Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* G. Alexits, Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1960 (Giovanni Sansone)
* P. Février, L'interpretation physique de la mécanique ondulatoire et des théories quantiques, Gauthier-Villars, Paris, 1956 (Antonio Pignedoli)
* B. L. Van Der Waerden, Albegra, zweiter Teil, Springer, Berlin, 1959 (Maria Tallini Scafati)
* Denis Diderot, Interpretazione della Natura, Boringhieri, Torino,1959 (Tullio Viola)
* Hua Loo-Keng, Additive Primzahltheorie, Teubner, Leipzig, 1959 (Marco Cugiani)
* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Cambridge University Press, 1960 (Luigi Gatteschi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 291–304.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_291_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

RECENSIONI

G. ALEXITS: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1960), pp. 307.

È noto che il classico volume del DINI « Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale » del 1880 e i due volumi di E. Heine « Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen » del 1878, rappresentarono fino ai primi anni del novecento i due trattati ai quali gli studiosi fecero riferimento in molte questioni di matematica pura ed applicata.

Il successivo progresso realizzato dell'Analisi con l'introduzione dell'integrale di LEBESGUE e di quello di STIELTJES e la necessità di considerare le serie di funzioni ortogonali sia dal punto di vista di FOURIER che di quello di RIEMANN influirono naturalmente sulla trattatistica.

Alle serie di FOURIER, alle serie trigonometriche in generale, alle serie di funzioni sferiche furono dedicati i volumi e le monografie di H. LEBESGUE (1906), E. W. HOBSON (1907; 1931), L. TONELLI (1928), A. ZIGMUND (1935; ed. inglese in due volumi 1954).

Le serie di BESSEL furono ampiamente trattate nel volume di G. N. WATSON « A treatise of theory of Bessel functions » del 1922 e alcune classi di sviluppi in serie di funzioni ortogonali trovansi nei volumi di G. SANSONE (1934; trad. inglese 1959), e F. TRICOMI (1948, trad. tedesca 1955) apparsi successivamente.

Il ben noto volume di G. SZEGÖ « Orthogonal Polynomials » (1933) e quello di S. KACZMARZ « Theorie der Orthogonalreihen » (1935) ampliato e tradotto in russo da R. S. GUTER e P. L. ULJANOW (1958) presentano la materia classificata in ampi capitoli i quali con l'inquadramento dei risultati più recenti avviano lo studioso alla ricerca originale. Va pure ricordata « A bibliography on orthogonal polinomials » di J. A. SHOHAT, E. HILLE, J. L. WALSH aggiornata al 1940, che per gli specialisti rappresenta un prezioso strumento di consultazione.

Ai volumi ricordati si aggiunge ora quello in lingua tedesca di G. ALEXITS « Konvergenz probleme der Orthogonal reihen » stampato in splendida veste tipografica dalla Ungarischen Akademie der Wissenschaften di Budapest. L'ALEXITS, appartenente alla schiera dei valorosi analisti ungheresi formatasi alla scuola di L. FEJÉR, e che dal 1928 a oggi ha compiuto con grande successo significative ricerche originali sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali, ci presenta un'artistica trattazione di questa materia; egli, lavorando in profondità, espone in questo suo volume teoremi basilari anche conseguiti di recente, e prospetta in ogni occasione questioni che attendono una risposta.

Il volume contiene quattro Capitoli. Nel primo sui « Concetti fondamentali ed esempi di serie ortogonali » suddiviso in sette paragrafi, sono passate in rassegna le principali proprietà delle serie $\sum_{1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ ove $\{\varphi_n(x)\}$ è un sistema ortogonale rispetto alla funzione determinante $\mu(x)$, proprietà in massima parte imperniate sul teorema di RIESZ-FISCHER. Sono in particolare considerati i polinomi di JACOBI, di TCHEBICHEF, e i sistemi ortogonali di A. HAAR, H. RADEMACHER, J. L. WALSH. Giusto risalto è dato al criterio di convergenza dello sviluppo in serie di polinomi di una funzione che soddisfa ad una condizione di DINI-LIPSCHITZ.

Molto ricco è il secondo capitolo, suddiviso in undici paragrafi, dedicato alla convergenza delle serie di funzioni ortogonali considerate dal punto di vista Riemanniano.

È ben posto in evidenza il fondamentale teorema di A. RADEMARCHER (1922) e D. MENCHOFF (1923) sulla convergenza quasi ovunque delle serie per le quali $\sum_{1}^{\infty} c_n^2(\log n)^2 < \infty$. Pure studiato è il caso di $\sum_{1}^{\infty} c_n^2(\log n)^2 = \infty$ che si apre con un risultato di K. TANDORI (1957) relativo alle serie in cui le c_n sono positive decrescenti.

La convergenza incondizionata delle serie $\sum^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ è dimostrata nel caso di $\sum_{1}^{\infty} c_n^{2-\alpha_n} < \infty$, $\alpha_n > (4+\varepsilon)\dfrac{\log\log n}{\log n}$, $\overset{n-1}{\varepsilon > 0}$.

I teoremi generali sulla sommazione (C, ν) e su quella di ABEL-POISSON premessi all'inizio del Capitolo, sono applicati alle nostre serie con particolare riguardo a quelle con coefficienti monotoni.

L'ultimo paragrafo si apre con un teorema di A. A. TALALYAN (1956) sulle così dette successioni universali $\{f_n(x)\}$ definite in $[0, 1]$, misurabili nel senso di LEBESGUE, e tali che ogni funzione misurabile in $[0, 1]$ può considerarsi quasi ovunque limite di una successione di combinazioni lineari delle $f_n(x)$.

