Bollettino
Unione Matematica Italiana

Maria Teresa Calapso

Sulle eliche di seconda specie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.3, p. 362–366.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_362_0>

Sulle eliche di seconda specie.

Nota di Maria Teresa Calapso (a Messina)

Sunto. - *Si ripiglia lo studio delle curve dello spazio ordinario per le quali il rapporto delle due curvature vale* $\pm$ i, *con* $i = \sqrt{-1}$ *(eliche di seconda specie). Si liberano le equazioni di queste curve, date precedentemente dallo* Scheffers, *dalle sei quadrature ivi contenute e si pongono vari problemi. Infine, fra le suddette curve si determinano quelle che sono sferiche e fra queste se ne stacca una di equazioni molto semplici.*

1. In una precedente nota (1) abbiamo incontrato incidentalmente le curve dello spazio ordinario (da noi chiamate eliche di seconda specie) per le quali il rapporto delle due curvature, e cioè della flessione e della torsione, vale $\pm i$, con $i = \sqrt{-1}$.

Queste curve, come abbiamo osservato nella suddetta nota, altro non sono che le geodetiche dei cilindri isotropi; ma ciò era stato già rilevato dallo Scheffers, che prima ne aveva messo in vista questa proprietà (2).

Evidentemente, le eliche di seconda specie sono rappresentate dalle equazioni intrinseche

$$\rho = F(s)\,; \qquad T = \pm iF(s) \tag{1}$$

in cui ρ e T sono, rispettivamente, i raggi di prima e seconda curvatura, mentre $F(s)$ indica una funzione arbitraria dell'arco s.

Ad ogni funzione $F(s)$ corrisponde così nel gruppo metrico (ossia a meno di movimenti) una curva della classe in discorso e cambiando la funzione, cambia la curva (3).

Ne segue che, riferito lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, la determinazione della più generale elica di seconda specie si effettua integrando secondo un noto procedimento, le equazioni intrinseche (1), il che dipende, come è noto, da una equazione di Riccati (4).

(1) M. T. Calapso, *Sulle curve a flessione costante*, « Rendiconti della Accademia dei Lincei », serie VIII, vol. XXII, 1957, pag. 438 e seg.

(2) G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene im Raume*, Leipzig, 1901, pag. 224 e pag. 284 e seg.

(3) Per le ipotesi cui deve soddisfare la $F(s)$ vedasi L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Bologna 1927, pag. 18.

(4) V. Bianchi, l. c.

Lo SCHEFFERS spinse fino in fondo questa integrazione e stabilì (⁵) che la più generale curva per la quale il rapporto delle due curvature vale $\pm i$ si rappresenta con le equazioni parametriche:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left[\left(\int\frac{ds}{\rho}\right)^2 - 2\right] ds; \qquad y = -\dfrac{i}{2}\displaystyle\int\left(\int\frac{ds}{\rho}\right)^2 ds \\ z = -\displaystyle\int\int\frac{ds}{\rho}\, ds \end{cases}$$

in cui s è l'arco e ρ (raggio di flessione) è una funzione arbitraria di s.

2. Come si vede nelle formole di SCHEFFERS figurano sei quadrature. Ma possiamo, intanto, ridurre queste quadrature ad una sola ponendo

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho} = f''(s),$$

in cui $f''(s)$ indica la derivata seconda (rispetto ad s) di una funzione arbitraria $f(s)$. In tal modo, avendosi

$$(4)\qquad \int\frac{ds}{\rho} = f'(s),$$

si deducono subito le formole (⁶):

$$(5)\qquad \begin{aligned} x = \frac{1}{2}\int f'^2\, ds - s; \qquad y = -\frac{i}{2}\int f'^2 ds \\ z = -f \end{aligned}$$

e resta così l'unica quadratura $\int f'^2 ds$. Ma non sembra che questa si possa eliminare facilmente con artifizi del genere, nè sembra immediata l'ulteriore deduzione di formole *senza quadrature*, come quelle di cui parliamo al seguente n. 3.

3. Precisamente, si riconosce che la più generale elica di seconda specie, a doppia curvatura, è rappresentata dalle equazioni

(⁵) SCHEFFERS, l. c., pag. 224 e nota citata in (²).

(⁶) Formole analoghe a quelle di SCHEFFERS, valevoli per tutte le eliche (comprese quelle di seconda specie) ha dato C. SAVASTA, nelle note: *I) Una notevole classe di geodetiche. II) Sulle eliche cilindriche*, « Atti della Società peloritana di scienze ecc. », vol. III. fasc. IV, anno 1956-57.

parametriche

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\varphi'' - t\varphi' + \varphi \\ y = -i\left(\frac{t^2}{2}\varphi'' - t\varphi' + \varphi\right) \\ z = -t\varphi'' + \varphi' \end{cases}$$

in cui t è il parametro, mentre $\varphi = \varphi(t)$ indica una funzione (analitica) arbitraria della variabile t, la cui derivata terza non sia identicamente nulla, e gli apici denotano derivate rispetto a t.

Ad ogni siffatta funzione $\varphi = \varphi(t)$ corrisponde nel gruppo metrico un'elica di seconda specie e al variare della φ si ottengono tutte queste eliche.

