Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio Andreatta

Superficie algebriche di S_3 reali e con hessiana priva di punti reali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.3, p. 424–430.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_424_0>

Superficie algebriche di S_3 reali e con hessiana priva di punti reali.

Nota di ANTONIO ANDREATTA (a Pavia)

Sunto. - *Applicando risultati di una precedente ricerca si studiano, in* S_3, *le superficie algebriche reali con hessiana priva di punti reali. Una superficie con tale requisito è necessariamente d'ordine pari. Essa può non possedere punti reali; se invece è dotata di parte reale o questa si esaurisce in una sola falda a punti ellittici (ovoide omeomorfo alla sfera), ovvero le singole falde a punti tutti iperbolici e prive di mutue intersezioni sono (nel senso della topologia intrinseca) omeomorfe al toro. Si aggiungono infine alcune osservazioni.*

Summary. - *As an application of some results obtained in a previous work, the real algebraic surfaces* F *(in* S_3*), whose Hessian surface has no real points, are treated. Such a surface* F *is necessarily of even order. It may well have no real points; on the contrary. its real points either constitute a single ovoidal sheet which is the homeomorphic image of a «sphere» and all whose points are elliptic, or each sheet is topologically equivalent to a «torus». Morever, in this last situation, all points are hyperbolic. Some further observations are added.*

1. In una precedente ricerca [3] si è tra l'altro dimostrato che in S_r, con $r \geq 2$, la hessiana di una ipersuperficie algebrica reale d'ordine dispari è sempre dotata di punti reali.

Una ipersuperficie F algebrica reale con ipersuperficie hessiana H priva di punti reali è dunque necessariamente d'ordine pari $2n$. Una ipersuperficie siffatta può essere priva di punti reali; si accerta anzi facilmente che *in* S_r, *con* $r \geq 1$, *e per qualunque ordine* $2n$, *esistono ipersuperficie algebriche reali prive di punti reali e con hessiana priva di punti reali* (1).

(1) La ipersuperficie hessiana H dell'ipersuperficie F che si ottiene contando n volte una ipersuperficie F', si spezza nella F' (contata opportunamente) e nell'hessiana H' di F'. Se le ipersuperficie reali F' ed H' sono prive di punti reali, lo sono pure le ipersuperficie F ed H. Basta dunque assumere come ipersuperficie F' una quadrica reale priva di punti reali per raggiungere lo scopo. All'ipersuperficie F così ottenuta si potrà anche

Dopo di ciò, e venendo ormai al caso $r=3$ [2], si potrà supporre che F (superficie algebrica reale dello S_3 e con superficie hessiana H priva di punti reali) sia dotata di parte reale.

È immediato che F non può possedere punti reali multipli o parabolici (che sarebbero punti reali di H); pertanto *la parte reale di F consta di un numero finito di falde* (bidimensionali) *prive di singolarità e di mutue intersezioni, tutte pari ed orientabili* (perchè l'ordine di F è pari) *e ciascuna a punti tutti ellittici ovvero tutti iperbolici* (perchè diversamente vi sarebbero punti parabolici reali).

Ma un esame più accurato permette di concludere (num. 2 che o tutti i punti di F sono ellittici ovvero tutti sono iperbolici. Dopo alcuni preliminari (num. 3) si mostra poi che nel primo caso la superficie F consta di una sola falda che è un ovoide omeomorfo alla sfera (num. 4), nel secondo le singole falde di F hanno la connessione del toro (num. 5).

Ad alcuni complementi è infine dedicato il num. 6.

2. Com'è noto una superficie di S_3 e le successive superficie polari di un suo punto semplice P hanno in P il medesimo piano tangente e le medesime tangenti asintotiche, le quali sono poi le rette t_1 e t_2 uscenti da P sulla quadrica polare. La curva interse-

sostituirne una, irriducibile, a quella genericamente prossima (entro il continuo delle ipersuperficie reali di ordine $2n$ dello S_r). Soddisfa dunque ai requisiti qui richiesti la ipersuperficie:

$$\varphi \equiv (x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_r^2)^n + \lambda(x_0^{2n} + x_1^{2n} + \ldots + x_r^{2n}) = 0$$

se λ è reale, e $|\lambda|$ si assume sufficientemente piccolo.

