Vincenzo Capra

Un teorema di confronto per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.3, p. 402–408.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_402_0>

Un teorema di confronto per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

Nota di VINCENZO CAPRA (a Torino)

Sunto. - *È contenuto nel n. 1.*

1. È noto il seguente teorema di confronto per le equazioni differenziali del primo ordine [1]:

“Siano $f(x, y)$ ed $F(x, y)$ definite nel rettangolo $x^{(0)} \leq x \leq x^{(0)} + a$, $|y - y^{(0)}| \leq b$, dove

$$f(x, y) < F(x, y). \tag{1}$$

Se le funzioni $y(x)$ ed $Y(x)$, continue e derivabili in tale rettangolo, soddisfano le equazioni differenziali $y' = f(x, y(x))$, $Y' = F(x, Y(x))$ con le condizioni iniziali $y(x^{(0)}) = Y(x^{(0)}) = y^{(0)}$, allora in $x^{(0)} < x \leq x^{(0)} + a$ è $y(x) < Y(x)$”.

In questo lavoro si estende il precedente teorema ai sistemi di equazioni differenziali (con le stesse condizioni iniziali):

$$y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \; y'_i = F_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2}$$

ma in luogo di condizioni tutte analoghe alle (1) per le f_i e le F_i, si vuole considerare il caso più generale in cui, in una regione $\mathfrak{R}$, sia

$$f_h = F_h \,(1 \leq h \leq p),\; f_k = F_k \,(p+1 \leq k \leq q \leq n-1),$$
$$f_j < F_j \,(q+1 \leq j \leq r),\; f_l > F_l \,(r+1 \leq l \leq n)$$

e che inoltre se $y_h^{(1)} \leq y_h^{(2)}$, $y_k^{(1)} \geq y_k^{(2)}$, $y_j^{(1)} \leq y_j^{(2)}$, $y_l^{(1)} \geq y_l^{(2)}$, siano anche

$$\begin{aligned} &f_h(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) \leq F_h(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}), \\ &f_k(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) \geq F_k(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}), \\ &f_j(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) < F_j(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}), \\ &f_l(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) > F_l(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}), \end{aligned} \tag{3}$$

[1] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, P. II cap. VIII § 2 (2ª ed. Zanichelli 1949).

dove nelle prime due valgono i segni di uguaglianza solo per quelle coppie di funzioni i cui argomenti siano tutti uguali.

Con queste, ed altre, condizioni (v. 2) si può provare che se $y_i = \varphi_i(x)$ e $Y_i = \Phi_i(x)$ sono rispettivamente soluzioni dei sistemi (2), soddisfacenti alle stesse condizioni iniziali, risulta in $x^{(0)} < x \leq x^{(0)} + a$:

$$\varphi_h(x) < \Phi_h(x), \quad \varphi_k(x) > \Phi_k(x), \quad \varphi_j(x) < \Phi_j(x), \quad \varphi_l(x) > \Phi_l(x).$$

È però facile ricondurre tutte le precedenti disuguaglianze ad uno stesso verso (per esempio quello di (1)) con il cambiamento

$$y_h = \bar{y}_h, \quad y_k = -\bar{y}_k, \quad y_j = \bar{y}_j, \quad y_l = -\bar{y}_l$$

che, per le (2), conviene associare con le ulteriori posizioni:

$$f_h = (x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p, -\bar{y}_{p+1}, \dots, -\bar{y}_q, \bar{y}_{q+1}, \dots, \bar{y}_r, -\bar{y}_{r+1}, \dots, -\bar{y}_n) =$$
$$= \bar{f}_h(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$$

$-f_k = \bar{f}_k$, $f_j = \bar{f}_j$, $-f_l = \bar{f}_l$ e relazioni analoghe fra le F_i ed $\bar{F}_i$.

Si hanno così i sistemi $\bar{y}_i' = \bar{f}_i$ e $\bar{y}_i' = \bar{F}_i$ e fra le $\bar{f}_i$ ed $\bar{F}_i$ valgono solo o l'uguaglianza $(1 \leq i \leq q)$ o la disuguaglianza $\bar{f}_i < \bar{F}_i$ $(q+1 \leq i \leq n)$ ed alle (3) si sostituiscono le $\bar{f}_i \leq \bar{F}_i$ $(1 \leq i \leq q)$ e $\bar{f}_i < \bar{F}_i$ $(q+1 \leq i \leq n)$.

