Bollettino Unione Matematica Italiana

Carmelo Totaro

Il teorema dell'impulso ed il teorema dell'energia nella magneto-fluido-dinamica relativistica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.3, p. 367–372.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_367_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

Il teorema dell' impulso ed il teorema dell'energia nella magneto-fluido-dinamica relativistica.

Nota di CARMELO TOTARO (a Messina)

Santo - *Si ricava il teorema dell'impulso, introducendo un tensore energetico magneto-fluido-dinamico. Il teorema dell'energia, invece, viene dedotto, direttamente, da un sistema ottenuto accoppiando le equazioni della fluido-dinamica con le equazioni di* MINKOWSKI.

Si nota, naturalmente, che solo i termini dipendenti da $\dot{v}$ *non sono deducibili col metodo di* MINKOWSKI *del tensore energetico. Solo a calcoli eseguiti, si trascurano le potenze di* $\beta = v/c$.

Summary. - *The momentum theorem is deduced by introducing a magnetic-fluid-dynamic energetic tensor. The energy theorem, however, is inferred directly from a system obtained by coupling the fluid-dynamic equations and* MINKOWSKI'S.

It is pointed out, naturally, that only the terms depending from $\dot{v}$ *are not deducible with* MINKOWSKI'S *method of energetic tensor.*

Only when all the calculations are made, the powers of $\beta = v/c$ *are omitted.*

Molti Autori, in questi ultimi anni, si sono occupati di questioni concernenti la magneto-fluido-dinamica (= m. f. d.).

BOA-TEH-CHU, in un suo recente lavoro [1], deduce il teorema dell'impulso, considerando la materia ed il campo elettromagnetico, contenuti entro una superficie chiusa σ, come un unico sistema. Per tale sistema Egli osserva che la variazione dell'impulso totale meccanico ed elettromagnetico dev'essere uguale alla somma di tutte le forze esterne agenti.

In questo ordine di studi riveste pure speciale importanza l'aspetto energetico ed infatti quasi tutti i Ricercatori di m. f. d. hanno dedotto e usato il teorema dell'energia e relazioni energetiche sotto varie forme, facendo diverse ipotesi semplificatrici [2].

[1] BOA-TEH-CHU, «The Phys. of Fluids», 2 (1959).

[2] Cfr. ad es. H. WALÉN, «Ark. Mat. Astr.», B. 30-31 (1943);
JR. A. BAÑOS, «Phys. Rev.», 97, 1435-1443 (1955);
R. NARDINI, «Rend. Lincei», ser. VIII, vol. XVIII (1955);
«Le Matematiche», vol. XIII, Catania (1958);
G. CARINI, «Rend. Lincei», ser. VIII, vol. XXV (1958);
«Rend. Lincei», ser. VIII, vol. XXVII (1959);
«Boll. U. M. I.», (4), 14 (1959).

Nella presente nota vogliamo derivare, nella misura in cui ciò sarà possibile, i detti teoremi dell'impulso e dell'energia da un tensore energetico m. f. d..

Nello schema di MINKOWSKI della teoria della relatività speciale il teorema dell'impulso ed il teorema dell'energia si compendiano in quest'unica relazione tetradimensionale ([3])

$$F = -\Delta\mathrm{iv}\,T \qquad \left(\Delta\mathrm{iv}_k T = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ki}\,;\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4\right), \tag{1}$$

ove $F = \left(\mathfrak{F},\ \frac{i}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\mathfrak{F} + Q)\right)$ è la quadridensità di forza, $\mathfrak{F}$ la densità di forza tridimensionale, Q la quantità di calore per unità di volume ed unità di tempo, $\boldsymbol{v}$ la velocità della materia rispetto all'osservatore e c la velocità della luce nel vuoto, mentre

$$T = \left|\begin{array}{c|c} p & ic\boldsymbol{g} \\ \hline \frac{i}{c}\boldsymbol{S} & -W \end{array}\right| \tag{2}$$

è il tensore energetico di MINKOWSKI, p il tensore tridimensionale delle tensioni assolute, $\boldsymbol{g}$ la densità d'impulso, $\boldsymbol{S}$ la densità di corrente d'energia e W la densità d'energia.

