Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

Sugli invarianti proiettivi di una coppia di elementi curvilinei composti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.3, p. 390–401.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_390_0>

Sugli invarianti proiettivi di una coppia di elementi curvilinei composti

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino)

Sunto. - *Per una coppia di elementi curvilinei composti* $E_{2,0}$ *di uno spazio proiettivo* S_{n+1} *si assegna un sistema completo di invarianti proiettivi, e se ne trova un semplice significato geometrico. Si considera un'applicazione nella quale intervengono linee di un complesso lineare. Infine si esamina, in* S_3, *la coppia formata da un elemento* $E_{2,1}$ *e da un supporto.*

Summary. - *A complete system of projective invariants for a pair of «composed curvilinear elements* $E_{2,0}$» *is found. A geometric interpretation of such invariants is also given. An application is presented, in which curves belonging to a linear complex are considered. In* S_3 *the pair formed by an* $E_{2,1}$ *and a «support» is also taken into account.*

1. Sia n un intero maggiore di 1. In uno S_{n+1} proiettivo consideriamo un simplesso $A^0A^1A^2 \dots A^nA^{n+1}$, e un *elemento curvilineo composto* (1) di «supporto» (2) $Oo\omega_2\omega_3 \dots \omega_n$, essendo $O \equiv A^{n+1}$, $o \equiv A^{n+1}A^0$, mentre ω_q $(2 \leq q \leq n)$ designa la faccia $A^{n+1}A^0A^1 \dots A^{q-1}$ del simplesso considerato, che assumiamo come simplesso di riferimento per le coordinate proiettive omogenee di punto x_0, x_1, $x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. L'elemento composto $E_{2,0}$ si intende rappresentato dalle (3)

$$(1.1) \qquad \frac{x_i}{x_{n+1}} = a_i \left(\frac{x_0}{x_{n+1}}\right)^{i+1} + [i+2], \qquad (a_i \neq 0;\ 1 \leq i \leq n)$$

(1) Cfr. A. TERRACINI, a) *Sugli elementi curvilinei composti,* «Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino», vol. 88, 1953-54. pp. 7-15. V. anche A. TERRACINI, b) *Sulle coppie di rami con la stessa origine e gli stessi spazi osculatori,* «Rend. Seminario matem., Università e Politecnico di Torino», vol. 2, 1953, pp. 265-281, c) *Relazioni tra invarianti proiettivi duali di coppie di elementi curvilinei,* questo Boll., (3), t. 8, 1953, pp. 368-374. - Ho introdotto la locuzione «supporto» per il caso dello spazio ordinario, nel n. 3 dell'altra Nota: *Su alcuni sistemi di elementi curvilinei,* questo Boll., (3). t. 13, 1958, pp. 395-405.

(2) Tale supporto è dunque costituito da un punto, da una retta per esso, da un piano per la retta, da uno S_3 per il piano, e così via, fino ad un iperpiano passante per lo S_{n-1} che si sarà considerato precedentemente.

(3) Il coefficiente che nelle (1·1) è indicato con a_i sostituisce, per semplicità di scrittura, il coefficiente a_{ii} del mio lavoro l. c. (1) a), le cui notazioni vengono invece riprese soltanto nel n. 5 della presente Nota.

Scopo della presente breve Nota è anzitutto quello di trovare gli invarianti proiettivi di una coppia di elementi composti $E_{2,0}$ di S_{n+1}, i cui supporti, siano rispettivamente $Oo\omega_2 \dots \omega_n$, $Mm\mu_2 \dots \mu_n$, abbiano l'uno rispetto all'altro *posizione generale*, in questo senso preciso, che, posto momentaneamente $\omega_1 \equiv o$, $\mu_1 \equiv m$: *a*) i due spazi ω_p, μ_{n+1-p} $(1 \leq p \leq n)$ abbiano in comune un solo punto, *b*) designando con A^{p-1} tale punto, e assumendo $A^{n+1} \equiv O$, $A^n \equiv M$, gli $n+2$ punti $A^0, A^1, A^2, \dots, A^n, A^{n+1}$ risultino indipendenti. Tale ipotesi si sottintenderà costantemente nel seguito.

