Bollettino Unione Matematica Italiana

M. Piazzolla-Beloch

Caratteristiche proprietà topologiche delle curve sghembe di genere massimo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.3, p. 384–389.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_384_0>

Caratteristiche proprietà topologiche delle curve sghembe di genere massimo.

Nota di M. Piazzolla Beloch (a Ferrara)

Sunto. - *È dato dal n. 1 seguente.*

1. In questa Nota, dopo aver studiato i vari tipi di circuiti esistenti sopra una quadrica a punti iperbolici e le loro mutue intersezioni, mi occupo delle curve sghembe di genere massimo, dal punto di vista topologico e dei circuiti di vario tipo che esse possono presentare.

Determino poi il massimo numero di circuiti dispari che una curva sghemba di genere massimo può avere e dò al riguardo un teorema di cui il noto teorema di Hilbert sui circuiti dispari di una curva algebrica sghemba col massimo numero di circuiti è caso particolare.

2. Premettiamo lo studio dei circuiti situati sopra una quadrica a punti iperbolici, questione di cui mi occupai sommariamente in lavori precedenti (1). Possiamo supporre, per fissare le idee, che la quadrica sia un iperboloide rigato.

Ricordiamo che i circuiti pari si distinguono (2) in circuiti pari di prima e seconda specie, secondo che essi si possano oppure no ridurre ad un punto per deformazione continua senza uscire dalla superficie; di cui i primi segano le generatrici della quadrica in un numero pari (≥ 0) di punti reali, e i secondi le segano in un numero dispari (≥ 1) di punti reali.

Un circuito dispari situato sulla superficie sega tutte le generatrici di uno dei due sistemi in un numero dispari (≥ 1) di punti reali e le generatrici dell' altro sistema in un numero pari (≥ 0)

(1) M. Piazzolla Beloch, *Sulla configurazione delle curve situate sopra quadriche, e, in particolare sulla configurazione delle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti*, «Rend. R. Accad. Lincei», serie V, vol. XXII, 2° fasc.

M. Piazzolla Beloch, *Sulle proprietà topologiche dei circuiti d'ordine dispari tracciati sopra quadriche a punti iperbolici*, id id. serie VIII, vol. IV, fasc. 6.

(2) V. loc. cit.

di punti reali. I circuiti dispari si dividono quindi in due specie, secondo che le generatrici incontrate in un numero dispari di punti appartengano all'uno o all'altro dei due sistemi di generatrici della quadrica.

3. Dati due circuiti chiusi qualunque γ_1 e γ_2 sulla quadrica indichiamo con k il numero di punti reali che essi hanno in comune.

Proiettiamo questi circuiti sopra un piano π da un punto 0 della quadrica che non appartenga nè all'uno nè all'altro di questi circuiti e tale che sulle generatrici r e s della quadrica passanti per esso non cadano punti d'intersezione dei due circuiti. Si ottengono così, come proiezione, due circuiti γ_1' e γ_2' che avranno rispettivamente la stessa parità o disparità dei circuiti obbiettivi γ_1 e γ_2. Dicendo l il numero dei punti reali, che γ_1' e γ_2' hanno in comune, questo numero sarà pari se almeno uno dei circuiti γ_1' o γ_2' è pari; sarà dispari se entrambi i circuiti γ_1' e γ_2' sono dispari.

Siano i_1, i_2 rispettivamente il numero dei punti reali in cui i circuiti γ_1 e γ_2 dati sulla quadrica segano la generatrice r, e j_1 e j_2 quelli in cui segano la generatrice s. I circuiti proiezione γ_1' e γ_2' avranno $i_1 i_2$ intersezioni riunite nel punto R, in cui r sega π, e $j_1 j_2$ intersezioni riunite nel punto S, in cui s sega π, più k intersezioni fuori di R e S.