Il Capitolo terzo, suddiviso in sei paragrafi, è dedicato alle così dette funzioni di LEBESGUE. Se $\{\varphi_n(x)\}$ è un sistema ortonormale in $[a, b]$ le funzioni $K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x)$,

$$K_n^\alpha(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha}\varphi_k(t)\varphi_k(x), \qquad A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$$

sono i ben noti nuclei della sommazione ordinaria e della sommazione (C, α), e le funzioni

$$L_n(x) = \int_a^b |K_n(t, x)|\, d\mu(t), \qquad L_n^\alpha(x) = \int_a^b |K_n^\alpha(t, x)|\, d\mu(t)$$

chiamansi *funzioni di* LEBESGUE, che primo le introdusse nel 1906 nelle sue « Leçons sur les séries trigonométriques ».

Il comportamento delle $L_n(x)$, $L_n^\alpha(x)$ giuoca un ruolo importante nello studio della convergenza delle nostre serie. Ad es. sussiste un teorema di questo tipo: Se in un insieme $E \subset [a, b]$ è soddisfatta la condizione $L_n(x) = 0(\lambda_n)$ ove $\{\lambda_n\}$ è una successione non decrescente di numeri positivi tale che $\sum_{1}^{\infty} c_n^2\lambda_n^2 < \infty$, allora la serie $\sum_{0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ converge quasi ovunque in E.

Trovansi anche in questo terzo Capitolo altri teoremi di convergenza dello stesso ALEXITS (1944, 1953, 1958), di B. SZŐKEFALVI-NAGY (1951), K. TANDORI (1951), A. ZIGMUND (1932).

Sono pure da notare in questo Capitolo, come del resto negli altri tre, alcune precisazioni sugli enunciati dei teoremi le cui ipotesi sono da ritenersi quasi necessarie per la validità delle tesi.

Il quarto Capitolo, su otto paragrafi, tratta i problemi classici di convergenza delle serie ortogonali. Richiamate alcune proprietà degli spazi di BANACH e sui funzionali lineari, l'A. stabilisce il teorema di S. BANACH-

H. STEINHAUS (1927) sull'ordine di grandezza dei coefficienti degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali; dimostra alcuni teoremi di convergenza puntuale e uniforme, di divergenza, deducendoli dall'esame dei così detti integrali singolari; considera la sommabilità delle serie nel caso di funzioni continue in un intervallo, ed espone alcuni teoremi anche recenti [S. G. KREIN - B. J. LEWIN (1948), K. TANDORI (1953-1954)] fondati sulla considerazione dei così detti punti x di LEBESGUE nei quali $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} | f(t) - c \,|\, dt = 0$, ($c =$ costante).

Sono ancora in questo Capitolo: alcuni risultati sulla teoria delle approssimazioni lineari e sulle proprietà di approssimazione di un sistema ortogonale, oggi inquadrate nella così detta « teoria costruttiva delle funzioni »; teoremi di convergenza strutturale collegati col modulo di continuità; le relazioni tra la convergenza assoluta delle serie $\sum_0^\infty c\varphi_n(x)$ in un insieme di misura positiva, o quasi ovunque, e la convergenza della serie $\sum_0^\infty | c_n |$

Chiude il volume l'indice bibliografico e quello della materia e degli autori citati.

Concludendo bisogna essere grati all'Autore che ci ha dato un'opera la quale rappresenta un nuovo e significativo contributo della scuola matematica magiara alla trattatistica matematica.

GIOVANNI SANSONE

P. FÉVRIER, *L'interpretation physique de la mécanique ondulatoire et des théories quantiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1956, vol. in 8 di pag. 216, 3200 franchi.

Com'è noto, nello sviluppo storico della Fisica, anche molto prima del delinearsi delle teorie quantistiche, era emerso il problema della correzione delle leggi puramente deterministiche mediante la loro sostituzione con leggi di media su folle di particelle o di sistemi di particelle. Tale evoluzione aveva trovato la propria origine nella grande scoperta di *Boltzmann*, in virtù della quale il secondo principio della Termodinamica è una legge avente validità soltanto statistica. E le leggi deterministiche dovevano apparire, in tale evoluzione, come inferite dalle regolarità del mondo macroscopico e valutate, dunque, come delle estrapolazioni, un limite alla validità delle quali veniva senz'altro posto dalla constatazione della compatibilità delle regolarità macroscopiche con le irregolarità microscopiche attraverso la legge di Bernoulli « dei grandi numeri ».

Con l'avvento della Meccanica quantistica ed in virtù, soprattutto, del principio di indeterminazione di Heisenberg e del principio di complementarità di Bohr, apparve necessario affermare che, ancorando le osservazioni sul mondo fisico a fatti effettivamente *osservabili*, almeno con esperienze concettuali, fra gli stati fisici si possono stabilire soltanto delle relazioni probabilistiche, la cui corretta espressione è quella di una implicazione di probabilità fra le condizioni iniziali e quelle finali. Ma il problema della interpretazione fisica della Meccanica odulatoria e dei corpi di dottrina quantistici in generale è oggi tutt'altro che definitivamente risolto e costituisce, comunque, questione di piena attualità. Una spinta fondamentale per il riesame della interpretazione probabilistica di Bohr, Born, Heisenberg e Pauli della meccanica ondulatoria e delle teorie quantistiche in generale è stata data dai lavori di L. De Broglie, soprattutto con la teoria « dell'onda pilota » e della « doppia soluzione », e da quelli di D. Bohm e di J. P. Vigier. Ed è certo che l'ergersi di una interpretazione di fronte all'altra subordina, anzi rende indispensabile, un profondo esame critico delle concezioni fondamentali della Fisica e delle questioni metodologiche. A questo scopo è diretto il volume del quale ci stiamo occupando.