Allora fra le soluzioni $\bar{\varphi}_i(x)$ e $\bar{\Phi}_i(x)$ dei nuovi sistemi sussistono in $x^{(0)} < x \leq x^{(0)} + a$ le relazioni $\bar{\varphi}_i(x) < \bar{\Phi}_i(x)$.

La dimostrazione del teorema verrà conseguita nella ipotesi di avere già *effettuato*, ove occorra, il cambiamento di variabili indicato.

In particolare se $\bar{f}_i < \bar{F}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ si ottiene l'estensione in senso stretto del teorema inizialmente ricordato. In tal caso non sono necessarie le ipotesi *b*) e *c*) di 2 e la prova si ha subito con un ragionamento analogo a quello di 3_3.

2. Siano i sistemi di equazioni differenziali

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_i' = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{5}$$

che non si spezzano in sistemi parziali indipendenti e nei quali le funzioni f_i ed F_i siano definite nella regione $\mathfrak{R}$:

$$x^{(0)} \leq x \leq x^{(0)} + a, \quad |y_i - y_i^{(0)}| \leq b_i \ (^2) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

I sistemi (4) e (5) abbiano in $x^{(0)} \leq x \leq x^{(0)} + a$, rispettivamente, le soluzioni

$$y_i = \varphi_i(x) \tag{6}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$Y_i = \Phi_i(x) \tag{7}$$

entrambe soddisfacenti le condizioni iniziali

$$x = x^{(0)}, \quad y_i = \varphi_i(x^{(0)}) = \Phi_i(x^{(0)}) = y_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{8}$$

Si suppongono verificate le seguenti ipotesi.

a) In $\mathfrak{R}$ siano

$$f_k = F_k \quad (1 \leq k \leq q \leq n-1), \quad f_j < F_j \quad (q+1 \leq j \leq n). \tag{9}$$

b) Le funzioni $f_k = F_k$ siano lipschitziane rispetto a $y_1, y_2, \dots, y_q$ nella regione $R \subseteq \mathfrak{R}$ delimitata dalle

$$x^{(0)} \leq x \leq x^{(0)} + \delta_1 \quad (\delta_1 \leq a), \ |y_k - y_k^{(0)}| \leq \eta_k \qquad (k = 1, 2, \dots q) \tag{10}$$

e vi soddisfino alla condizione

$$|f_k|, \quad |F_k| < M. \tag{11}$$

c) Se

$$y_i^{(1)} \leq y_i^{(2)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{12}$$

$$f_k(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) \leq F_k(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}) \qquad (1 \leq k \leq q) \tag{13}$$

nelle quali vale l'uguaglianza solo per quelle coppie di funzioni i cui argomenti siano tutti uguali, e

$$f_j(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) < F_j(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}) \qquad (q+1 \leq j \leq n). \tag{14}$$

(2) Per parte dei b_i (o per tutti) può essere $b_i = +\infty$.

Con le precedenti ipotesi sussistono le disuguaglianze (v. (6) e (7)):

$$\varphi_i(x) < \Phi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{15}$$

valide in tutto $x^{(0)} < x \leq x^{(0)} + a$.

3. Per provare il teorema enunciato nel numero precedente si dimostrerà in primo tempo che, in un certo intorno destro di $x^{(0)}$, esso è valido limitatamente alle φ_j e Φ_j $(q + 1 \leq j \leq n)$. Successivamente lo si accerterà per tutte le φ_i e Φ_i in un intorno destro di $x^{(0)}$ contenuto nel precedente. Infine partendo da questo ultimo risultato si potrà provare il teorema in tutta la sua generalità. Occorre perciò introdurre le funzioni

$$Z_i(x) = Y_i(x) - y_i(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{16}$$

le quali per le (6), (7), (8), sono tali che

$$Z_i(x^{(0)}) = Y_i(x^{(0)}) - y_i(x^{(0)}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3₁. Dalle (16) e dalle (4) e (5), tenuto conto delle (8) e (9), si ha

$$\begin{aligned} Z_j'(x^{(0)}) = Y_j'(x_{(0)}) - y_j'(x^{(0)}) = F_j(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) - \\ - f_j(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) > 0 \qquad (q + 1 \leq j \leq n), \end{aligned} \tag{17}$$

