Bollettino Unione Matematica Italiana

Carmelo Totaro

Considerazioni energetiche intorno alla magneto-fluido-dinamica relativistica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.4, p. 515–521.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_4_515_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

Considerazioni energetiche intorno alla magneto-fluido-dinamica relativistica.

Nota di CARMELO TOTARO (a Messina) (*)

Sunto. - *Si dà forma lagrangiana al teorema dell'energia della magneto-fluido-dinamica relativistica. Il successivo passaggio alla forma integrale permette di illustrare meglio il significato fisico dei vari termini energetici. Infine si discutono alcune semplificazioni che spesso sono compatibili con la realtà fisica.*

Summary. - *The author gives* LAGRANGE'S *form to the energy theorem of the relativistical magnetic-fluid-dynamic. The successive passage to the integral form allows to explain better the phisical meaning of the various energetic terms. Some simplifications, which are often compatible with the phisical reality, are finally discussed.*

1. In un precedente lavoro ([1]), abbiamo posto a fondamento della magneto-fluido-dinamica (= m.f.d.) relativistica il seguente sistema di equazioni

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{B}} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \\ \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I} + \rho_e \boldsymbol{v} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_e, \\ \boldsymbol{D}^* = \varepsilon \boldsymbol{E}^*, \qquad \boldsymbol{B}^* = \mu \boldsymbol{H}^*, \qquad \boldsymbol{I} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} [\boldsymbol{E}^* - \beta(\beta \cdot \boldsymbol{E}^*)], \\ \underline{\underline{\dot{g}}}^{(m)} = -\delta\mathrm{iv}\, t^{(m)} + \mathfrak{F}^{(e)} + \mathfrak{F}_M, \qquad \left(\beta = \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\right) \\ \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad F(p, \rho) = 0, \end{cases}
$$

$$
\left(\underline{\underline{\dot{g}}}_k = \frac{\partial g_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(g_k v_i), \qquad \delta\mathrm{iv}_k\, t = \frac{\partial t_{ki}}{\partial x_i}; \qquad i, k = 1, 2, 3\right)
$$

ove

$$
\text{(1)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \beta \wedge \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \beta \wedge \boldsymbol{D}, \\ \boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D} + \beta \wedge \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B} - \beta \wedge \boldsymbol{E}, \end{cases}
$$

essendo $\boldsymbol{E}$ il campo elettrico, $\boldsymbol{D}$ lo spostamento elettrico, $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente elettrica, $\boldsymbol{H}$ il campo magnetico, $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica, $\mathfrak{F}^{(e)} = \rho_e \boldsymbol{E}^* + \frac{1}{c} \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B}$ la densità di forza di LORENTZ, ρ_e la densità di carica elettrica, ε la costante dielettrica, μ la permea-

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 17 ottobre 1960.

([1]) C. TOTARO, Boll. U. M. I., n. 3, pag. 367 (1960).

bilità magnetica, σ la conducibilità, $\boldsymbol{g}$ la densità d'impulso, $\mathfrak{F}_M$ una densità di forza esterna di massa, $\boldsymbol{v}$ la velocità della generica particella materiale, c la velocità della luce nel vuoto, ρ la densità di materia, p la pressione, $t^{(m)}$ il tensore delle tensioni relative [2]. La $F(p, \rho)=0$ è l'equazione complementare, cioè il fluido si suppone barotropico. Con gli indici (e) ed (m), posti in alto ai simboli, distinguiamo gli enti elettromagnetici dai corrispondenti enti meccanici.

Per il sistema (I), partendo dall'equazione dell'impulso nella forma di EULERO

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^{(m)}}{\partial t} = -\,\delta\mathrm{iv}\, p^{(m)} + \mathfrak{F}^{(e)} + \mathfrak{F}_M, \tag{2}$$

abbiamo dedotto [3] il teorema dell'energia della m.f.d. dei fluidi perfetti sotto la seguente forma euleriana

$$\begin{aligned} \dot{W} + \operatorname{div} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{E}^* + \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{g}^{(e)}\right) - A + {}\\ + \boldsymbol{v}\cdot\delta\mathrm{iv}\, p^{(m)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot v^2 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\rho v^2 = \mathfrak{F}_M\cdot\boldsymbol{v}, \end{aligned}\tag{3}$$

ove $W=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$ è la densità d'energia elettromagnetica, $\boldsymbol{S}=c\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}$ il vettore di POYNTING, $\boldsymbol{g}^{(e)}=\frac{1}{c}\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B}$ la densità d'impulso elettromagnetico, $\rho=\frac{W^{(m)}}{c^2}\left(1+\frac{p}{W^{(m)}}\right)$ la densità di materia e si pone $A=\frac{1}{2}[\beta\wedge\boldsymbol{D}\cdot(\beta\wedge\boldsymbol{E})^{\cdot}-(\beta\wedge\boldsymbol{D})^{\cdot}\cdot\beta\wedge\boldsymbol{E}+\beta\wedge\boldsymbol{B}\cdot$ $\cdot(\beta\wedge\boldsymbol{H})^{\cdot}-(\beta\wedge\boldsymbol{B})^{\cdot}\cdot\beta\wedge\boldsymbol{H}]$.