Degli invarianti in questione si assegna anzitutto l'espressione analitica per opportune rappresentazioni dei due $E_{2,0}$ (n. 2), passando poi ad interpretazioni geometriche (n. 3). Il n. 4 contiene un'applicazione a linee di un complesso lineare; il n. 5 riguarda un'osservazione complementare.

2. Siano dunque assegnati due $E_{2,0}$, i cui supporti $Oo\omega_2 \dots \omega_n$, $Mm\mu_2 \dots \mu_n$ abbiano posizione generale, nel senso dianzi dichiarato. Come é specificato nell'ultima parte del n. 1, in base alle ipotesi fatte, viene individuato un simplesso $A^0A^1A^2 \dots A^{n-1}A^nA^{n+1}$, che assumiamo come simplesso di riferimento per le coordinate proiettive $x_0 x_1 x_2, \dots, x_n x_{n+1}$. Allora il primo $E_{2,0}$ sarà rappresentato analiticamente dalle (1·1), mentre, analogamente, il secondo è rappresentato dalle

$$(2\cdot1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_l}{x_n} = b_l \left(\dfrac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{n-l} + [n-l+1], & (b_l \neq 0,\ n-2 \geq l \geq 0) \\ \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = b_{n+1} \left(\dfrac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{n+1} + [n+2], & (b_{n+1} \neq 0) \end{cases}$$

Un sistema, completo, di invarianti proiettivi della coppia di $E_{2,0}$ considerati, rappresentati dunque dalle (1·1), (2·1), si trova applicando i procedimenti consuetudinari: se cioè in un altro S_{n+1} (nel quale le coordinate omogenee si designano con $X_0, X_1, \dots, X_n$, X_{n+1}) si considerano analogamente due nuovi $E_{2,0}$, con rappresentazioni analoghe alle (1·1), (2·1), dove però ogni coefficiente si intende scritto con lettera maiuscola, un'omografia che porti l'una nell'altra le coppie considerate avrà equazioni del tipo

$$(2\cdot2) \qquad X_j = g_j x_j \qquad (0 \leq j \leq n+1)$$

dove, posto

$$\alpha_i = \frac{a_i}{A_i},\ \beta_l = \frac{b_l}{B_l},\ \beta_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{B_{n+1}},$$

siano soddisfatte le

$$\frac{g_0^{i+1}}{g_i g_{n+1}^i} = \alpha_i, \qquad (1 \leq i \leq a) \tag{2·3}$$

$$\frac{g_{n-1}^{n-l}}{g_n^{n-l-1} g_l} = \beta_l, \qquad (n-2 \geq l \geq 0) \tag{2·4}$$

$$\frac{g_{n-1}^{n+1}}{g_n^n g_{n+1}} = \beta_{n+1}. \tag{2·5}$$

Assumendo, come è lecito, $g_{n+1} = 1$, e ricavate g_{n-1}, g_n dalle (2·3) per sostituirle nelle (2·4), queste forniscono per le g_l $(n-2 \geq l \geq 1)$ dei valori che devono concordare con quelli offerti dalle (2·3): tenendo inoltre conto della (2·4) per $l = 0$ e della (2·5), si conclude che un sistema completo [4] di invarianti proiettivi della coppia di $E_{2,0}$ rappresentati dalle (1·1), (2·1) è dato dalle

$$J_l = \frac{a_l a_n^{n-1-l}}{a_{n-1}^{n-l} b_l}, \qquad (n-2 \geq l \geq 0) \tag{2·6}$$

$$J = \frac{a_n^n}{a_{n-1}^{n+1} b_{n+1}} \tag{2·7}$$

dove si faccia

$$a_0 = 1, \tag{2·8}$$

accanto alla quale introduciamo sin d'ora le altre posizioni, che si utilizzeranno poi,

$$b_{n-1} = b_n = 1. \tag{2·9}$$

L'indipendenza degli invarianti $J_{n-2}, J_{n-3}, \ldots, J_1, J_0, J$ si constata immediatamente, per esempio in quanto nell'espressione di ciascuno di essi compare una b con un indice diverso.