Ma nell'equazione precedente si può anche assumere $\lambda > 0$ qualunque. Invero (cfr. [3]) la corrispondenza Ω:

$$x_0' : x_1' : \ldots : x_r' = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} : \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : \ldots : \frac{\partial\varphi}{\partial x_r},$$

con la normalizzazione (lecita in campo reale):

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_r^2 \equiv 1,$$

si scrive:

$$x_0' : x_1' : \ldots : x_r' = x_0 + \lambda x_0^{2n-1} : \mathrm{x}_1 + \lambda \mathrm{x}_1^{2n-1} : \ldots : \mathrm{x}_r + \lambda \mathrm{x}_r^{2n-1},$$

e rappresenta un « omeomorfismo algebrico puro » (perchè le funzioni $\mathrm{x}_i + \lambda \mathrm{x}_i^{2n-1}$ sono sempre crescenti); e ciò equivale appunto ad affermare che la hessiana dell'ipersuperficie $\varphi = 0$ è priva di punti reali.

(2) Il caso $r=2$ è già stato trattato da H. Lewy e V. E. Galafassi. Per i rinvî, cfr. [3].

zione di due di tali superficie ha in P punto doppio con t_1 e t_2 tangenti principali.

Pertanto, se la superficie ed il suo punto P sono reali, il punto P è contemporaneamente iperbolico o parabolico od ellittico per la superficie e per tutte le polari (escludendo, se si vuole, il piano polare), e nei tre casi la curva intersezione di due delle superficie dette presenta in P punto doppio risp. nodale, cuspidale, isolato.

Ora, rispetto alla superficie F, le quadriche polari dei punti reali di S_3 o sono tutte a punti iperbolici ovvero sono tutte a punti ellittici, perchè diversamente, passando con continuità da una quadrica di un tipo ad una dell'altro tipo, s'incontrerebbe necessariamente una quadrica (reale) a punti parabolici (cioè un cono), e il polo di questa sarebbe un punto reale della hessiana H.

Così, *se F possiede un punto iperbolico* (risp. *ellittico*), *tutte le quadriche polari reali sono a punti iperbolici* (risp. *ellittici*), *ed iperbolico* (risp. *ellittico*) *risulta ogni punto reale della superficie F.*

Segue che se una superficie (algebrica reale) con hessiana senza punti reali ammette una quadrica polare (reale) priva di parte reale, tutte le quadriche polari (reali) e la superficie stessa sono prive di punti reali.

3. Giova ricordare [3] che le superficie prime polari, rispetto ad F, dei punti reali di S_3 forniscono uno «spazio grafico» Σ_3. Sono «punti» di Σ_3 i punti reali di S_3, «piani» le parti reali (falde dispari omeomorfe al piano proiettivo reale) delle prime polari, «rette» le parti reali (circuiti dispari omeomorfi alla retta proiettiva reale) delle curve intersezione di due prime polari (reali).

Assunta ora genericamente in S_3 una retta reale l, si consideri il fascio L dei piani uscenti da l e il fascio Λ delle prime polari (rispetto ad F) dei punti di l. Le parti reali delle superficie reali di Λ formano un fascio di «piani» in Σ_3, cioè il fascio dei «piani» uscenti da una «retta» λ, parte reale in S_3 della curva base di Λ.

Su una falda Θ di F i fasci L e Λ segnano due fasci L^* e Λ^* topologicamente generici di curve grafiche [4], aventi risp. come punti-base gli $m \geq 0$ punti C intersezione di l con Θ ed i $\mu \geq 0$ punti Γ intersezione di λ con Θ.

Ma si può inoltre accertare che per il fascio L^* (risp. Λ^*) i punti Γ (risp. C) forniscono i centri-critici (punti doppî delle curve del fascio).

Siccome le prime polari di tutti i punti di l passano per tutti i punti di λ, per la legge di reciprocità i piani polari di tutti i punti di λ passano per l ossia sono piani del fascio L; ma il piano polare di un punto Γ (che è inoltre punto di Θ cioè di F) è piano ivi tangente a Θ, onde il punto Γ risulta centro critico di L^*. Reciprocamente se un piano π di L tocca Θ in un punto P, π è il piano polare di P e passa per l onde le prime polari dei punti di l passano per P e quindi P sta su λ (oltre che su Θ) ed è perciò un punto Γ.