L'opera ha inizio con un capitolo dedicato ad uno studio della nozione di « adeguatezza » di una teoria fisica e delle condizioni di cambiamento di una dottrina in Fisica teorica. Il cambiamento di una teoria è un fatto normale; per quanto riguarda la nozione di « adeguatezza », si conclude che essa non è mai nè totale nè perfetta, ma che esiste un « dominio di adeguatezza » nel quale sussisterà l'accordo fra la teoria e l'esperienza.

Il secondo capitolo è dedicato ad una esposizione riassuntiva della teoria generale delle previsioni di J. L. Destouches con la classificazione delle teorie fisiche nelle due grandi famiglie costituite dalle teorie « oggettive » (caso delle teorie classiche) e dalle teorie « soggettive » (caso delle teorie quantiche). Nel terzo capitolo, viene dimostrato il teorema, stabilito dall'autrice, della « decomposizione spettrale ». Risulta che, per una teoria « soggettiva », è necessariamente valido il principio della decomposizione spettrale, per cui una tale dottrina può essere chiamata « teoria ondulatoria in senso generalizzato ». Nel quarto capitolo viene messo in evidenza il fatto che una meccanica ondulatoria o, più in generale, una teoria essenzialmente indeterministica, è una « teoria aperta » o, come si può anche dire, « incompleta », nel senso che essa può sempre non considerare delle « variabili nascoste ». Tenendo conto di tali variabili, si otterrebbe una teoria più completa, la quale, però, avrebbe sempre carattere aperto. (Ciò contrariamente alle teorie deterministiche, le quali presentano, invece, carattere di completezza). Ne discende l'affermazione secondo la quale non è possibile costruire una teoria deterministica capace di descrivere adeguatamente i fenomeni quantici facendo ricorso alla introduzione di « variabili nascoste ». I capitoli dal quinto al settimo compreso sono dedicati al confronto fra l'interpretazione « realistica » delle teorie quantistiche e quella interpretazione « fenomenistica » che si basa sulla teoria delle previsioni. Si mette in luce il carattere di relatività del « determinismo » e dell'« indeterminismo », nel senso che ogni teoria previsionale fenomenistica può essere trasformata in una teoria realista mediante un cambiamento di sistema fisico ed un ricorso a variabili inaccessibili all'esperienza, e viceversa.

L'opera, che consta di dieci capitoli più una ampia indicazione bibliografica, si conclude con tre capitoli dedicati alle « teorie funzionali » dei corpuscoli, cioè a quelle teorie nelle quali un corpuscolo viene rappresentato mediante una funzione di punto. Precisamente un carpuscolo viene rappresentato con una funzione u, detta « onda fisica » cui può essere associato un fluido continuo classico in moto irrotazionale, la cui densità è legata a $|u|$ e la cui velocità è legata ad argu. Il corpuscolo può, dunque, essere pensato come un piccolo globo fluido. Nel formalsimo generale della teoria, che può essere considerato simile a quello della meccanica ondulatoria, le funzioni d'onda sono sostituite da dei funzionali. Il « dominio di adeguatezza » della teoria in questione e più ampio che non quello della meccanica odulatoria. Alla teoria funzionale dei corpuscoli possono essere associate rappresentazioni realistiche deterministiche, riconnettendosi in questo con la teoria di De Broglie della doppia soluzione, che considera i corpuscoli contemporaneamente come tali e come onde.

ANTONIO PIGNEDOLI

B. L. Van Der Waerden, *Algebra, zweiter Teil (vierte Auflage der modernen Algebra*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 34; Berlin J. Springer, 1959, pp. X + 275; D. M. 29, 60).

La seconda parte del noto trattato di Algebra del Van der Waerden è da poco giunta alla sua quarta edizione, facendo seguito alla quarta edizione della prima parte, apparsa nel 1955. Della prima e della seconda edizione dell'opera è già stato scritto a suo tempo in questo periodico (cfr. Boll. U.M.I. 10 (1931), pag. 239; (4) 25 (1942), pag. 61). Dato che le caratteristiche fondamentali del volume sono rimaste sostanzialmente immutate, nella presente recensione non indugeremo nell'esporre in dettaglio il contenuto del volume stesso; metteremo piuttosto in luce qualche innovazione nella sostanza e nella forma che l'attuale edizione presenta.

Tutta la materia trattata si sviluppa in otto capitoli che — proseguendo la numerazione relativa alla prima parte — vanno dall'undicesimo al diciottesimo capitolo. L'undicesimo è stato completamente aggiunto rispetto all'edizione precedente e riguarda la teoria delle funzioni algebriche di una variabile, comprendendo anche il fondamentale teorema di Riemann-Roch. Il dodicesimo capitolo, pur esso aggiunto nella nuova edizione, concerne l'algebra topologica e tratta precisamente la teoria dei gruppi completi, sviluppando più in particolare la teoria dei corpi topologici localmente compatti.

Segue un capitolo sulla teoria generale degli ideali e degli anelli commutativi, che è stato ampliato con l'aggiunta dell'importante teorema di Krull sulle potenze simboliche degli ideali primi e sulle catene di ideali primi. Il quattordicesimo capitolo concerne la teoria degli ideali di polinomi; nel quindicesimo — sugli interi algebrici — si sviluppano i legami fra la teoria degli ideali negli anelli integralmente chiusi e la teoria della valutazione. Il capitolo successivo riguarda l'algebra lineare. Il diciassettesimo contiene i fondamenti della teoria delle algebre commutative e non commutative Ambedue i precedenti capitoli sono stati arricchiti di nuovi argomenti: fra l'altro di un paragrafo sulle forme bilineari antisimmetriche e di un altro ove sono sviluppate le idee fondamentali di E. Noether sulle somme dirette e sulle intersezioni di moduli. Il diciottesimo ed ultimo capitolo riguarda la teoria della rappresentazione dei gruppi e delle algebre, ed è stato completamente riscritto a vantaggio di una maggior chiarezza e semplicità di esposizione.