(4) *Completo* in questo senso: che per due coppie di $E_{2,0}$ ciascuna delle quali sia rappresentata nella forma (1·1) (2·1), l'eguaglianza degli invarianti proiettivi omologhi sia condizione non solo necessaria, ma anche sufficiente per l'equivalenza proiettiva.

Una coppia di elementi composti $E_{2,0}$ *di* S_{n+1}, *con supporti in posizione generale, ammette dunque* n *invarianti proiettivi indipendenti* (e come tali si possono assumere quelli forniti dalle (2·6), (2·7)). Il numero degli invarianti non risulta pertanto coincidente con quello che si potrebbe presumere in base ad un computo di parametri: un supporto dipende da $(n+1)(n+2)/2$ parametri, e quindi un $E_{2,0}$ da $(n+1)(n+2)/2+n$, cosicchè il numero di invarianti proiettivi indipendenti che a priori si riterrebbe plausibile per una coppia di $E_{2,0}$ sarebbe soltanto

$$(n+1)(n+2)+2n-(n+1)(n+3)=n-1,$$

anzichè n.

Non occorre avvertire che il sistema di n invarianti testè trovato si può modificare variamente, p. e. nel modo che segue. Osserviamo intanto che, con le posizioni (2·8), (2·9), si possono ritenere definiti dai secondi membri delle (2·6), se si immaginano scritte anche per $l=n-1$, $l=n$, i valori di J_{n-1}, J_n (che risultano perciò entrambi eguali ad 1). Se dunque poniamo

$$I_l=\frac{J_lJ_{l+2}}{J^2_{l+1}}, \qquad (n-2\geq l\geq 0) \tag{2·10}$$

il primo membro si può calcolare dal secondo per tutti i valori di l indicati, nessuno escluso, e risulta

$$I_l=\frac{a_la_{l+2}b^2_{l+1}}{a^2_{l+1}b_lb_{l+2}}. \qquad (n-2\geq l\geq 0) \tag{2·11}$$

Orbene, i valori di $I_0, I_1, I_2, \dots, I_{n-2}$ così definiti, insieme con

$$I=JJ_1J_0^{-2}=\frac{a_1b_0^2}{b_1b_{n+1}}, \tag{2·12}$$

costituiscono daccapo un sistema completo di n invarianti proiettivi, bastando a tal uopo osservare che non solo essi si esprimono mediante gli n precedentemente considerati, ma che inoltre questi si esprimono in funzione di quelli, in quanto le (2·10), (2·12) si invertono nelle

$$J_l=I^{n-1-l}_{n-2}I^{n-2-l}_{n-3}\dots I^2_{l+1}I_l, \qquad (n-2\geq l\geq 0)$$

$$J=I^n_{n-2}I^{n-1}_{n-3}\dots I_1^3I_0^2I.$$

3. Il vantaggio di sostituire il secondo sistema di invarianti proiettivi a quello prima considerato risiede nel fatto che il secondo è suscettibile di un'interpretazione geometrica molto semplice.

Essa è fondata sulla considerazione di due c^{n+1} razionali normali, la prima delle quali si ottiene come c^{n+1} congiungente il primo $E_{2,0}$ col supporto del secondo ([5]), e la seconda in modo analogo, scambiando tra loro i due $E_{2,0}$.

Fissati due interi h, k, al momento non negativi, tali che

$$h + k = n - 3, \tag{3·1}$$

consideriamo gli spazi ω_h, μ_k dei due supporti (intendendosi ovviamente che sia $\omega_0 \equiv O$, $\mu_0 \equiv M$), ed il loro spazio congiungente T_{n-2}, cioè lo spazio dei punti

$$A^0,\ A^1, \dots ,\ A^{h-1},\ A^{n-k}.\ A^{n-k+1}, \dots ,\ A^{n-1},\ A^n,\ A^{n+1},$$

cioè ancora – per la (3·1) – lo spazio T_{n-2} dei punti

$$A^0,\ A^1, \dots ,\ A^{h-1},\ A^{h+3},\ A^{h+4}, \dots ,\ A^{n-1},\ A^n,\ A^{n+1}. \tag{3·2}$$