Quindi in un certo intorno destro di $x^{(0)}$

$$x^{(0)} < x \leq x^{(0)} + \delta_2 \qquad (\delta_2 \leq a) \tag{18}$$

le $Z_j(x)$ sono continue positive e crescenti. Perciò nell'intorno (18) risulta

$$\varphi_j(x) < \Phi_j(x) \qquad (q + 1 \leq j \leq n) \tag{19}$$

cioè sono verificate le (15) con $i \geq q + 1$. Così il teorema è valido limitatamente all'intervallo (18) e alle funzioni $\varphi_i(x)$ e $\Phi_i(x)$ con $i = q + 1, q + 2, \dots, n$.

3_2. Per estendere le conclusioni di 3_1. a tutte le $\varphi_i(x)$ e $\Phi_i(x)$ in un intorno destro di $x^{(0)}$ contenuto in (18), posto $\bar{\delta} = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ ed $\eta = \min \{\eta_k\}$, si debbono considerare: la regione $R' \subseteq R$ delimitata da

$$(20) \qquad x^{(0)} \leq x \leq x^{(0)} + \bar{\delta}, \quad |y_k - y_k^{(0)}| \leq \eta,$$

ed il sistema di equazioni differenziali (v. (5) e (7))

$$(21) \qquad y'_k = F_k(x, y_1, \ldots, y_q, \Phi_{q+1}(x), \ldots, \Phi_n(x)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

con le condizioni iniziali (v. (8))

$$(22) \qquad x = x^{(0)}, \; y_k = y_k^{(0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Per le ipotesi *b*) di 2, il sistema (21) con le condizioni (22) ammette una sola soluzione (contenuta in R') nell'intervallo

$$(23) \qquad x^{(0)} \leq x \leq x^{(0)} + \delta \qquad \delta = \min \left\{ \bar{\delta}, \frac{\eta}{M} \right\}.$$

L'unicità della soluzione in (23) accerta anche che essa è formata (v. (7)) dalle:

$$(24) \qquad Y_k = \Phi_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Infatti se il sistema (21), (22) ammettesse in (23) la soluzione $\Phi_k^*(x) \neq \Phi_k(x)$, questa dovendo essere unica, per le (7) coinciderebbe con la (24).

Si osserva poi che le (24) si possono ottenere col metodo delle successive approssimazioni mediante gli integrali

$$(25) \quad \Phi_k^{(m)}(x) = \Phi_k(x^{(0)}) + \int_{x^{(0)}}^{x} F_k(x, \Phi_1^{(m-1)}(x), \ldots, \Phi_q^{(m-1)}(x), \Phi_{q+1}(x), \ldots, \Phi_n(x))dx$$

$$(k = 1, 2, \ldots, q; \; m = 1, 2, \ldots)$$

a partire dalle (v. (7) e (9))

$$(26) \qquad \Phi_k^{(0)}(x) = \varphi_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Le $\Phi_k^{(m)}(x)$ sono tutte contenute in R' (come risulta dalla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità nella ipotesi della lipschitzianità delle F_k, cfr. *b*) di 2) purchè lo siano le $\varphi_k(x)$ (v. (26)). Che queste ultime siano contenute in R' è subito provato perchè le stesse considerazioni fatte sul sistema (21) si possono fare sul sistema (v. (4) e (6))

$$y_k' = f_k(x, y_1, \dots, y_q, \varphi_{q+1}(x), \dots, \varphi_n(x)) \qquad (k = 1, 2, \dots, q)$$

con le condizioni (22), determinandone l'unica soluzione $\varphi_k(x)$ per successive approssimazioni a partire dalle (*v.* (9))

$$\varphi_k^{(0)}(x) = y_k^{(0)} \qquad (k = 1, 2, \dots q).$$

Verificato che le $\Phi_k^{(m)}(x)$ $(m = 1, 2, \dots)$ sono tutte contenute in R' si può ora dimostrare che

$$\Phi_k^{(m-1)}(x) < \Phi_k^{(m)}(x). \tag{27}$$

Infatti per la prima delle (9) e per le (19) e (26) tra le funzioni

$$F_k(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_q(x), \varphi_{q+1}(x), \dots, \varphi_n(x)) \qquad (k = 1, 2, \dots, q) \tag{28}$$