È interessante uno schema sulla dipendenza logica dei vari argomenti trattati nelle due parti dell'opera, che è posto all'inizio di questo secondo volume. Molto dettagliato e completo è l'indice analitico e degli Autori.

Concludendo, si può senz'altro affermare che l'opera del Van der Waerden costituisce ormai un classico nel campo dell'algebra astratta che, attraverso le successive edizioni, non soltanto ha subito un continuo perfezionamento per quanto riguarda la chiarezza e la semplicità di esposizione, ma si è anche progressivamente aggiornato, tenendo conto dei nuovi risultati via via conseguiti nei singoli rami dell'algebra. Per tutto ciò il volume è quindi uno strumento quanto mai utile per chi si dedichi alla ricerca scientifica, ed anche un testo di accessibile e proficua consultazione per chi abbia in generale interesse alle scienze matematiche.

Maria Tallini Scafati

DENIS DIDEROT: *Interpretazione della Natura*, Edit. Boringhieri, Torino, 1959.

Non si può dire che il celebre ideatore, organizzatore e direttore della non meno celebre Enciclopedia, abbia lasciato tracce di sè come matematico. I pochi storici che accennano a Lui come tale (lo stesso M. CANTOR non è fra questi!), esprimono un giudizio severo, forse eccessivamente severo. Quello del LORIA: « ... una persona che aveva tentato invano di farsi un nome pubblicando una mediocre raccolta di *Mémoires Mathématiques*, ... una sola delle quali riguarda la matematica propriamente detta, trattando della sviluppante o evolvente di circolo » (1), ci ha sorpresi ed indotti ed esaminare con cura quelle memorie. Ne abbiamo tratta un'impressione tutt'altro che di mediocrità. Intanto, oltre alla memoria di cui parla il LORIA, ve ne sono altre due riguardanti « la matematica propriamente detta »: l'una intitolata « *Principes généraux d'acoustique* », l'altra « *Lettre sur la résistance de l'air aux mouvements des pendules* ». Quest'ultima è particolarmente interessante, contenendo un'analisi critica di alcune pagine oscure dei *Principi* di NEWTON, con la proposta di perfezionare certe esperienze di questo sull'urto reciproco di pendoli oscillanti, tenendo conto della resistenza dell'aria. Oltre alle dette memorie, le opere del DIDEROT contengono altre numerose pagine di filosofia matematica, fra le quali emergono quelle dedicate al calcolo delle probabilità (in polemica col D'ALEMBERT), che varrebbe la pena di riprendere e meditare (forse non soltanto dal punto di vista storico), e la « *Lettre sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient* ». In questa lettera, che VOLTAIRE giudica « ingegnosa e profonda », l'Autore fa ragionare il matematico inglese SAUNDERSON, cieio nato, entrando così addentro in questioni di psicologia e di fisiologia, che non indegnamente, a nostro parere, la si potrebbe avvicinare alle celebri e fondamentali ricerche dell'HELMHOLTZ.

Certo fu fatale al DIDEROT il paragone con un genio matematico come il D'ALEMBERT, paragone cui Egli non potè sfuggire per la comunanza di lavoro, d'interessi, di lotta politica. Gli nocquero certi giudizi superficiali sulla matematica, alcuni dei quali si colgono anche nell'opera in esame. Segnaliamo il seguente, incredibilmente ingenuo: « ... prima ancora che siano trascorsi cento anni, non si avranno in Europa neppure tre grandi geometri. Questa scienza si fermerà completamente là dove l'avranno lasciata i BERNOULLI, gli EULERO, i MAUPERTUIS, i CLAIRAUT, i FONTAINE e i D'ALEMBERT. Essi avranno gettato le colonne d'Ercole. Non si andrà più oltre: le loro opere sussisteranno nei secoli futuri come quelle piramidi d'Egitto le cui masse, cariche di geroglifici, risvegliano in noi un'idea terribile della potenza e dei mezzi degli uomini che le hanno innalzate ». (pp. 24-25). E ingenuo, o per lo meno curioso, è l'apprezzamento: « Felice il geometra al quale uno studio approfondito delle scienze astratte non avrà indebolito il gusto per le belle arti, e al quale Orazio e Tacito saranno familiari quanto Newton; che saprà scoprire le proprietà di una curva e cogliere le bellezze di un poeta: il suo spirito e le sue opere vivranno allora in ogni tempo e suo sarà il riconoscimento di tutte le accademie. Egli non vedrà mai sè stesso cadere nell'oscurità, e non dovrà temere di sopravvivere alla sua fama » (p. 24). Indubbiamente non gli giovò quella curiosa forma di scetticismo — diremmo quasi: di autolesionismo — sul significato e il valore della matematica, che gli fa scrivere: « ... La regione dei matematici è un mondo intellettuale, dove ciò che viene considerato come verità rigorosa perde completamente questa prerogativa, quando lo

(1) G. LORIA, *Storia delle Matematiche* (Milano 1950) p. 724.

si trasporti sulla nostra terra. Si è giunti alla conclusione che era compito della filosofia sperimentale correggere i calcoli della geometria: una conclusione che è stata accettata persino dai geometri. Ma a quale scopo correggere il calcolo geometrico con l'esperienza? Non è più semplice attenersi ai risultati di quest'ultima? Da tutto ciò si vede che la matematica, soprattutto quella trascendente, non conduce a nulla di preciso senza l'esperienza, che essa è una specie di metafisica generale ove i corpi sono spogliati delle loro qualità individuali; e che, come minimo, resterebbe ancora da fare una grande opera che si potrebbe intitolare l'*Applicazione dell'esperienza alla geometria*, ovvero *Trattato sull'aberrazione delle misure* » (pp. 22-23). E seguita con un parallelo fra il giuoco e la matematica, affermando la perfetta analogia fra queste due attività: « ... Una partita può essere considerata come una serie indeterminata di problemi da risolvere partendo da certe condizioni date. Non c'è problema di matematica al quale non possa convenire questa stessa definizione, e la cosa del matematico in natura non esiste più di quella del giocatore. Da una parte come dall'altra si tratta di convenzioni ... » (p. 23).