La (1) é valida non solo in elettrodinamica ma pure in meccanica e quindi, secondo LAUE, se fenomeni meccanici ed elettromagnetici producono azioni mutue, per la descrizione di detti fenomeni, bisogna introdurre un tensore energetico che è somma del tensore energetico meccanico e di quello elettromagnetico.

In conformità a questo concetto siamo condotti ad introdurre un tensore energetico m. f. d. $T^{(e)} + T^{(m)}$ e a sostituire la (1) con la seguente equazione ([4])

$$\Delta\mathrm{iv}\, T^{(e)} + \Delta\mathrm{iv}\, T^{(m)} = 0, \tag{3}$$

ove qui e nel seguito gli indici (e) ed (m) servono a distinguere gli enti elettromagnetici dai corrispondenti enti meccanici.

Le prime tre componenti di (3) forniscono immediatamente

([3]) M. v. LAUE, *Die Relativitätstheorie*, Bd. I, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 6 Auflage, 1955.

([4]) Cfr. M. v. LAUE, l. c., pag, 147.

l'equazione dell'impulso nella forma di EULERO

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^{(e)}}{\partial t} + \delta\mathrm{iv}\, p^{(e)} + \frac{\partial \boldsymbol{g}^{(m)}}{\partial t} + \delta\mathrm{iv} p^{(m)} = 0 \tag{4}$$

$$\left(\delta\mathrm{iv}_k\, p = \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_i};\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3\right).$$

Se si vuole, ai primi due termini, si può sostituire l'espressione della densità di forza di LORENTZ $\mathfrak{F}^{(e)} = \rho_e \boldsymbol{E}^* + 1/c\boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B}$, cambiata di segno, ove si pone $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \beta \wedge \boldsymbol{B}$, $\beta = \boldsymbol{v}/c$ e si indica con ρ_e la densità di carica elettrica, con $\boldsymbol{E}$ il campo elettrico, con $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica e con $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente elettrica. Inoltre, se supponiamo pure presente una densità di forza esterna di massa $\mathfrak{F}_M$ la (4) assume questa forma più generale

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^{(m)}}{\partial t} = -\,\delta\mathrm{iv}\, p^{(m)} + \mathfrak{F}^{(e)} + \mathfrak{F}_M . \tag{5}$$

Questa equazione, con l'introduzione delle tensioni relative $t_{ki} = p_{ki} - g_k v_i$, la possiamo scrivere nella forma di LAGRANGE [5]

$$\dot{\underline{\underline{g}}}^{(m)} = -\,\delta\mathrm{iv}\, t^{(m)} + \mathfrak{F}^{(e)} + \mathfrak{F}_M, \qquad \left(\dot{\underline{\underline{g_k}}} = \frac{\partial g_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(g_k v_i)\right). \tag{6}$$

Sembrerebbe, a prima vista, possibile poter dedurre il teorema dell'energia della m. f. d. calcolando la quarta componente di (3), ma ciò non è rigorosamente vero se vogliamo tenere conto [6] degli effetti dovuti alle variazioni di velocità $\dot{\boldsymbol{v}}$ e pertanto dedurremo il detto teorema dal seguente sistema di equazioni che si può porre a fondamento dello studio dei fenomeni m. f. d.

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{B}} = -\,c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \\ \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I} + \rho_e \boldsymbol{v} = c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_e, \\ \boldsymbol{D}^* = \varepsilon \boldsymbol{E}^* \quad \boldsymbol{B}^* = \mu \boldsymbol{H}^*, \quad \boldsymbol{I} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}[\boldsymbol{E}^* - \beta(\beta\cdot\boldsymbol{E}^*)], \\ \dot{\underline{\underline{g}}}^{(m)} = -\,\delta\mathrm{iv}\, t^{(m)} + \mathfrak{F}^{(e)} + \mathfrak{F}_M, \\ \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0, \quad \mathfrak{F}(p,\ \rho) = 0, \end{array}\right. \tag{7}$$

[5] Tenendo presente l'equazione di continuità $d\rho/dt + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ e trascurando gli effetti relativistici, si prova facilmente che $\dot{\underline{\underline{g}}} = \rho \boldsymbol{a}$, ove $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione della generica particella materiale.