Proiettando le due c^{n+1} dallo spazio T_{n-2} su uno stesso piano, p. e. sul piano che costituisce la faccia opposta del simplesso di riferimento, si ottengono due coniche, che designamo rispettivamente con $c_h^{(1)}$, $c_h^{(2)}$, le quali – assunte in un ordine determinato, p. e. considerando come prima la conica proiezione della prima c^{n+1} – dànno luogo ad un invariante di MEHMKE-SEGRE.

Il procedimento si può estendere al caso in cui uno dei due numeri h, k è eguale a n-2, attribuendo convenzionalmente all'altro il valore -1: secondochè $h = n - 2$, oppure $h = 1$, i punti (3·2) diventano allora rispettivamente i punti

$$A^0,\ A^1, \dots ,\ A^{n-3},\ A^{n+1},$$

([5]) Con ciò intendiamo ovviamente dire che la c^{n+1} passa per M, ammettendo come retta tangente la m, e come successivi spazi osculatori $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$.

oppure

$$A^2,\ A^3, \dots,\ A^{n-1},\ A^n.$$

Ora le equazioni delle due c^{n+1} sono rispettivamente

$$x_i = a_i x_0^{i+1} x_{n+1}^{-i}, \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{3·3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_l &= b_l x_{n-1}^{n-l} x_n^{-(n-l-1)}, \qquad (n-2 \geq l \geq 0) \\ x_{n+1} &= b_{n+1} x_{n-1}^{n+1} x_n^{-n}. \end{aligned} \right. \tag{3·4}$$

È pressochè immediato ricavare in ogni caso dalle equazioni (3·3), (3·4) quelle delle coniche $c_h^{(1)}$, $c_h^{(2)}$ (le quali risultano tra loro bitangenti), e si constata allora che l'invariante di MEHMKE-SEGRE delle due coniche vale I_h per $0 \leq h \leq n-2$, e vale I per $h = -1$.

Si ha così un'interpretazione geometrica semplice del sistema completo di invarianti $I_0, I_1, \dots, I_{n-2}, I$ di cui al n. 2.

Riassumendo: *In* S_{n+1}, *una coppia di elementi curvilinei composti* $E_{2,0}$, *i cui supporti siano in posizione generale, ammette un sistema completo di* n *invarianti proiettivi: come tali si possono assumere gli invarianti di Mehmke-Segre delle coppie di coniche ottenute proiettando, in tutti i modi possibili quassù descritti, su uno stesso piano, le due* c^{n+1} *razionali normali ciascuna delle quali congiunge uno dei due* $E_{2,0}$ *col supporto dell'altro.*

OSSERVAZIONE I. - Come é rilevato, in condizioni più generali, nel n. 1 del mio lavoro l. c. [1] *a*), un $E_{2,0}$ luogo si può anche considerare un $E_{2,0}$ inviluppo (ciò che, nelle questioni di natura proiettiva, costituisce una ragione di preferenza per gli elementi curvilinei composti nei confronti con quelli ordinari, in quanto i primi, a differenza dei secondi, sono enti autoduali). Qua per esempio la coppia di $E_{2,0}$ presa in esame si può anche considerare sotto l'aspetto duale. Nascono allora n invarianti proiettivi duali $I_h^*(0 \leq h \leq n-2)$, I^*. Ebbene, il calcolo effettivo mostra che, ove nel passaggio dagli $E_{2,0}$ luogo agli $E_{2,0}$ inviluppo si abbia cura di scambiare l'ordine in cui si considerano i due $E_{2,0}$ (e appunto in questa ipotesi intendiamo calcolati gli invarianti duali), *ciascuno degli invarianti* $I_0, I_1, \dots, I_{n-2}$, I *calcolato per gli elementi curvilinei composti luogo non si altera passando agli elementi considerati come inviluppi.*