Quest'ultima opinione non poteva venir apprezzata nel sec. XVIII, tanto meno nella penna d'un principe dell'illuminismo. Semmai lo potrebbe essere oggi, dopo le penetranti e sottili analisi critiche di certe correnti neo-positivistiche (2). Alle quali, come allo stesso DIDEROT, ci permettiamo tuttavia d'obbiettare che l'analogia fra matematica e giuoco è del tutto illusoria, l'una essendo un'attività propriamente scientifica, l'altra propriamente economica. Ciò è tanto vero, che si può far scienza per giuoco (esempio: le sfide degli algebristi italiani del sec. XVI), e giuoco per scienza (esempio: il problema detto « dei ponti di *Königsberg* », studiato da EULERO). Ma su questo ci riserviamo di ritornare ampiamente in altra sede.

In più d'un punto l'Autore s'abbassa addirittura a delle banalità, per es.: « ... L'utile circoscrive tutto, e sarà l'utile che tra qualche secolo traccerà dei limiti alla fisica sperimentale, come si accinge ormai a tracciarli alla geometria » (p. 28). « Le scienze astratte hanno occupato troppo a lungo e con troppo poco profitto gli spiriti migliori; o non si è studiato ciò che importava sapere, oppure si sono seguiti i propri studi senza discrezione, senza idee e senza metodo; le parole si sono moltiplicate all'infinito e la conoscenza delle cose è rimasta indietro » (p. 36), ecc.

In realtà non ci sembra che l'« *Interpretazione della Natura* », nè i « *Principi filosofici sulla materia e il movimento* », siano fra le opere migliori del DIDEROT (3). Raccolte di frammenti filosofici e di semplici pensieri, esse appaiono molto ineguali, e soltanto in poche pagine, sparse qua e là, lampeggiano in modo veramente geniale e profondo. Emergono alcuni giudizi sull'avvenire della fisica, che oseremmo chiamare profetici (4), e soprattutto alcune osservazioni psicologiche acutissime (5). Ma in altre pagine (per es. p. 98, ove l'Autore tenta di dare una definizione generale della « natura » e degli « elementi », intesi come « differenti materie eterogenee necessarie alla generale produzione dei fenomeni della natura »), il ragionamento si fa incerto, oscuro, quasi puerile. Siamo ben lontani dalla limpidezza cartesiana, dalla coerenza, dall'elevatezza del pensiero filosofico del collega D'ALEMBERT!

Perchè dunque è stata pubblicata questa traduzione italiana delle due

(2) Cfr. F. WAISMANN, *Introduzione al pensiero matematico* (Torino 1939); L. WITTGENSTEIN, *Philosophical investigations* (Oxford 1953).

(3) A questo proposito è interessante rilevare che l'« *Interpretazione della Natura* » non figura nella pubblicazione delle *Opere* del DIDEROT fatta a Parigi nel 1946 dall'Edit. Gallimard per la collezione de *La Pléjade*.

(4) V. pp. 25, 113-117, 120.

(5) V. pp. 25, 27, 30, 33, 34, 37, 39, 42-44, 47, 68-69, 71, 78, 90, 96, 105.

operette? Nella prefazione si legge: « Se un rimprovero può essere rivolto alla cultura francese del Settecento è quello di aver troppo amato le verità chiare e di essersi ingenuamente compiaciuta di amarle come tali. La quiete dell'evidenza intorpidisce: il luogo comune è in agguato e tende la trappola. La verità diventa allora, come di fatto avvenne nel secolo dei lumi, molto più adatta a formare convinzioni, a suscitare interessi, a preparare il terreno di una nuova opinione pubblica, che a risvegliare l'intelligenza delle cose, che è fantasia e creazione.

Nel secolo che idolatrò le idee chiare, e al quale anche egli appartenne, DIDEROT amò invece le verità oscure. Preferì la vertigine di un'idea che non si lascia mai definire e che richiama tumultuosamente la folla di altre infinite idee, all'orizzonte conchiuso di pochi ben determinati concetti, che per essere troppo chiari non chiedono talvolta neppure una dimostrazione ma si riferiscono senza indugio al buon senso, al buon gusto, alla tendenza predominante del secolo, ecc. ... » (p. 7). Molto ben detto, ma non sufficiente a giustificare la presente pubblicazione, se questa intende offrirsi ad un interesse vivo ed attuale del pubblico italiano, sia pure di elevata cultura. Al quale anche la presentazione fatta dall'Autore, un po' pretensiosa: « Giovane, prendi e leggi. Se riuscirai a leggere fino in fondo questa opera, non sarai incapace di capirne una migliore ... » (p. 19) non potrà forse apparire — temiamo — come un gradevole invito. Si racconta che *Federico II* di Prussia, appena letta questa presentazione, mettesse il libro da parte esclamando: « Ecco un libro che io non leggerò. Non è fatto per me, che sono un vecchiaccio! ».