Si avrà

$$l = i_1 i_2 + j_1 j_2 + k \,. \tag{1}$$

Se i due circuiti γ_1 e γ_2 sono pari, quindi γ_1' e γ_2' pari, il numero l sarà pari. Se allora entrambi i circuiti γ_1 e γ_2 sono pari *di prima specie*, si vede subito che i primi due termini del secondo membro della (1) sono pari, quindi, essendo il primo membro pari, sarà k pari. Se invece entrambi i circuiti γ_1 e γ_2 sono pari *di seconda specie*, i numeri i_1, i_2, j_1, j_2 sono tutti dispari e i primi due termini del secondo membro della (1) sono quindi dispari e la loro somma pari, ed essendo il primo membro pari, sarà k pari. Se poi uno dei circuiti γ_1, γ_2 è pari di prima specie, e l'altro pari di seconda, specie si vede subito che i primi due termini del secondo membro della (1) sono pari, ed essendo il primo membro pari, sarà k pari.

Possiamo concludere che *due circuiti d'ordine pari, situati sopra una quadrica a punti iperbolici, siano essi di prîma o seconda specie, si segano sempre in un numero pari di punti reali.*

Esaminando poi i vari casi che si possono dare se uno od entrambi i circuiti γ_1, γ_2 sono dispari e determinando la parità o disparità che in ognuno di questi casi assumono i numeri i_1, i_2, j_1, j_2 e il numero l relativo ai circuiti proiezione, dalla (1) si deducono rispettivamente le proprietà :

Un circuito dispari situato sopra una quadrica a punti iperbolici sega ogni circuito pari di prima specie situato sulla quadrica in un numero pari (≥ 0) *di punti reali, ed ogni circuito pari di secon a specie in un numero dispari* (≥ 1) *di punti reali.*

Due circuiti dispari della stessa specie, situati sopra una quadrica a punti iperbolici, si segano in un numero pari (≥ 0) *di punti reali; due circuiti dispari di specie diversa si segano in un numero dispari* (≥ 1) *di punti reali.*

4. Supponiamo ora che sulla nostra quadrica sia data una curva algebrica sghemba irriducibile C, d'ordine n, e supponiamo che essa ammetta δ (> 0) circuiti d'ordine dispari (in numero pari se n è pari in numero dispari se n è dispari).

Supposta la curva priva di singolarità, questi circuiti dovranno essere tutti della stessa specie, perchè, se ve ne fossero per es. due di specie diversa essi si segherebbero in almeno un punto reale (v. n. 3) che sarebbe doppio per la curva, contro l'ipotesi che essa sia priva di singolarità.

I circuiti d'ordine dispari che una curva algebrica sghemba d'ordine n, *situata sopra una quadrica a punti iperbolici, eventualmente possiede, sono dunque tutti della stessa specie.*

5. Ciò posto possiamo osservare che i vari circuiti che la curva C possiede potranno essere pari di prima specie; pari di seconda specie; dispari ; (questi ultimi, se esistenti, appartenenti alla stessa specie).

Sia σ_1 il numero dei primi, σ_2 il numero dei secondi e δ quello dei circuiti dispari. Indicando con Δ il numero complessivo dei circuiti della curva, sarà

$$\Delta = \sigma_1 + \sigma_1 + \delta \tag{2}$$

dove alcuni dei numeri posti al secondo membro possono anche essere nulli. Anzi, siccome abbiamo visto che ogni circuito dispari sega ogni circuito pari di seconda specie in un numero dispari (≥ 1) di punti reali (v. n. 3), si avrà, se la curva è supposta priva di singolarità, che i due numeri σ_2 e δ non possono essere contemporaneamente diversi da zero, ma

$$\text{se} \quad \sigma_2 \neq 0, \quad \text{è} \quad \delta = 0$$
$$\text{se} \quad \delta \neq 0, \quad \text{è} \quad \sigma_2 = 0 .$$

Segue che *una curva sghemba situata sopra una quadrica a punti iperbolici e d'ordine* n *dispari* (la quale ha necessariamente un numero dispari, ≥ 1, di circuiti dispari) *non possiede alcun circuito pari di seconda specie.*

6. Consideriamo ora due generatrici r e s della quadrica, di sistema opposto, passanti per un punto 0 della quadrica e supponiamo che la curva data C d'ordine n sia di tipo $[p, q]$, segante cioè le generatrici del primo sistema della quadrica in p punti, e quelle del secondo sistema in q punti, $(p + q = n)$.