OSSERVAZIONE II. - A norma dei n. 2, 3, in S_3, la coppia di $E_{2,0}$

$$\frac{x_1}{x_3}=a_1\left(\frac{x_0}{x_3}\right)+[3], \qquad \frac{x_2}{x_3}=a_2\left(\frac{x_0}{x_3}\right)^3+[4], \tag{3·5}$$

$$\frac{x_0}{x_2}=b_0\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+[3], \qquad \frac{x_3}{x_2}=b_3\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+[4] \tag{3·6}$$

ammette (cfr. le (2·11), (2·12)) i due invarianti proiettivi

$$I_0=\frac{a_2}{a_1^2 b_0}, \qquad I=\frac{a_1 b_0^2}{b_3}, \tag{3·7}$$

aventi il significato di invarianti di MEHMKE-SEGRE delle coniche ottenute proiettando su uno stesso piano — una volta dall'origine dell'uno, una volta dell'altro $E_{2,0}$ — le cubiche sghembe che uniscono ciascuno dei due $E_{2,0}$ al supporto dell'altro.

A tale proposito, è da rilevare che vari anni fa BUZANO [6] ha introdotto, per due elementi curvilinei (ordinari) del terz'ordine dello spazio ordinario, certi tre invarianti proiettivi, da lui designati con I, J, K, le cui espressioni, riviste alla luce della nozione di « elemento composto », mostrano che i due invarianti indicati da BUZANO rispettivamente con I, J dipendono in realtà soltanto dagli $E_{2,0}$ dei due E_3, e precisamente che essi coincidono rispettivamente con i nostri I_0, $1/I$.

Però mi pare che i significati geometrici qua assegnati per I_0, I siano più semplici di quelli indicati da BUZANO, quando per i suoi I, J, rinvia ad un suo precedente lavoro [7], dove essi risultano come valori dei birapporti di certi complessi lineari di un fascio.

4. Restando, come nella precedente OSS. II, al caso $n=2$, cioè per una coppia di $E_{2,0}$ di S_3, tra gli ulteriori invarianti che si ottengono come funzioni di I_0, I, pare particolarmente notevole l'invariante

$$G=I_0 I \tag{4·1}$$

[6] Cfr. P. BUZANO, *Invarianti proiettivi di due elementi differenziali curvilinei*, « Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino », vol. 81, 1946-47, pp. 114-121.

[7] P. BUZANO, *Interpretazione geometrica dell'arco proiettivo di una curva sghemba*, « Rend. Seminario Padova », t. IV, 1933, pp. 138-151.

(sul quale del resto si fermò anche BUZANO ([8]) nel suo lavoro l.c. ([7])).

Prima di enunciare e dimostrare due teoremi nei quali appunto interviene quell'invariante. premettiamo la nozione di *elemento composto* $\mathrm{E}_{2,0}$ *appartenente ad un complesso lineare di rette.* Questa nozione, la cui possibilità poggia sul fatto già menzionato (n. 3, Oss.I) che un $E_{2,0}$ è autoduale, si può definire dicendo che un $E_{2,0}$ appartiene ad un complesso lineare quando la polarità nulla definita dal complesso muta l'$E_{2,0}$ considerato come luogo nel medesimo $E_{2,0}$ considerato come inviluppo (il che fra l'altro esige che detta polarità muti il supporto in sè) ([9]).

Ciò premesso, dimostriamo il

TEOREMA I. – *In* S_3, *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'invariante* G *valga* 1, *è che esista un complesso lineare al quale appartengano entrambi gli* $\mathrm{E}_{2,0}$ ([10]).

([8]) Nei lavori di BUZANO G appare, con le sue notazioni, nella forma I/J (cfr. l'Oss. II del n. 3). Il significato geometrico trovato da BUZANO per questo invariante equivale al seguente: nel fascio dei complessi lineari di rette, le cui polarità nulle fanno corrispondere al centro di ciascuno dei due supporti il piano del medesimo, si considerino i due complessi N, N' ciascuno dei quali contiene rispettivamente un'ulteriore (terza) retta tangente ad uno degli $E_{2,0}$ infinitamente vicina alla retta del supporto: ebbene, G è il birapporto formato da N, N' e dai due complessi speciali del fascio.