Ci sia permesso di dire, molto francamente, che altre opere, di ben maggiore ed attuale interesse, avrebbero potuto esser scelte nella vasta e poderosa produzione del DIDEROT. Sul quale il giudizio dei contemporanei e dei posteri fu, nel complesso, di grande e riverente ammirazione. Vogliamo riportarne uno solo, che ci sembra valere per tutti, quello dell'ECKERMANN: « Sto leggendo un volume delle opere del DIDEROT, e sono meravigliato dello straordinario talento di quest'uomo. Che coltura, che potenza nel discorso! Si contempla un grande mondo in movimento, in cui gli uomini si impegnavano l'un l'altro, l'attività e il carattere erano mantenuti in continuo esercizio così che entrambi dovevano diventare agili e forti » (6). E in realtà il DIDEROT fu uomo di prodigiosa attività e di grandissimo carattere. Lottò con ardore infaticabile, con vero eroismo, per la Sua Enciclopedia in cui scrisse innumerevoli articoli. E con quale coscienza! Nel « *Discorso preliminare* » D'ALEMBERT racconta che DIDEROT, per documentarsi sulle arti e mestieri di cui doveva trattare, usava frequentare artigiani ed operai e farsene allievo. Due forme diverse e contrastanti di cultura, due mondi cozzarono in Lui: se da un lato Egli fu ancora come la maggioranza degli scienziati del Suo tempo, soliti a divagare da dilettanti (non solo nella loro vita privata) al di fuori delle proprie competenze, d'altro lato, primo degli Enciclopedisti, fu tra i primi a presentire i tempi moderni e l'esigenza delle specializzazioni.

In un'epoca come la nostra, in cui un'esigenza opposta sembra diffondersi, quella di rompere i cerchi, ormai esasperatamente chiusi e ristretti delle specializzazioni, per ritornare, ma su basi e con spirito completamente nuovi, ad una forma di cultura aperta ai liberi e fecondi scambi d'idee, la grande e contraddittoria figura del DIDEROT è attuale e interessante. Ma, appunto per questo, avremmo preferito vedere le due operette del DIDEROT ripubblicate non tanto per venire incontro a un generico desiderio culturale del pubblico, quanto in veste critica ad uso degli storici e dei filosofi. Evidentemente non è stata questa l'idea dell'Editore Boringhieri, perchè altri-

(6) Traduciamo liberamente da J. P. ECKERMANN, *Gespräche mit Goethe*, 21 marzo 1831.

menti avremmo trovato fra le pagine del libro alcune annotazioni e spiegazioni che ci sarebbero parse essenziali, soprattutto nei punti ove il testo appare alquanto oscuro. Alludiamo anche al fatto d'aver soppresso l'interessante, bella preghiera che, in autorevoli edizioni precedenti (particolarmente in quella, pregevolissima, del 1875 dovuta all'ASSEZAT), si trova premessa all'« *Osservazione* » finale di p. 106. È vero che quella preghiera (nella quale sembra di cogliere un'eco della celebre « *Professione di fede del Vicario Savoiardo* » del ROUSSEAU) non fu inserita dall'Autore stesso nell'« *Interpretazione della Natura* ». Tuttavia avremmo ritenuto che le edizioni precedenti non potessero essere contraddette senza due righe di spiegazione.

Ma, ripetiamo, il *Boringhieri* ha ritenuto opportuno di seguire altro indirizzo, e noi non possiamo che esser comunque grati, a Lui e a *Gianfranco Cantelli*, il valente traduttore, d'averci data, nella già così ricca enciclopedia di autori classici, un'altra opera seria ed interessante.

TULLIO VIOLA

HUA LOO-KENG - *Additive Primzahltheorie*, pagg. VI, 174. Traduzione dal cinese di Viktor Ziegler. Redattore scientifico: prof. dr. Hans Salié. Teubner, Leipzig, 1959.

La presente edizione, in lingua tedesca, di questo ottimo libro, fondamentale nello studio del problema di Waring-Goldbach, sarà accolta con molto favore da tutti i cultori di aritmetica superiore, che possano trovare, per ragioni di lingua, difficoltà nel prendere contatto con le precedenti edizioni russa (Trudy Mat. Inst. Steklov, *22*, 1947) e cinese (Acad. Sinica, Pechino, 1953).

L'edizione cinese contiene sensibili miglioramenti rispetto a quella russa, soprattutto per quanto si riferisce al cosidetto teorema del valor medio (di una somma trigonometrica) esposto nel cap. IV, e alla sue molteplici conseguenze. La presente traduzione benchè sia stata praticamente condotta sul testo russo, tuttavia è stata aggiornata, con l'aiuto dell'autore stesso, in modo da non risultare per nulla inferiore all'edizione cinese.

Il metodo fondamentale di ricerca è quello delle somme trigonometriche al quale, com'è noto, ha portato un contributo essenziale il matematico russo I. M. Vinogradov. La maggior parte dei risultati esposti nel presente libro sono dovuti originalmente all'autore e molti di essi sono divenuti ormai celebri.

I primi cinque capitoli contengono proposizioni preliminari riguardanti le somme trigonometriche in generale. Il cap. VI si riferisce invece alle somme trigonometriche dipendenti da numeri primi, di cui fornisce una maggiorazione che è fondamentale nella trattazione dell'argomento a cui più propriamente il libro è dedicato e che viene esposto nei capitoli dal VII in poi Tale argomento è sostanzialmente il problema di Waring-Goldbach colle sue varie generalizzazioni.

Nel cap. I si ottengono limitazioni di somme esponenziali del tipo:

$$\sum_{x=1}^{q} \exp\left(2\pi i(a_k x^k + \dots + a_0)/q\right) \qquad k \geq 1$$

(dove gli a_i e $q > 0$ sono interi fissi) o più in generale di somme estese da 1 ad m, con $1 \leq m \leq q$.