7. Se la curva C è *di genere massimo*, è noto che, se n è pari, $p = q = \frac{n}{2}$, e se n è dispari dei due numeri p *e* q uno è uguale a $\frac{n-1}{2}$ e l'altro a $\frac{n+1}{2}$.

Sia in primo luogo n pari $\left(p = q = \frac{n}{2}\right)$ e distinguiamo i casi $n = 4\nu$ e $n = 4\nu + 2$ (ν intero > 0).

Nel primo caso $(n = 4\nu)$ si avrà $p = q = 2\nu$ *pari*, nel secondo caso $(n = 4\nu + 2)$, $p = q = 2\nu + 1$ *dispari.*

Ogni generatrice sia del primo che del secondo sistema sega l'insieme degli eventuali circuiti dispari, essendo essi in numero δ pari (poichè n è pari) in un numero pari (≥ 0) di punti reali.

Le eventuali intersezioni reali di ogni generatrice con circuiti pari di prima specie sono evidentemente in numero pari (≥ 0) e le intersezioni immaginarie della generatrice con la curva compaiono sempre a coppie.

Per quel che si è detto al n. 2, le intersezioni reali di ogni generatrice con l'insieme dei σ_2 circuiti pari di seconda specie, che la curva eventualmente possiede, sarà almeno uguale a σ_2 e della stessa parità o disparità di σ_2.

Dalle considerazioni fatte segue che, se $p (= q)$ è pari, sarà σ_2 pari, e viceversa, se $p (= q)$ è dispari, sarà σ_2 dispari, e viceversa. Nel caso $n = 4\nu$ (ν intero > 0) $p = q = 2\nu$ *pari*, sarà dunque σ_2 pari (≥ 0); nel caso $n = 4\nu + 2$ (ν intero > 0) $p = q = 2\nu + 1$ *dispari*, sarà σ_2 dispari.

Ne possiamo dedurre che nel caso $n = 4\nu + 2$ la curva possiede almeno un circuito pari di seconda specie, e per conseguenza sarà $\delta = 0$ (v. n. 4).

In entrambi i casi *il massimo valore* di σ_2 è $\frac{n}{2}$ e si dimostra senza difficoltà che esistono effettivamente sopra la quadrica curve algebriche sghembe irriducibili (di genere massimo) d'ordine n pari, possedenti esattamente $\frac{n}{2}$ circuiti pari di seconda specie e nessun circuito ulteriore,

8. Vediamo ora quale è il massimo valore di δ tanto per n pari che per n dispari. Se $n = 2\nu$, $(p = q = 2\nu)$, è evidentemente $\delta \leq 2\nu$. Basta ricordare che i circuiti dispari, essendo tutti della stessa specie (v. n. 4), segano, ognuno in un numero dispari (≥ 1) di punti reali, le generatrici di uno dei due sistemi (v. n. 2) per es. il primo (a cui appartiene la generatrice r).

Se $n = 4\nu + 2$ $(p = q = 2\nu + 1)$ abbiamo visto che è $\delta = 0$.

Passando al caso di n dispari, sarà δ dispari (≥ 1) e le intersezioni reali dell'insieme dei δ circuiti dispari con le generatrici del sistema della r saranno in numeri dispari (≥ 1) da cui ragionando come sopra, osservando però che ora $\sigma_2 = 0$ (v. n, 5), si vede che p deve essere dispari.