L'arco s della curva in discorso (6) è dato, a meno di una costante additiva, dalla formola

$$(7)\qquad s = \varphi''$$

mentre per i raggi di prima e seconda curvatura (e cioè di flessione e di torsione) si ha, rispettivamente

$$(8)\qquad \rho = \pm\varphi''' ; \qquad T = \pm i\varphi'''$$

donde segue

$$(9)\qquad \rho = \pm iT, \quad \text{ossia} \quad \rho^2 + T^2 = 0.$$

Si noti che

$$(10)\qquad \rho = \pm s'.$$

4. Per dimostrare che le (6) dànno la più generale elica di seconda specie (a doppia curvatura), basta osservare in primo luogo che, comunque si assegni la funzione φ, le suddette equazioni danno sempre un'elica di seconda specie, perchè risulta in ogni caso $\rho = \pm iT$. Inoltre, si può disporre della funzione arbitraria $\varphi(t)$, in guisa che il raggio di flessione risulti uguale ad una funzione $F(t)$, data comunque a priori e non identicamente nulla. Basta allo scopo integrare, rispetto alla funzione incognita φ, l'equazione

$$(11)\qquad \varphi''' = F(t),$$

e con ciò la nostra affermazione è dimostrata ([7]).

([7]) Dimostrazioni analoghe si possono fare dei teoremi da noi dati nella prima e nell'ultima pagina della nota citata in ([1]).

L'ipotesi, poi, per la φ di avere la derivata terza non identicamente nulla porta di conseguenza, per le (8), che la corrispondente elica di seconda specie è effettivamente a doppia curvatura. D'altra parte, si vede subito che se la funzione φ ha la derivata terza identicamente nulla (il che accade solo quando la φ è un polinomio di secondo grado in t, o di primo, o costante) la curva (6) si riduce a un punto.

5. Con riferimento alle (6), se imponiamo, per es., che la flessione risulti costante (e quindi costante anche la torsione) si deduce per la funzione φ l'equazione

$$\varphi''' = \text{costante} \neq 0. \tag{12}$$

Ne segue che φ è un polinomio di terzo grado in t (a coefficienti costanti) e le (6) dànno, a meno di movimenti, la cubica di Lyon, di cui alla nostra precedente nota [8].

Se poi vogliamo eliche di seconda specie *razionali*, basta assumere nelle (6) per la φ una qualunque funzione razionale (intera o fratta) della variabile t. Si hanno così, immediatamente, infinite eliche di seconda specie razionali, e di qualunque ordine. Per es., per $\varphi = t^n$ (n intero arbitrario costante) si ha la curva:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\, t^n - n(n-1)t^{n-2} \\[2ex] y = -\, i\, \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\, t^n \\[2ex] x = -\, n(n-2)t^{n-1}. \end{cases} \tag{13}$$

Altre curve, indipendentemente dalla suddetta razionalità, si hanno dalle stesse (13) per n complesso qualunque (costante).

6. Le (2) permettono di risolvere immediatamente il problema di determinare le eliche di seconda specie la cui curvatura $\dfrac{1}{\rho}$ risulti uguale ad un polinomio in s (arco della curva), a coefficienti costanti, dato comunque.

Analogo problema si può porre per il raggio di curvatura sia in relazione alle (2) che alle (6). Ma vi sono questioni in cui è preferibile, senza dubbio, ricorrere alle (6). Queste formole, per es., si prestano a risolvere il seguente problema:

Determinare le eliche di seconda specie, che siano altresì curve sferiche.

[8] V. l. c. in [1], pag. 439.

Basta, allo scopo, imporre che le funzioni x, y, z, date dalle (6), soddisfino identicamente ad una equazione della forma:

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=R^2 \tag{14}$$

in cui c_1, c_2, c_3, R sono costanti ed indicano le coordinate del centro ed il raggio della sfera cui deve appartenere la curva.

Dalla (14), a calcoli fatti, si deduce intanto che la funzione φ deve soddisfare all' equazione:

$$\varphi''=\varphi+\frac{c_1-ic_2}{2}t^2-c_3t-c_1 \tag{15}$$

il cui integrale generale è:

$$\varphi=k_1e^t+k_2e^{-t}-\frac{c_1-ic_2}{2}t^2+c_3t+ic_2 \tag{16}$$

con k_1 e k_2 costanti arbitrarie.

Inversamente, assegnate comunque le coordinate c_1, c_2, c_3 del centro della sfera e le costanti k_1 e k_2, le (6) danno, in corrispondenza alla funzione φ, data dalla (16), un'elica di seconda specie *sferica* e il raggio della sfera dipende soltanto dalle costanti k_1 e k_2. Esso è dato dalla formola:

$$R^2=-4k_1k_2, \tag{17}$$

che si deduce dalla (14). Pertanto:

Su ogni sfera esistono ∞^1 eliche di seconda specie.

Di particolare semplicità è il caso in cui si scelgano per le suddette costanti i valori:

$$c_1=c_2=c_3=0\,;\quad k_1=\frac{1}{2},\quad k_2=-\frac{1}{2},\ \text{donde}\quad R^2=1. \tag{18}$$

La funzione φ è allora:

$$\varphi=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\operatorname{senh} t \tag{19}$$

e le (6) danno l'elica di seconda specie (rappresentata col nuovo parametro $u=it$):

$$\begin{cases} x=i\left(\dfrac{u^2}{2}\operatorname{sen} u+u\cos u\right) \\ y=\left(-\dfrac{u^2}{2}+1\right)\operatorname{sen} u-u\cos u \\ z=u\operatorname{sen} u+\cos u \end{cases} \tag{20}$$

che appartiene alla sfera:

$$x^2+y^2+z^2=1. \tag{21}$$