Nel cap. II sono dimostrati alcuni risultati di un tipo un po' diverso, riguardanti la maggiorazione di somme che contengono la funzione $d(n)$ (numero dei divisori di n).

Il cap. III contiene limitazioni riguardanti il valor medio di somme trigonometriche dipendenti da un solo parametro, cioè di espressioni del tipo:

$$\int_0^1 | T(\alpha) |^\lambda d\alpha, \qquad \text{con } T(\alpha) = \sum_{x=1}^{P} \exp(2\pi\alpha i f(x)),$$

$f(x)$ polinomio a valori interi.

In questi primi tre capitoli l'autore utilizza risultati dovuti a Mordell. Van der Corput e H. Weyl.

Nel cap. IV è dimostrato il teorema di Vinogradov detto del valor medio, in una forma sostanzialmente migliorata dall'autore. Esso riguarda somme trigonometriche dipendenti da più parametri e conduce a limitazioni superiori di espressioni del tipo

$$\int_0^1 \cdot \int_0^1 | C_k(P) |^\lambda d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_k$$

dove $C_k(P) = \sum_{x=1}^{P} \exp(2\pi i(\alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x))$.

Il cap. V riguarda ancora il teorema del valor medio e giunge a più penetranti risultati in corrispondenza di piccoli valori di k $(2 \leq k \leq 10)$ per particolari valori di $\lambda = \lambda(k)$. Infine è dimostrato il seguente teorema: sia $| \alpha_r - h/q | \leq q^{-2}$, per $2 \leq r \leq k$, $(h, q) = 1$, $1 \leq q \leq P^r$. Allora si ha, per $P \leq q \leq P^{r-1}$

$$\sum_{x=1}^{P} \exp(2\pi i(\alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x)) = O(P^{1+\varepsilon-1/\sigma})$$

dove $\sigma = \sigma(k)$ è una opportuna funzione tale che $\sigma \sim 4k^2 \log k$, per $k \to +\infty$. Risultati più deboli si ottengono nei casi $1 \leq q \leq P$, $P^{r-1} \leq q \leq P^r$.

Nel cap. VI è dimostrato un altro celebre teorema di Vinogradov che fornisce una limitazione superiore di somme trigonometriche dipendenti da numeri primi, del tipo

$$\sum_{\substack{x \leq P \\ x \text{ primo} \equiv t \pmod Q}} \exp\left(2\pi i\left(\frac{h}{q} x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k\right)\right).$$

Questo teorema che è fondamentale nella teoria additiva dei numeri primi viene qui dall'autore adattato alle particolari necessità della sua esposizione.

L'autore passa poi, servendosi di questi risultati generali che sono notevolissimi anche per se stessi, ad affrontare nei successivi capitoli il fondamentale argomento del suo lavoro, cioè, come si è detto, il problema di Waring-Goldbach. Esso riguarda la ricerca del numero delle soluzioni in interi primi $p_1, p_2, \ldots, p_s$ di una equazione del tipo:

$$\sum_{i=1}^{s} p_i^k = N, \qquad \text{per un intero fisso } N > 0.$$

L'autore affronta anzi qui il problema più generale di determinare il numero J delle soluzioni dell'equazione

$$\sum_{i=1}^{s} f(p_i) = N$$

dove $f(x) = Ax^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$ è un polinomio a valori interi, con $A > 0$, tale che $f(x) - a_k$ abbia divisore fisso 1.

La seguente formula, che costituisce il risultato più importante di tutta la trattazione, fornisce una risposta al problema dando una valutazione asintotica di J per $N \to \infty$:

$$J = A^{-s/k} \frac{\mathfrak{S}(N)\, \Gamma^s(1/k) N^{s/k-1}}{\Gamma(s/k) \log^s N} + O\left(\frac{N^{s/k-1} \log \log N}{\log^{s+1} N}\right)$$

dove $\mathfrak{S}(N)$ è la cosidetta serie singolare

La formula vale quando sia:

$$s \geq s_0 \begin{cases} 2^k + 1 & \text{per } 1 \leq k \leq 10 \\ 2k^2(2 \log k + \operatorname{loglog} k + 2{,}5) & \text{per } k > 10. \end{cases}$$

Nel cap. VIII le serie singolari sono studiate nel caso particolare $f(x) = x^k$ (cioè per il problema di Waring-Goldbach vero e proprio) e ne viene garantita la positività sotto opportune ipotesi. Ciò conduce al seguente risultato particolarmente espressivo:

ogni numero N abbastanza grande giande, tale che risulti:

$$N \equiv s \pmod{K} \qquad \text{(K è un'opportuna funzione di } k)$$

è esprimibile come somma di s k-esime potenze di numeri primi. In particolare si hanno ad es. risultati come questi:

ogni numero dispari abbastanza grande è somma di 3 primi ($k = 1$, $K = 2$, $s = 3$), ed è questo un celebre risultato di Vinogradov riguardante il problema di Goldbach in senso stretto;

ogni numero N abbastanza grande $\equiv 5 \pmod{24}$ è la somma di 5 quadrati di numeri primi ($k = 2$, $K = 24$, $s = 5$).

Se ci proponiamo il problema di stabilire il minimo valore di s, diciamo $H(k)$, tale che ogni intero abbastanza grande $\equiv s$ (mod. k) sia somma di s k-esime potenze di primi, abbiamo immediatamente $H(k) \leq s_0$ per i risultati precedenti. La limitazione relativa ad $H(k)$ viene migliorata nel cap. IX, dove si dimostra la formula generale:

$$H(k) \leq 2k + 2m + 7$$

essendo $m = m(k) \backsim 2k \cdot \log k$ per $k \to \infty$.