Abbiamo, inoltre, sottolineato che neppure nel caso dei fluidi perfetti il tensore $p^{(m)}$ si riduce ad uno scalare relativisticamente invariante come avviene, invece, per il tensore delle tensioni relative $t_{ki}^{(m)}=p_{ki}^{(m)}-g_k^{(m)}v_i$.

Qui vogliamo mostrare, per prima, come dall'equazione euleriana (3) si può passare ad una forma lagrangiana del teorema dell'energia.

Dopo, considereremo il caso dei fluidi viscosi e, passando alla forma integrale, avremo modo di illustrare più chiaramente il significato fisico dei vari termini energetici.

(2) M. v. LAUE, *Die Relativitätstheorie*, Bd. I, pag. 162, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 6 Auflage, 1955.
(3) C. TOTARO, l. c..

Infine, il passaggio ad una forma adimensionale del teorema dell'energia ci permetterà di introdurre alcune semplificazioni che frequentemente sono permesse dalla realtà fisica.

2. Per la trasformazione di (3) in forma lagrangiana introduciamo ([4]) la «corrente relativa d'energia»:

$$Z = S - Wv. \tag{4}$$

Dopo ciò, si può scrivere

$$\dot{W} + \operatorname{div} S = \underset{=}{\dot{W}} + \operatorname{div} Z, \tag{5}$$

poichè $\underset{=}{\dot{W}} = \dot{W} + \operatorname{div}(Wv)$.

Osserviamo pure che, nel caso di un fluido perfetto, le sole componenti di $p^{(m)}$, diverse da zero, sono quelle della diagonale principale ([5])

$$p_{11} = \frac{1}{1-\beta^2}(p^0{}_{11} + \beta^2 W^0), \qquad p_{22} = p^0{}_{22}, \qquad p_{33} = p^0{}_{33}. \tag{6}$$

Tenendo presente che $W^{(m)} = (W^0 + \beta^2 p^0{}_{11})/(1-\beta^2)$, con trasformazioni del tutto elementari ([6]), si trova

$$p_{11} = p^0{}_{11} + \rho v^2. \tag{7}$$

Quindi

$$v \cdot \delta\mathrm{iv}\, p^{(m)} = v\frac{\partial}{\partial x} p^0{}_{11} + v\frac{\partial}{\partial x}\rho v^2. \tag{8}$$

Poichè gli assi cartesiani sono stati scelti in modo da potere applicare la trasformazione speciale di LORENTZ, il primo di questi due termini si può scrivere ancora, sotto forma vettoriale,

([4]) M. v. LAUE, l. c., pag. 162.

([5]) M. v. LAUE, l. c., pag. 148. Con l'indice ^{0} si indicano le grandezze rispetto al riferimento proprio.

([6]) $p_{11} = \frac{1}{1-\beta^2}(p^0{}_{11} + \beta^2 W^0) = \frac{1}{1-\beta^2}(p^0{}_{11} - \beta^2 p^0{}_{11} + \beta^2 p^0{}_{11} + \beta^2 W^0) =$ $= p^0{}_{11} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}(W^0 + \beta^2 p^0{}_{11} - \beta^2 p^0{}_{11} + p^0{}_{11}) = p^0{}_{11} + \beta^2\left[\frac{1}{1-\beta^2}(W^0 + \beta^2 p^0{}_{11}) + \right.$ $\left. + p^0{}_{11}\right] = p^0{}_{11} + \frac{W^{(m)}}{c^2}\left(1 + \frac{p^0{}_{11}}{W^{(m)}}\right)v^2 = p^0{}_{11} + \rho v^2.$

nel seguente modo

$$v \frac{\partial}{\partial x} p^{0}{}_{11} = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} p, \tag{9}$$

essendo ormai $p = p^{0}{}_{11} = t_{11}$ uno scalare relativisticamente invariante (PLANCK).

La somma del secondo termine di (8) con gli ultimi due termini del primo membro di (3) dà

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \underline{\underline{\dot{T}}}, \qquad \left(T = \frac{1}{2} \rho v^2\right) \tag{10}$$

come si riconosce facilmente usando l'equazione di continuità (I_9).

Premesso ciò, possiamo senz'altro scrivere la (3) sotto la seguente forma lagrangiana

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{\dot{W}}} + \operatorname{div} \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{E}^* + \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \boldsymbol{S} - \boldsymbol{g}^{(e)}\right) - A + \\ &\qquad + \underline{\underline{\dot{T}}} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} p = \mathfrak{F}_M \cdot \boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{11}$$

Evidentemente, si può giungere alla (11), partendo dalla (I_8), senza passare attraverso l'equazione (3).