([9]) P. e. l'$E_{2,0}$ rappresentato come luogo dalle (3·5), e perciò come inviluppo dalle (4·3) che si scriveranno tra poco, appartiene a tutti e soli i complessi lineari aventi equazioni del tipo

$$h_{23}\left(3\frac{a_2}{a_1}p_{01}+p_{23}\right)+h_{02}p_{02}+h_{12}p_{12}=0.$$

Siccome poi il primo membro di quest'equazione risulta anche la più generale forma lineare nelle p_{ij} che - quando vi si sostituisce, per ognuna delle coordinate p_{ij} di una retta tangente all'$E_{2,0}$, il corrispondente termine principale rispetto a x_0/x_3 - è divisibile per $(x_0/x_3)^3$, possiamo rappresentarci intuitivamente il fatto che un $E_{2,0}$ appartenga ad un complesso lineare come esprimente la circostanza che appartengono al complesso lineare la retta tangente all'$E_{2,0}$ nella propria origine, insieme con due ulteriori rette tangenti consecutive del medesimo $E_{2,0}$.

([10]) In forma equivalente (cfr. la nota ([9])), questo risultato si deduce dal significato geometrico di G assegnato da BUZANO (cfr. la nota ([8])) $G=1$ significa che esiste un complesso lineare di rette contenente, per ciascuno dei due $E_{2,0}$, la retta tangente nella sua origine, insieme con due ulteriori rette tangenti infinitamente vicine.

Per verificarlo, siano (3·5), (3·6) i due $E_{2,0}$. Introduciamo coordinate plückeriane di retta $p_{ij}(i, j=0, 1, 2, 3)$. Un complesso lineare che muti in sè il supporto di ciascuno dei due $E_{2,0}$ considerati dovrà intanto avere un'equazione del tipo

$$\lambda p_{01} + \mu p_{23} = 0 \tag{4·2}$$

Ora le equazioni inviluppo dei due $E_{2,0}$ sono rispettivamente

$$\frac{\eta_0}{\eta_2} = \frac{a_1^2}{3a_2}\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 + [3], \qquad \frac{\eta_3}{\eta_2} = \frac{a_1^3}{27a_2^3}\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^3 + [4]; \tag{4·3}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_3} = \frac{b_0^2}{3b_3}\left(\frac{\eta_0}{\eta_3}\right)^2 + [3], \qquad \frac{\eta_2}{\eta_3} = \frac{b_0^3}{27b_3^2}\left(\frac{\eta_0}{\eta_3}\right)^3 + [4]; \tag{4·4}$$

(essendo $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ le coordinate del piano di equazione $\sum_{s=0}^{3} \eta_s x_s = 0$).

Le condizioni affinchè la polarità rispetto al complesso lineare (4·2) muti i sistemi (3·5) e (3·6) rispettivamente in (4·3) e (4·4) sono

$$3a_2\mu - a_1\lambda = 0, \qquad 3b_3\mu - b_0\lambda = 0,$$

e queste condizioni sono compatibili se e solo se $a_2 b_0 = a_1 b_3$, cioè appunto (cfr. (3·7) e (4·1)) se $G=1$, il che prova l'asserto.

Dal teorema precedente segue senz'altro che se una linea L appartiene ad un complesso lineare, e se si considera ulteriormente un $E_{2,0}$ arbitrario, purchè appartenente al medesimo, l'invariante G della coppia formata da ciascuno degli $E_{2,0}$ della linea L insieme con l'$E_{2,0}$ considerato vale costantemente 1.