Se $n = 4\nu + 1$, si ha $\frac{n-1}{2} = 2\nu$, pari, e $\frac{n+1}{2} = 2\nu + 1$, dispari. Sarà dunque $p = 2\nu + 1$ e $q = 2\nu$ per cui $\delta \leq 2\nu + 1$.

Se $n = 4\nu + 3$, si ha $\frac{n-1}{2} = 2\nu + 1$, dispari; $\frac{n+1}{2} = 2\nu + 2$, pari, quindi sarà $p = 2\nu + 1$, e $q = 2\nu + 2$, da cui si deduce $\delta \leq 2\nu + 1$.

Concludendo possiamo dire:

Il massimo numero di circuiti dispari che può presentare una curva sghemba d'ordine n *di genere massimo è:*

$$\begin{array}{ll} \delta = 2\nu & \textit{per} \quad n = 4\nu \\ \delta = 2\nu + 1 & \textit{per} \quad n = 4\nu + 1 \\ \delta = 2\nu + 1 & \textit{per} \quad n = 4\nu + 3 \end{array}$$

mentre, per $n = 4\nu + 2$ *è* $\delta = 0$.

É evidente che le curve sghembe d'ordine n, di genere massimo, supposte irriducibili, che ammettono il massimo numero di circuiti dispari, non possono presentare punti multipli, e non possono avere alcun circuito ulteriore, poichè tutte le intersezioni della curva con ogni generatrice del sistema della r sono assorbite dai punti d'incontro con i suddetti circuiti dispari.

Si dimostra che esistono effettivamente curve sghembe di genere massimo aventi il massimo numero di circuiti dispari, da noi or ora stabilito.

Darò le dimostrazioni d'esistenza in un prossimo lavoro.

9. Dal teorema del n. precedente segue il noto teorema di HILBERT (3) sul numero dei circuiti dispari delle curve sghembe d'ordine n e genere π *col massimo numero di circuiti*: $\Delta = \pi + 1$ (con π massimo), dunque $\Delta = \frac{(n-2)^2}{4} + 1$, per n pari, e $\Delta = \frac{(n-1)(n-3)}{4} + 1$, per n dispari. Considerando rispettivamente i casi $n = 4\nu$, $n = 4\nu + 1$, $n = 4\nu + 3$, del teorema del n. 8 e calcolati i valori che assume Δ in ognuno di questi casi, si trova che (per $n \geq 6$) questi valori sono rispettivamente maggiori di 2ν, $2\nu + 1$, $2\nu + 1$ (limiti superiori trovati per il numero dei circuiti dispari per curve di genere massimo). Esistono dunque nel caso particolare che stiamo esaminando, circuiti ulteriori (necessariamente pari di prima specie). Dunque per quel che si è detto al n. 8 i limiti suddetti non possono essere raggiunti e si abbassano quindi (per $n \geq 6$) di 2 unità (fermo restando il valore $\delta = 0$ nel caso $n = 4\nu + 2$).

Si giunge dunque, come caso particolare, al teorema (di HILBERT):

Per una curva sghemba d'ordine n, *col massimo numero di circuiti, tra cui* δ *d'ordine dispari, si ha:*

$$\begin{array}{lll} \delta \leq 2\nu - 2 & \textit{per} \ \ n = 4\nu & (n > 4) \\ \delta \leq 2\nu - 1 & \textit{per} \ \ n = 4\nu + 1 & (n > 5) \\ \delta \leq 2\nu - 1 & \textit{per} \ \ n = 4\nu + 3 & (n > 3) \\ \delta = 0 & \textit{per} \ \ n = 4\nu + 2\,. & \end{array}$$

L'esistenza effettiva di curve sghembe di questo tipo viene data da HILBERT (4).

(3) D. HILBERT, *Über die reellen Züge algebraischer Curven*, (Math. Ann. XXXVIII, 1891, pp. 115-138).

(4) v. loc. cit. 3.