[6] Cfr. R. NARDINI e G. CARINI, l. c..

ove

$$(8) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \beta \wedge \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \beta \wedge \boldsymbol{D}, \\ \boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D} + \beta \wedge \boldsymbol{H}, & \boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B} - \beta \wedge \boldsymbol{E}, \end{cases}$$

essendo $\boldsymbol{D}$ lo spostamento elettrico, $\boldsymbol{H}$ il campo magnetico, σ la conducibilità elettrica e ρ la densità di materia. La $\mathcal{F}(p, \rho) = 0$ è l'equazione complementare.

Come è ben noto, non si può attribuire validità rigorosa al sistema (7) poichè esso è valido solo per i moti « quasi stazionari ». Quindi le potenze di β, superiori alla prima, sono di scarso interesse. Tuttavia, per seguire, fin dove è possibile, lo schema di calcolo uniforme di MINKOWSKI, ci riserveremo di trascurare le potenze di β solo nella espressione finale del teorema dell'energia

$$(9) \qquad \begin{cases} \dot{W} + \operatorname{div} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{E}^* + \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \boldsymbol{S} - \boldsymbol{g}^{(e)}\right) + \\ + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} p + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot v^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \rho v^2 = \mathcal{F}_M \cdot \boldsymbol{v} \end{cases}$$

valido, in questa forma, solo per i fluidi perfetti.

Al primo membro di (9) ci sono tre termini di natura puramente elettromagnetica, la derivata locale $\dot{W}$ della densità d'energia elettromagnetica, la divergenza del vettore di POYNTING ed il termine $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{E}^*$ che esprime il calore JOULE per unità di tempo e per unità di volume. Poi c'è un termine misto meccanico-elettromagnetico $\dot{\boldsymbol{v}} \cdot (1/c^2 \boldsymbol{S} - \boldsymbol{g})$. Questo è il solo termine del primo membro che non è deducibile dal calcolo della quarta componente della divergenza del tensore energetico m. f. d..

Ciò è facilmente comprensibile perchè, dipendendo da $\dot{\boldsymbol{v}}$, è un termine estraneo alla impostazione rigorosa della teoria della relatività speciale che tiene conto soltanto delle traslazioni rettilinee uniformi.

Il detto termine, in generale, non è nullo a causa dell'asimmetria del tensore di MINKOWSKI. Gli ultimi tre termini del primo membro di (9) sono di natura meccanica e facilmente interpretabili.

Otterremo il teorema dell'energia moltiplicando ambo i membri di (5) scalarmente per $\boldsymbol{v}$

$$(10) \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^{(m)}}{\partial t} + \delta\mathrm{iv}\, p^{(m)}\right) \cdot \boldsymbol{v} - \mathcal{F}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v} = \mathcal{F}_M \cdot \boldsymbol{v}.$$

Trasformiamo il primo termine, limitandoci a considerare il caso particolare dei fluidi perfetti. Ricordiamo, per prima, che, nel caso del fluido perfetto, é

$$\mathrm{\delta iv}\, p^{(m)} = \mathrm{grad}\, p \tag{11}$$

ma questo p non è uno scalare relativisticamente invariante [7] (PLANK) come

$$t\delta_{ik} = p^0 \delta_{ik} = p^0{}_{ik}, \tag{12}$$

ove δ_{ik} è il tensore isotropo fondamentale.