Viceversa, passiamo a dimostrare algoritmicamente [11] il

TEOREMA II. – *Se l'invariante* G *della coppia formata da ogni* $\mathrm{E}_{2,0}$ *di una linea* L *insieme con un* $\mathrm{E}_{2,0}$ *fisso vale costantemente* 1, *la linea* L *appartiene ad un complesso lineare di rette, al quale appartiene altresì l'*$\mathrm{E}_{2,0}$ *fisso considerato.*

Scegliamo infatti il sistema di riferimento $z_0 z_1 z_2 z_3$ in modo che l'$E_{2,0}$ fisso sia

$$\frac{z_1}{z_3} = \left(\frac{z_0}{z_3}\right)^2 + [3], \qquad \frac{z_2}{z_3} = \left(\frac{z_0}{z_3}\right)^3 + [4]; \tag{4·5}$$

e, posto

$$x = \frac{z_0}{z_3}, \quad y = \frac{z_1}{z_3}, \quad z = \frac{z_2}{z_3},$$

(11) Il teorema si rende plausibile con un ragionamento infinitesimale sintetico molto semplice, fondato su quanto è detto nella nota (10).

siano

$$y = f(x), \qquad z = g(x) \tag{4·6}$$

le equazioni della linea L. Se ora O è un punto generico della L, con retta tangente o e piano osculatore ω, e se indichiamo con M il punto $z_0 = z_1 = z_2 = 0$, con m la retta $z_1 = z_2 = 0$, e con μ il piano $z_2 = 0$, eseguiamo una trasformazione di coordinate in modo che rispetto al nuovo sistema $x_0 x_1 x_2 x_3$ il tetraedro di riferimento si trovi nelle condizioni descritte (per n qualunque) nell'ultima parte del n. 1. Basta a tal uopo porre ([12])

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= c_0(g z_1 - f z_2), \\ x_1 &= c_1 \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ x & f & g \\ 1 & f' & g' \end{vmatrix}, \\ x_2 &= c_2 \begin{vmatrix} z_0 - \left(x - \dfrac{g}{g'}\right) z_3 & z_1 - \left(f - \dfrac{gf'}{g'}\right) z_3 & z_2 \\ 1 & f' & g' \\ -\dfrac{g}{g'} + \dfrac{(fg'')}{(f'g'')} & f - \dfrac{gf'}{g'} & 0 \end{vmatrix}, \\ x_3 &= c_3 z_2 . \end{aligned}\right. \tag{4·7}$$

essendo c_0, c_1, c_2, c_3 costanti arbitrarie non nulle. Allora, nel sistema di riferimento $x_0 x_1 x_2 x_3$, per l'$E_{2,0}$ considerato della linea L si ha

$$a_1 = \frac{c_1 c_3}{2 c_0^2} \frac{g}{(fg')^2} (x(f'g'') - (fg'')), \qquad a_2 = -\frac{c_2 c_3^2}{6 c_0^3} \frac{g^2 (f'''g'')}{(fg')^2 (f'g'')},$$

e per quello fisso

$$b_0 = \frac{c_0 c_2}{c_1^2} \frac{g}{(fg')} \left(x - \frac{(fg'')}{(f'g'')}\right); \qquad b_3 = \frac{c_2^2 c_3}{c_1^3} \frac{\left(x - \dfrac{(fg'')}{(f'g'')}\right)^2}{(fg')} .$$

([12]) Nelle equazioni che seguono sottointendiamo l'argomento x dal quale dipendono le funzioni $f(x)$, $g(x)$ e le loro derivate f', g', ecc. Poniamo inoltre

$$(fg') = fg' - f'g, \qquad (fg'') = fg'' - f''g,$$

e così via.

Perciò la condizione $G=1$ si traduce nella

$$g^2(f'''g'')+3(x(f'g'')-(fg''))^2=0. \tag{4·8}$$

D'altra parte, il valore del wronskiano delle tre funzioni

$$3(xf'-f)-g', \quad xg'-g, \quad (fg')$$

coincide col primo membro della (4·8). Perciò la condizione $G=1$ implica l'esistenza di tre costanti, che indichiamo con h_{23}, h_{02}, h_{12} non tutte nulle tali che sia identicamente

$$h_{23}(3(xf'-f)-g')+h_{02}(xg'-g)+h_{12}(fg')=0$$

vale a dire tali che la linea L appartenga al complesso lineare di equazione ([13])

$$h_{23}(3p_{01}+p_{23})+h_{02}p_{02}+h_{12}p_{12}=0$$

cioè appunto ad un complesso lineare al quale appartiene altresì l'$E_{2,0}$ (4·5). Il teorema è così dimostrato.

