Bollettino Unione Matematica Italiana

George Vranceanu

Sopra una caratterizzazione delle metriche naturali degli spazi sferici e proiettivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.3, p. 357–361.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_357_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sopra una caratterizzazione delle metriche naturali degli spazi sferici e proiettivi.

Nota di GEORGE VRANCEANU (a Bucarest)

Sunto. - *È ben noto che data una varietà differenziabile, essa si può dotare secondo un risultato di* WHITNEY, *con una metrica di* RIEMANN *definita positiva di classe* C^{∞} *in una infinità di modi. Si sa altresì che uno spazio sferico ed uno spazio proiettivo reale, complesso o quaternionico, si può dotare con una metrica, che si chiama anche metrica naturale, metrica che per lo spazio sferico si ottiene per proiezione stereografica della sfera, mentre per lo spazio proiettivo reale essa si ottiene per proiezione centrale della sfera. Si mostra qui come si possono caratterizzare queste metriche naturali, utilizzando solamente elementi interni della geometria di questi spazi definiti come varietà differenziabili.*

I

Consideriamo in primo luogo lo spazio sferico. Questo spazio può essere definito come varietà differenziabile da due vicinanze $V(x^1, \ldots, x^n)$ e $V'(x'^1, \ldots, x'^n)$ la trasformazione di variabile tra i punti comuni di queste vicinanze essendo data dalla inversione

$$x'^i = \frac{x^i}{r^2}, \qquad (r^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2). \tag{1}$$

Infatti si possono prendere come le due vicinanze V, V' quelle che si ottengono per proiezione stereografica della sfera S_n

$$(y^1)^2 + \ldots + (y^{n+1})^2 = 1 \tag{2}$$

situata nello spazio euclideo E_{n+1}, da due punti opposti $N(0, \dots, 0, 1)$ e $S(0, \dots, 0, -1)$, sopra il piano equatoriale. Se prendiamo come punto di proiezione N, abbiamo

$$y^i = \frac{2x^i}{1 + r^2}, \quad y^{n+1} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \tag{3}$$

così che la metrica di E_{n+1}

$$ds^2 = (dy^1)^2 + \dots + (dy^{n+1})^2 \tag{4}$$

induce nella vicinanza V di S_n la metrica naturale [1]

$$ds^2 = \frac{4(dx^i)^2}{(1 + r^2)^2}, \quad ((dx^i)^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2) \tag{5}$$

metrica che rimane invariante per una trasformazione (1), dunque la metrica ha la stessa forma nelle due vicinanze V, V' che definiscono lo spazio sferico.

Osserviamo adesso che la metrica (5) ha in V una simmetria sferica e cioè non cambia se facciamo una rotazione di assi col centro nell'origine. D'altra parte una metrica in V, che ha questa proprietà si scrive

$$ds^2 = a(\rho)(dx^i)^2 + b(\rho)(x^i dx^i)^2, \quad [\rho = 1 + r^2]. \tag{6}$$

Questa risulta da un teorema di WEYL che ci dice che dato un sistema di vettori, i soli invarianti che essi posseggono rispetto al gruppo ortogonale, sono le lunghezze ed i prodotti scalari. Nel nostro caso i vettori sono x^i e dx^i dunque i loro invarianti sono

$$r^2, \ (dx^i)^2, \ x^i dx^i \tag{7}$$

fatto che ci conduce alla formula (6).

Dunque data nella vicinanza V una metrica (6) con simmetria sferica supposta regolare in tutta V, ci possiamo domandare in che condizioni essa si estende regolarmente anche alla vicinanza

(1) Vedasi G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, Bucarest, 1957, vol. II. cap. VI.

V'. Per questo osserviamo che le quantità (7) si trasformano per le (1) secondo le formule

$$r'^2 = \frac{1}{r^2}, \quad (dx'^i)^2 = \frac{(dx^i)^2}{r^4}, \quad x'^i dx'^i = -\frac{x^i dx^i}{r^4} \tag{8}$$

ciò che ci conduce alle formule

$$\rho' = \frac{\rho}{r^2}, \quad a' = ar^4, \; b' = br^8 \tag{9}$$

e perciò abbiamo

$$a'\rho'^2 = a\rho^2, \; b'\rho'^4 = b\rho^4. \tag{10}$$

Ne risulta dunque che $a\rho^2$, $b\rho^4$ sono degli invarianti rispetto alla trasformazione (1) e la metrica (6) è regolare anche in V', se abbiamo

$$\lim_{\rho \to \infty} a\rho^2 = k, \quad \lim_{\rho \to \infty} b\rho^4 = l \tag{11}$$

dove k, l sono costanti finite e dove $k > 0$.

Ne risulta altresì che la metrica (6) è invariante nelle due vicinanze V, V' se essa si scrive

$$ds^2 = \frac{k}{\rho^2} \{ (dx^i)^2 + \frac{l(x^i dx^i)^2}{\rho^4} \tag{12}$$

che coincide astrazione fatta di un fattore costante con la metrica naturale (5), se $l = 0$, ossia se la metrica è conforme allo spazio euclideo $E_n(x^1, \dots, x^n)$.