D'altra parte la (prima) polare di un punto C è ivi tangente alla F, cioè alla falda Θ, sicchè C appare senz'altro come centro critico di Λ^*. Ma, nelle attuali circostanze, una superficie (reale) prima polare tangente a Θ in un punto P è necessariamente la polare di P; se fosse invero la polare di un altro punto Q, essa e la polare di P sarebbero tangenti in P ed allora esisterebbe una polare con punto doppio in P e P sarebbe punto reale dell'hessiana H di F, che invece non possiede punti reali. Il punto P dunque appartiene, oltre che a Θ, alla retta l ed è pertanto un punto C.

Si potrà infine osservare che se Θ è a punti iperbolici (risp. ellittici) i centri critici di L^* e di Λ^* sono tutti nodali (risp. isolati). La circostanza, evidente per quanto concerne L^* che è fascio di sezioni piane, è pur valida in relazione a Λ^* in virtù delle proprietà osservate al num. 2.

4. Si supponga ora che F sia a punti ellittici.

È allora noto che *una falda Θ a punti ellittici è un ovoide omeomorfo ad una sfera* (3).

Giova tuttavia ritrovare la proprietà con l'ausilio della teoria dei fasci di curve grafiche sopra una superficie, elaborata da L. Brusotti [4]. Ivi si stabilisce tra l'altro la formula:

$$Z = c' - c'' - b + 2 \tag{1}$$

che lega l'ordine di connessione $Z \geq 0$ di una superficie connessa serrata e chiusa (cioè priva di orli) ed i numeri (positivi o nulli) c', c'', b risp. dei centri critici nodali ed isolati e dei punti-base per un fascio topologicamente generico di curve grafiche tracciato sulla superficie.

Sulla falda Θ, e per il fascio L^* introdotto al num. prec., è $c' = 0$ onde:

$$Z = -c'' - b + 2. \tag{1'}$$

(3) Cfr. ad es. [1], § 1.

Siccome $Z \geq 0$ si ha:

$$c'' + b \leq 2 \tag{2}$$

ed in particolare:

$$b \leq 2. \tag{3}$$

Una retta reale di S_3 taglia dunque la falda Θ al più in due punti, sicchè la falda Θ è un ovoide.

La retta che congiunge due punti distinti di Θ non la incontra quindi ulteriormente, ed allora per l'associato fascio L^* è $b = 2$, quindi per la (2) è $c'' = 0$ ed infine, per la (1'), si ottiene $Z = 0$, cioè che la falda Θ è omeomorfa alla sfera.

Ma lo stesso ragionamento si può ripetere utilizzando il fascio Λ^*, sicchè Θ *risulta un ovoide anche pensata come figura dello spazio grafico* Σ_3.

Inoltre, con le notazioni di num. 3, si ha $m = b$, $\mu = c''$ per L^* e $m = c''$, $\mu = b$ per Λ^*, onde sempre:

$$m + \mu = 2. \tag{4}$$

Così, secondochè una retta (reale) l di S_3 incontra la falda Θ (in due punti) o non la incontra, la « retta » λ di Σ_3 (associata ad l nel modo precisato al num. 3) non incontra la falda Θ ovvero risp. la incontra. E reciprocamente.

Infine si può dimostrare che *una superficie F a punti ellittici consta di una sola falda.*

Se invero constasse di due falde Θ_1 e Θ_2, queste (ovoidi del tipo « sfera ») o sarebbero mutuamente esterne, ovvero una di esse, ad es. Θ_1, sarebbe interna a Θ_2.

Il primo caso è escluso perchè allora esisterebbero piani tangenti ad entrambe le falde. Se π fosse un piano siffatto, tangente in P_1 a Θ_1 e in P_2 a Θ_2, le prime polari dei punti reali di π formerebbero una rete con punti-base reali in P_1 e in P_2, il che è assurdo perchè le reti subordinate ad uno spazio grafico, come Σ_3, hanno un solo punto-base.

Anche il secondo caso si esclude perchè la prima polare di un punto P_1 di Θ_1 conterrebbe P_1 interno a Θ_2, onde la sua parte reale intersecherebbe Θ_2 e da P_1 uscirebbero piani (reali) tangenti a Θ_2. Ma invece da P_1 interno a Θ_2 non escono piani tangenti a Θ_2 perchè i piani per P_1 contengono rette l secanti Θ_2 ($b = 2$) e per tali rette non escono piani tangenti ($c'' = 0$).