5. Rimanendo ancora, per brevità, allo spazio ordinario, consideriamo anche – a differenza di quanto precede – la coppia costituita da un $E_{2,1}$ e da un supporto (supposto in posizione generale rispetto a quello dell'$E_{2,1}$). Anche qua un computo di parametri fa presumere l'esistenza di un invariante proiettivo, il quale ora – a differenza del caso precedente – è effettivamente unico. Se (assunte le notazioni ed il sistema di riferimento in analogia col n. 1) l'$E_{2,1}$ è

$$\frac{x_1}{x_3}=a_{11}\left(\frac{x_0}{x_3}\right)^2+a_{12}\left(\frac{x_0}{x_3}\right)^3+[4], \quad \frac{x_2}{x_3}=a_{22}\left(\frac{x_0}{x_3}\right)^3+a_{23}\left(\frac{x_0}{x_3}\right)^4+[5], \tag{5·1}$$

l'unico invariante proiettivo della coppia risulta

$$H=\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{23}}. \tag{5.2}$$

Di H si possono assegnare varie interpretazioni geometriche, utilizzando opportunamente cubiche sghembe definite dai dati. Limitandoci a una, consideriamo la cubica sghemba λ^3 individuata dalle condizioni di contenere l'$E_{2,1}$ e il punto M, essendo in questo punto tangente al piano μ. Chiamando s la retta tangente alla

([13]) Le coordinate di retta p_{ij} si intendono ora nel sistema $z_0z_1z_2z_3$ (e non più nel sistema $x_0x_1x_2x_3$ come precedentemente).

λ^3 in M, g la retta che proietta da M l'ulteriore intersezione della cubica col piano μ, e δ il birapporto (s, g, A^2A^1, A^2A^0), si ha (e ciò appunto fornisce l'interpretazione geometrica desiderata)

$$H = \frac{\delta + 1}{\delta + 2}. \tag{5·3}$$

Ciò si verifica senza alcuna difficoltà, scrivendo anzitutto le equazioni parametriche della più generale c^3 sghemba contenente (per $t = 0$) l'$E_{2,1}$ (4·3), sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} \rho x_0 &= t + \left(\frac{2}{3} s_1 - \frac{a_{23}}{3a_{22}}\right) t^2 + p t^3 \\ \rho x_1 &= a_{11} t^2 + \left(a_{12} + \frac{s_1 a_{12}}{3} - \frac{2a_{11}a_{23}}{3a_{22}}\right) t^3, \\ \rho x_2 &= a_{22} t^3 , \\ \rho x_3 &= 1 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3 \end{aligned}\right. \tag{5·4}$$

essendo s_1, s_2, s_3, p parametri arbitrari. Imponendo ulteriormente alla cubica di contenere il punto $M \equiv A^2$ (per $t = \infty$) e di ammettere il piano $x_3 = 0$ come tangente in M, le (5·4) si particolarizzano nelle

$$\left\{\begin{aligned} \rho x_0 &= t + \left(\frac{a_{23}}{a_{22}} - 2\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) t^2 , \\ \rho x_1 &= a_{11} t^2 , \\ \rho x_2 &= a_{22} t^3 , \\ \rho x_3 &= 1 + \left(2\frac{a_{23}}{a_{22}} - 3\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) t. \end{aligned}\right. \tag{5·5}$$

Se ne ricavano subito per le rette s, g (entro il piano $x_3 = 0$) le rispettive equazioni

$$s) \qquad a_{11}x_0 - \left(\frac{a_{23}}{a_{22}} - 2\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) x_1 = 0,$$

$$g) \qquad a_{11}x_0 + \left(\frac{a_{23}}{a_{22}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) x_1 = 0,$$

dalle quali segue senz'altro

$$\delta = \frac{1 - 2H}{H - 1},$$

e quindi l'asserto.