Quest'equazione (11), testè trovata, si può semplificare, trascurando le potenze di β di ordine superiore (7) e quindi si può generalizzare, introducendo i termini provenienti dalla viscosità del fluido. Operando in questo senso, con metodo classicamente noto (8) troviamo

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{\dot{W}}} + \operatorname{div} \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{v} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \boldsymbol{S} - \boldsymbol{g}^{(e)}\right) + \\ &\qquad + \underline{\underline{\dot{T}}} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} p - \tilde{\mu} \left(\frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{v} = \mathfrak{F}_M \cdot \boldsymbol{v}, \end{aligned} \tag{12}$$

ove $\tilde{\mu}$ è il coefficiente di viscosità.

Per una più chiara interpretazione fisica dei vari termini energetici conviene moltiplicare ambo i membri per δV ed integrare, estendendo l'integrazione ad un volume finito V di super-

(7) In tal caso, si semplifica pure l'espressione della densità di materia.

(8) BOA-TEH-CHU, «The Phys. of Fluids», 2 (1959).

ficie Σ. Con l'aiuto del teorema della divergenza, otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_V W\delta V + \int_\Sigma Z_n d\Sigma + \int_V \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{E}^*\delta V + \int_V \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{g}^{(e)}\right)\delta V + \tag{13}$$

$$+ \frac{d}{dt}\int_V T\delta V + \int_V \boldsymbol{v}\cdot \operatorname{grad} p\,\delta V - \tilde{\mu}\int_V \left(\frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\delta V =$$

$$= \int_V \mathfrak{F}_M\cdot\boldsymbol{v}\delta V,$$

ove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale esterna a Σ.

Il primo termine di (13) esprime la variazione, per unità di tempo, dell'energia elettromagnetica contenuta in V; il secondo termine l'energia elettromagnetica che fluisce attraverso il contorno Σ; il terzo termine l'energia che, per effetto Joule, si trasforma in calore; il quarto termine è di mutua azione meccanica–elettromagnetica; come vedremo, dal punto di vista quantitativo, è spesso di scarsa importanza.

I termini rimanenti sono di natura meccanica. Il quinto esprime la variazione, per unità di tempo, dell'energia cinetica; il sesto lo trasformiamo [9] così

$$\int_V \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} p\delta V = \int_\Sigma p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\Sigma - \int_V p\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\delta V. \tag{14}$$

L'integrale superficiale, cambiato di segno, è la potenza delle forze agenti sul contorno Σ. Il successivo integrale $\int_V p\operatorname{div}\boldsymbol{v}\delta V$ è la potenza esplicata dalle forze interne nella variazione di volume del fluido. Resta il termine dipendente dalla viscosità $\tilde{\mu}$ che possiamo scrivere così

$$\tilde{\mu}\int_V\left(\frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\delta V = \tag{15}$$

$$= -\tilde{\mu}\int_V\left[(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})^2 + \frac{4}{3}(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2\right]\delta V - \tilde{\mu}\int_\Sigma\left(\frac{4}{3}\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v}\right)_n d\Sigma.$$

[9] B. Finzi, *Lezioni di Aerodinamica*, cap. V, Ed. Tamburini, Milano, 1960.

Se immaginiamo Σ talmente grande in maniera che essa non incontri il fluido in movimento, avviene che l'integrale superficiale è nullo. Poichè il primo integrale di volume è sempre negativo, troviamo, com'è naturale, che l'effetto della viscosità è essenzialmente dissipativo. Infine, il termine del secondo membro di (13) esprime la potenza della forza di massa $\mathfrak{F}_M$.

Ritorniamo, adesso, alla (12) che ci proponiamo di scrivere in forma adimensionale. A tale scopo, poniamo

$$
\left\{
\begin{aligned}
& t = t_0 t^* = \frac{l_0}{v_0} t^*, \qquad \boldsymbol{r} = l_0 \boldsymbol{r}^*, \qquad \beta = \frac{v_0 \boldsymbol{v}^*}{c} = \beta_0 \boldsymbol{v}^*, \\
& \boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{E}^*, \text{ ecc.,}
\end{aligned}
\right.
\tag{16}
$$

ove con l'indice $_0$ si indicano grandezze caratteristiche associabili ai fenomeni e con l'asterisco enti adimensionali. Introduciamo pure questi altri rapporti

$$
\alpha_1 = \frac{E_0}{B_0}, \qquad \alpha_2 = \frac{D_0}{H_0}, \qquad \alpha_3 = \frac{v_0 D_0}{l_0 \mathfrak{I}_0}, \qquad \gamma = \frac{H_0 B_0}{\rho_0 v_0^2}. \tag{17}
$$

Per brevità, poniamo $Df/Dt = \partial f/\partial t + \operatorname{div}(f\boldsymbol{v})$ e con Df/Dt^* indichiamo la corrispondente derivata adimensionale. Poniamo pure $\nabla = \partial/\partial\boldsymbol{r}$.