Abbiamo dunque il teorema:

La metrica naturale (5) *dello spazio sferico è caratterizzata dal fatto di essere con simmetria sferica nella vicinanza* $\mathrm{V}(\mathrm{x}^1, \dots, \mathrm{x}^n)$, *di essere conforme allo spazio euclideo* $\mathrm{E}_n(\mathrm{x}^1, \dots, \mathrm{x}^n)$, *e di essere la stessa per le due vicinanze* V *e* V'.

II

Consideriamo adesso lo spazio proiettivo P_n. Questo spazio è definito come varietà differenziabile da $n+1$ vicinanze V, $V^1, \dots,$

V^n. Se indichiamo con $x^1, \ldots, x^n$ le coordinate di V e con $x'^1, \ldots, x'^n$ le coordinate di V^1, la trasformazione di coordiuate nei punti comuni di V e V^1 è data dalle formule

$$x'^1 = \frac{1}{x^1}, \ldots, x'^i = \frac{x^i}{x^1}, \quad (i = 2, \ldots, n) \tag{13}$$

mentre la trasformazione di coordinate da V a V^α $(\alpha > 1)$ è data dalle formule (13) dove il ruolo di x^1 è preso dalla variabile x^α.

Si sa che per proiezione centrale della sfera su un piano tangente si ottiene la metrica naturale

$$\psi = \frac{(dx^i)^2}{\rho} - \frac{(x^i dx^i)^2}{\rho^2} \tag{14}$$

che ha la stessa forma per tutte le vicinanze V^i.

Per avere una caratterizzazione di questa metrica supponiamo anche in questo caso che nella vicinanza V abbiamo una metrica con simmetria sferica (6). Si può scrivere questa metrica sotto la forma

$$ds^2 = A(\rho)\psi + B(\rho)(x^i dx^i)^2 \tag{15}$$

dove ψ è dato precisamente dalla formula (14).

Considerando adesso le formule inverse delle (13)

$$x^1 = \frac{1}{x'^1}, \quad x^i = \frac{x'^i}{x'^1}$$

si trovano facilmente le formule

$$\psi' = \psi, \quad \rho = \frac{\rho'}{(x'^1)^2}, \quad x^i dx^i = \frac{x'^i dx'^i}{(x'^1)^2} - \rho' \frac{dx'^1}{(x'^1)^3}.$$

Ne risulta in primo luogo che la metrica (15) non è più con simmetria sferica nelle variabili x'^i, che nel caso in cui $B(\rho) = 0$. Ne risulta altresì che la metrica (15) è regolare per x'^1 tendente a zero, dunque per ρ tendente all'infinito se abbiamo

$$\lim_{\rho \to \infty} A(\rho) = k > 0, \qquad \lim_{\rho \to \infty} B(\rho)\rho^3 = l$$

dove k e l sono delle costanti finite. Dunque la metrica (15) rimane la stessa anche per la vicinanza V' se $A(\rho)$ è una costante e se $B(\rho) = 0$. Abbiamo così il teorema:

La metrica naturale dello spazio proiettivo P_n *è caratterizzata dal fatto di essere con simmetria sferica nella vicinanza* V *e di rimanere invariante per le altre vicinanze* V^α.

Consideriamo adesso lo spazio proiettivo complesso P_{2n}. Questo spazio può anche lui essere definito da $n+1$ vicinanze. Se indichiamo con z^h le coordinate complesse nella vicinanza V e con z'^h le coordinate complesse nella vicinanza V', la trasformazione di coordinate è data dalle formule

$$z'^1 = \frac{1}{z^1}, \quad z'^h = \frac{z^h}{z^1}$$

e formule analoghe per le altre vicinanze.

La metrica naturale dello spazio proiettivo è data dalla formula

$$\Phi = \frac{dz^h d\bar{z}^h}{\rho} - \frac{z^h d\bar{z}^h \bar{z}^k dz^k}{\rho^2}, \qquad (\rho = 1 + z^h \bar{z}^h)$$

dove $\bar{z}^h$ sono le quantità coniugate.

Questa metrica si può chiamare con simmetria simplettica, il gruppo che lascia invariante questa metrica essendo il gruppo simplettico, gruppo definito dalle formule

$$z'^h = a_k{}^h z^k, \quad a_k{}^h \bar{a}_l{}^h = \delta_l{}^k.$$

Ne risulta allora che prendendo nella vicinanza $V(z^1, \ldots, z^n)$ una metrica generale con simmetria simplettica

$$ds^2 = A(\rho)\Phi + B(\rho)\frac{z^h d\bar{z}^h \bar{z}^k dz^k}{\rho^2}$$

questa metrica rimane invariante per le altre vicinanze se $B(\rho)$ è nulla e $A(\rho)$ è una costante, dunque il teorema dato per lo spazio proiettivo reale P_n si estende allo spazio proiettivo complesso P_{2n} considerando metriche con simmetria simplettica. Il risultato è valido anche per spazi proiettivi quaternionici e cioè per cui le coordinate z^h sono numeri quaternionici.