densità e la pressione sono uniformi.

Il problema considerato può essere utile per spiegare il meccanismo delle macchie solari poichè il vortice cilindrico qui considerato può in prima approssimazione raffigurare un tubo vorticoso affiorante sulla superficie del Sole, che dà luogo ad una macchia solare.