e le

$$F_k(x, \Phi_1^{(0)}(x), \dots, \Phi_q^{(0)}(x), \Phi_{q+1}(x), \dots, \Phi_n(x)) \qquad (k = 1, 2, \dots, q) \tag{29}$$

sussistono nell'intervallo (23) le disuguaglianze (13) e generalmente in senso forte se $x > x^{(0)}$. Tali disuguaglianze si mantengono integrando (v. (25)) e siccome integrando le (28) si riproducono le $\varphi_k(x)$ mentre dalle (29) si ottengono le $\Phi_k^{(1)}(x)$, tenuto conto delle (26), risultano verificate le (27) con $m = 1$. Considerate ora le funzioni

$$F_k^{(m-1)}(x, \Phi_1^{(m-1)}(x), \dots, \Phi_q^{(m-1)}(x), \Phi_{q+1}(x), \dots, \Phi_n(x))$$

e

$$F_k^{(m)}(x, \Phi_1^{(m)}(x), \dots, \Phi_q^{(m)}(x), \Phi_{q+1}(x), \dots, \Phi_n(x))$$

si può subito vedere che per le (9), (12) e (27) esse soddisfano in senso forte (quando sia $m = 1$) le disuguaglianze (13). Quindi, integrando, seguono (v. (25)) le (27) per $n = 2$, ecc. [3]. Si conclude così il teorema è valido nell'intervallo (23).

3.₃ Si possono ora prendere in esame in $x^{(0)} \leq x \leq x^{(0)} + \delta$ tutte le

$$(30) \qquad Z_i'(x) = Y_i'(x) - y_i'(x) = F_i(x, \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)) - \\ - f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

valendo l'uguaglianza solo per $x = x^{(0)}$ e limitatamente ad $i = 1, 2, \dots, q$. Così in $x^{(0)} < x \leq x^{(0)} + \delta$ le $Z_i(x)$ sono crescenti e positive. Allora se con $x = \bar{x} > x^{(0)} + \delta$ dovesse essere per qualche valore di i:

$$Z_i(\bar{x}) = Y_i(\bar{x}) - y_i(\bar{x}) = 0$$

dovrebbe essere $Z_i'(\bar{x}) < 0$. Ma ciò non è possibile perchè:

— per $i \geq q + 1$ valgono le (14) e quindi le (30) in senso forte,

— per $i \leq q$ sono verificate le (13) in senso forte almeno per le coppie f_i e F_i che dipendono da qualcuna delle $\Phi_j(x)$.

Se però per $i \leq q$ si annullassero parte delle $Z_i(\bar{x})$ (o anche tutte) le cui corrispondenti $Z_i'(\bar{x})$ non dipendessero dalle $\Phi_j(x)$, risulterebbe che per $x < \bar{x}$ sarebbero le stesse $Z_i'(x) < 0$, ma ciò non è possibile perchè per $x < \bar{x}$ sussistono le (13) in senso forte.

Il teorema è così completamente dimostrato.

3_4. Le ipotesi fatte sulle f_i ed F_i in *a*), *b*), *c*) di 2, non implicano l'unicità delle soluzioni (6) e (7) (soddisfacenti alle (8)) dei sistemi (4) e (5).

Quindi, con le ipotesi del teorema, le (15) sono soddisfatte da qualsiasi coppia di soluzioni delle (4) e (5) che verificano le (8).

Dovranno però avere soluzione unica in una regione R' (v. 3_2.) i sistemi parziali che si ottengono dalle (4) e (5) rispettivamente, assegnando $\varphi_{q+1}(x), \dots, \varphi_n(x)$ e $\Phi_{q+1}(x), \dots, \Phi_n(x)$ (*v.* 3_2.).

[3] Potrebbe accadere (cfr. l'osservazione seguente le (13)) che per parte delle coppie di funzioni tratte dalle (28) e (29) sussistesse l'uguaglianza in tutto (23) e perciò risulterebbero uguali le corrispondenti φ e $\Phi^{(1)}$; ma per $m \geq 2$ valgono le (13) in senso forte quando $x > x^{(0)}$ perchè il sistema (5) non si può spezzare in sistemi indipendenti. Seguono così in ogni caso le (27).