Inoltre [8]

$$\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^{(m)}}{\partial t} = v \frac{\partial}{\partial t} \frac{v}{c^2} \frac{1}{1-\beta^2} (W^0 + p_{11}{}^0) = \tag{13}$$

$$= v \frac{\partial}{\partial t} \frac{v}{c^2} \left[\frac{W^0 + \beta^2 p_{11}{}^0}{1-\beta^2} + p_{11}{}^0 \right] = v \frac{\partial}{\partial t} \frac{v}{c^2} (W + p) = v \frac{\partial}{\partial t} \rho^* v =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \rho^*}{\partial t} \cdot v^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \rho^* v^2,$$

ove si è posto

$$\rho^* = \frac{W}{c^2}\left(1 + \frac{p}{W}\right) = \rho\left(1 + \frac{p}{W}\right). \tag{14}$$

Passiamo alla trasformazione della potenza della densità di forza di LORENTZ per i corpi in moto

$$\mathfrak{F}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v} = \left(\rho_e \boldsymbol{E}^* + \frac{1}{c} \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B}\right) \cdot \boldsymbol{v} = \rho_e \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} + \beta \cdot \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} = \tag{15}$$

$$= (c \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} - \dot{\boldsymbol{D}} - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{E} + \beta \cdot \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} =$$

$$= -\mathrm{div}\, (c\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{H} \cdot c \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} - (\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{I} \cdot \beta \wedge \boldsymbol{B} =$$

$$= -\mathrm{div}\, (c\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}) - (\boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H} \cdot \dot{\boldsymbol{B}}) - \boldsymbol{I} \cdot (\boldsymbol{E} + \beta \wedge \boldsymbol{B}).$$

(7) Con l'indice ^{0} si indicano le grandezze riferite al sistema proprio.

(8) Cfr. M. v. LAUE, l. c., pag. 148.

Adesso poniamo

$$(16)\qquad W=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}),\quad \boldsymbol{S}=c\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{g}^{(e)}=\frac{1}{c}\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B}.$$

Osserviamo che la (16_1), se si tengono presenti le (8) e poi la (7_5) e la (7_6), si può scrivere così

$$(16'_1)\qquad \begin{aligned} W&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{D}^*+\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{B}^*)+\beta\cdot(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}+\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B})-\\ &-\frac{1}{2}(\beta\wedge\boldsymbol{E}\cdot\beta\wedge\boldsymbol{D}+\beta\wedge\boldsymbol{H}\cdot\beta\wedge\boldsymbol{B})=\\ &=\frac{1}{2}(\varepsilon E^{*2}+\mu H^{*2})+\beta\cdot(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}+\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B})-\\ &-\frac{1}{2}(\beta\wedge\boldsymbol{E}\cdot\beta\wedge\boldsymbol{D}+\beta\wedge\boldsymbol{H}\cdot\beta\wedge\boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

Da questa espressione, derivando rispetto al tempo, dopo opportune trasformazioni, abbiamo

$$(17)\qquad \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}+\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}=\dot{W}+\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{g}^{(e)}\right)-A,$$

ove con $A=1/2[\beta\wedge\boldsymbol{D}\cdot(\beta\wedge\boldsymbol{E})^{\cdot}-(\beta\wedge\boldsymbol{D})^{\cdot}\cdot\beta\wedge\boldsymbol{E}+\beta\wedge\boldsymbol{B}\cdot(\beta\wedge\boldsymbol{H})^{\cdot}-(\beta\wedge\boldsymbol{B})^{\cdot}\cdot\beta\wedge\boldsymbol{H}]$ si indica la somma dei termini di ordine superiore rispetto a β.

Dopo ciò otteniamo

$$(18)\qquad -\mathfrak{F}^{(e)}\cdot\boldsymbol{v}=[\dot{W}+\operatorname{div}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{E}^*]+\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{g}^{(e)}\right)-A.$$

Sostituendo le espressioni (11), (13) e (18) nella (10), troviamo l'equazione

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\dot{W}+\operatorname{div}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{E}^*+\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{g}^{(e)}\right)-A+\\ &+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}p+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\rho^*}{\partial t}\cdot v^2+\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\rho^*v^2=\mathfrak{F}_M\cdot\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Da questa, trascurando il termine A di ordine superiore rispetto a β, segue il teorema dell'energia nella forma (9) preannunciata.