Dopo ciò, scriviamo la (12) così

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \gamma \left\{ \frac{D}{Dt^*} \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2 \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{H}^* \cdot \boldsymbol{B}^*) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}^*} \cdot \left[\frac{\alpha_1}{\beta_0} \boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{H}^* - \right.\right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2 \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{H}^* \cdot \boldsymbol{B}^*) \boldsymbol{v}^* \right] + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \boldsymbol{I}^* \cdot \left(\boldsymbol{E}^* + \frac{\beta_0}{\alpha_1} \boldsymbol{v}^* \wedge \right. \\
& \left.\left. \wedge \boldsymbol{B}^* \right) + \alpha_1 \beta_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial t^*} \cdot \left(\boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{H}^* - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \boldsymbol{D}^* \wedge \boldsymbol{B}^* \right) \right\} + \frac{DT^*}{Dt^*} + \\
& + \boldsymbol{v}^* \cdot \frac{\partial p^*}{\partial \boldsymbol{r}^*} + \frac{\tilde{\mu}}{\rho_0 v_0 l_0} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}^*} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}^*} \cdot \boldsymbol{v}^* \right) + \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^{*2}} \boldsymbol{v}^* \right] \cdot \boldsymbol{v}^* = \mathfrak{F}_M^* \cdot \boldsymbol{v}^*.
\end{aligned}
\right.
\tag{18}
$$

Notiamo che γ è il rapporto di due energie, energia magnetica ed energia cinetica. Per avere fenomeni di pertinenza della m.f.d. occorre che queste due forme d'energia siano comparabili, cioè γ non può essere nè molto piccolo nè molto grande. Nel caso $\gamma = 1$ si parla [10] di equipartizione dell'energia. Se invece il rapporto

[10] W. M. ELSASSER, *Magnetohydrodynamics*, Edited by R.K.M. Landshoff, Stanford University Press, Stanford, California, 1960.

γ fosse grandissimo avremmo fenomeni dinamici irrilevanti in confronto ai fenomeni elettromagnetici associati.

Passiamo ora a fare un'ipotesi che è frequentemente compatibile con la realtà fisica, cioè supponiamo ([11]) i campi elettrici prodotti soltanto da effetti unipolari:

$$|\boldsymbol{B}| \gg |\beta| \cdot |\boldsymbol{E}|, \qquad |\boldsymbol{H}| \gg |\beta| \cdot |\boldsymbol{D}|. \tag{19}$$

Ciò equivale ad ammettere

$$\beta_0 \alpha_1 \simeq 0, \qquad \beta_0 \alpha_2 \simeq 0. \tag{20}$$

Poichè abbiamo già supposto $\beta_0^2 \simeq 0$ vediamo che α_1 ed α_2 devono ritenersi dell'ordine di β_0. In altri termini, possiamo affermare che le dette ipotesi equivalgono a supporre l'energia magnetica molto più grande dell'energia elettrica:

$$\alpha_1 \alpha_2 \simeq 0. \tag{21}$$

Supponiamo, inoltre, la corrente di spostamento caratteristica piccola rispetto alla corrente di conduzione caratteristica in modo da poter ritenere $\alpha_1 \alpha_2 / \alpha_3 \neq 0$.

Con le ipotesi indicate la (18) dà luogo a questa più semplice equazione lagrangiana dell'energia

$$\begin{gathered} \underline{\dot{W}}_{mg} + \operatorname{div}(\boldsymbol{S} - W_{mg}\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{E}^* + \\ + \underline{\dot{T}} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} p - \tilde{\mu}\left[\frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}\right] \cdot \boldsymbol{v} = \mathcal{F}_M \cdot \boldsymbol{v}, \end{gathered} \tag{22}$$

ove con W_{mg} si indica la densità d'energia magnetica.

La corrispondente equazione euleriana ridotta è

$$\begin{gathered} \dot{W}_{mg} + \operatorname{div} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{E}^* + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot v^2 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\rho v^2 + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{\delta iv} p^{(m)} = \mathcal{F}_M \cdot \boldsymbol{v}. \end{gathered} \tag{23}$$

E importante notare che, con le ipotesi fatte, sparisce, fra l'altro, il termine dipendente da $\dot{\boldsymbol{v}}$ e dalle grandezze elettromagnetiche che è l'unico termine energetico di accoppiamento.

[Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 17-X-1960].

([11]) E. RICHTER, «Z. Naturforschg.», 11a, 901-912 (1956).