5. Sia invece F a punti iperbolici.

Sopra una falda Θ di F si considerino contemporaneamente i fasci L^* e Λ^* introdotti al num. 3. Per entrambi sarà applicabile la formula (1), con $c'' = 0$ e pertanto ridotta alla seguente:

$$Z = c' - b - 2. \tag{1''}$$

Ma per L^* si ha: $b = m$, $c' = \mu$; per Λ^* si ha: $b = \mu$, $c' = m$, onde:

$$Z = \mu - m + 2, \qquad Z = m - \mu + 2$$

e confrontando le due formule si ottiene:

$$\mu = m, \tag{5}$$

$$Z = 2. \tag{6}$$

La (5) afferma che una retta (reale) l di S_3 e l'associata «retta» λ di Σ_3 *incontrano* Θ *in un eguale numero di punti;* la (6) stabilisce che Θ, falda orientabile, *è omeomorfa al toro.*

Si può aggiungere che *tutti i piani (reali) di* S_3 *intersecano* Θ. Diversamente invero passando con continuità da un piano secante ad uno non secante s'incontrerebbe un piano (tangente) la cui intersezione con Θ sarebbe ridotta ad un punto P, il quale sarebbe necessariamente punto ellittico di Θ.

Per analoghe ragioni, *tutti i «piani» di* Σ_3, *intersecano la falda* Θ.

Ed ancora è *esclusa l'esistenza di piani di* S_3 *tangenti contemporaneamente a due distinte falde della superficie* F.

6. Detta $f = 0$ l'equazione della superfice F ed $h = 0$ quella della sua hessiana H, sarà h una forma definita.

Se F *è a punti ellittici*, a punti ellittici sono le quadriche polari (rispetto ad F) dei punti reali di S_3 *onde la forma* h *è definita negativa;* perchè h, calcolata in un punto P di S_3, è il discriminante della quadrica polare di P.

Analogamente, *se* F *è a punti iperbolici la forma* h *è definita positiva.*

Così, se F possiede punti reali (cioè la forma f non è definita) il segno della forma h distingue i due casi.

Orbene *quando la forma* h *sia definita negativa la superficie* F *è a punti ellittici.*

Basterà naturalmente dimostrare che allora F possiede punti reali.

Perciò si consideri la corrispondenza:

$$x'_0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x'_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad x'_2 = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad x'_3 = -\frac{\partial f}{\partial x_2}. \tag{7}$$

Siccome la jacobiana delle forme scritte a secondo membro è manifestamente la forma h, in campo reale le (7) stabiliscono un omeomorfismo algebrico puro tra due spazi S_3, S'_3 sovrapposti. Si tratta anzi di un omeomorfismo che inverte la indicatrice ($h < 0$) e quindi sicuramente dotato di punti uniti (4). Ma un punto unito (reale) della corrispondenza è tale per cui:

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

onde, sommando, $f = 0$. Si ha dunque un punto reale della superficie F assunta (5).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. W. Efimow, *Flächenverbiegung im grossen.* Akademie - Verlag-Berlin (1957).

[2] H. Seifert - W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie.* Teubner-Leipzig, Berlin (1934).

[3] A. Andreatta, *Sistemi lineari* ∞^r *reali, di ipersuperficie algebriche di* S_r, *con jacobiana priva di punti reali,* « Boll. U. M. I. », (3), 15 (1960), pp. 134-139.

[4] L. Brusotti, *Premesse topologiche allo studio dei fasci reali di curve algebriche sopra una superficie algebrica reale,* « Ann. di Mat. », (4), 25 (1946), pp. 67-109.

(4) La circostanza rientra nelle proprietà generali svolte in [2], cap. 11.

(5) Un ragionamento del tutto analogo può ripetersi in ogni S_r con $r > 1$ dispari qualunque. Così *se la hessiana di una forma reale* f (in $r+1$ variabili) *è definita negativa, la ipersuperficie* $f = 0$ (necessariamente d'ordine pari) *è certamente dotata di parte reale* (r-dimensionale).