Considerazioni speciali conducono per piccoli valori di k ai seguenti risultati: $H(4) \leq 15$, $H(5) \leq 25$, $H(6) \leq 37$, $H(7) \leq 54$, $H(8) \leq 74$. In questo capitolo è utilizzato un notevole lemma di Davenport.

Nel cap. X è trattata un'altra generalizzazione del problema di Waring-Goldbach. Qui si tratta di determinare il numero delle soluzioni del sistema

$$\sum_{i=1}^{s} p_i^h = N_h \qquad h = 1, 2, \ldots, k.$$

in numeri primi p_i.

Viene dimostrata anche qui una generale formula asintotica che vale per $s \geq s_1 \backsim 6k^2 \log k$. Vengono poi trattate le condizioni particolari di solubilità del sistema « in numeri positivi » e di solubilità « come congruenza », il cui significato è abbastanza intuitivo. Quando queste condizoni sono soddisfatte contemporaneamente, la solubilità è garantita in numeri primi.

Il significato di queste due condizioni è ulteriormente approfondito nel cap. XI dove è anche ricavato un risultato più espressivo che garantisce la solubilità in numeri primi per $s \geq s_2 \backsim 3k^2 \log k$.

Nel cap. XII sono sommariamente esposte alcune questioni connesse in vario modo coi problemi trattati sopra. Per es. è prospettato il problema, ulteriormente generalizzato, di determinare il numero delle soluzioni di un sistema del tipo

$$\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(p_j) = N_i \qquad i = 1, 2, \dots, k,$$

dove gli f_{ij} sono opportuni polinomi.

Sono inoltre ricordate alcune celebri congetture, come ad es. quella di Goldbach e quella dei numeri primi gemelli, e sono esposti senza dimostrazione notevoli risultati come il seguente: ogni intero abbastanza grande è somma di un primo e di s k-esime potenze di primi se $s \geq s_3 \backsim \frac{2}{3} k \log k$.

MARCO CUGIANI

Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958 edited by J. A. Todd, Cambridge University Press, 1960, pp. LXIV + 573, 65 s.

Esce ora, a cura di J. A. Todd, il volume contenente gli Atti del Congresso internazionale dei matematici che ebbe luogo ad Edinburgo dal 14 al 21 agosto 1958.

Alla lista dei membri del Comitato del Congresso, delle Società e degli Enti finanziatori segue il programma scientifico con i titoli delle 604 comunicazioni i riassunti delle quali furono pubblicati a parte in un volumetto uscito all'epoca del Congresso stesso. Seguono poi i discorsi di apertura e di chiusura, tenuti dal prof. W. V. D. Hodge Presidente del Congresso, e le relazioni dei professori H. Davenport e H. Hopf rispettivamente sui lavori di K. F. Roth e di R. Thom ai quali vennero conferite le medaglie Fields.

Il resto del volume, cioè la parte principale, contiene il testo di 50 delle 56 conferenze tenute su invito del Comitato organizzatore del Congresso. Le prime 17 (della durata di un'ora) sono di carattere generale, le altre (di mezz'ora) riguardano argomenti specializzati e furono tenute nelle varie sezioni nelle quali il Congresso fu suddiviso.

Eccone ora l'elenco:

Conferenze di carattere generale.

Alexandrov, A. D.: Modern development of surface theory.

Bogolyubov, N. N. and Vladimirov, V. S.: On some mathematical problems of quantum field theory.

Cartan, H.: Sur les fonctions de plusieurs variables complexes: les espaces analytiques.

Chevalley, C.: La théorie des groupes algébriques.

Feller, W.: Some new connections between probability and classical analysis.

Garding, L.: Some trends and problems in linear partial differential equations.

Grothendieck, A.: The cohomology theory of abstract algebraic varieties.
Hirzebruch, F.: Komplexe Mannigfaltigkeiten.
Kleene, S. C.: Mathematical logic: constructive and non-constructive operations.
Lanczos, C.: Extended boundary value problems.
Pontryagin, L. S.: Optimal processes of regulation, (in russo).
Roth, K. F.: Rational approximations to algebraic numbers.
Schiffer, M.: Extremum problems and variational methods in conformal mapping.
Temple, G.: Linearization and delinearization.
Thom, R.: Des variétés triangulées aux variétés différientiables.
Uhlenbeck, G. E.: Some fundamental problems in statistical physics.
Wirlandt, H.: Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen.

Sezione di logica e fondamenti.

Beth, E. W.: Completeness results for formal systems.
Kreisel, G.: Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof.
Markov, A. A.: Insolubility of the problem of homeomorphy, (in russo).

Sezione di algebra e teoria dei numeri.

Higman, G.: Lie ring methods in the theory of finite nilpotent groups.
Linnik, Yu. V.: On divisor problems and some related binary additive problems, (in russo).
Roquette, P.: Some fundamental theorems on abelian function fields.
Shimura, G.: Fonctions automorphes et correspondances modulaires.

Sezione di analisi.

Arnold, V. I.: Some questions of approximation and representation of functions, (in russo).
Bers, L.: Spaces of Riemann surfaces.
Grauert, H.: Die Riemannschen Flächen der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen.
Heins, M.: Functions of bounded characteristic and Lindelöfian maps.
Lions, J. L.: Problèmes mixtes abstraits.
Menchoff, D. E.: The convergence of trigonometric series, (in russo).
Minokshisundaram, S.: Hilbert algebras.
Sz.-Nagy, B.: Spectral sets and normal dilations of operators.

Sezione di topologia.

Bott, R.: An application of the Morse theory to the topology of Lie groups.
Kosiński, A.: On some problems connected with the topology of manifolds.
Papakyriakopoulos, C. D.: The theory of 3-dimensional manifolds since 1950.

Sezione di geometria.

Chern, S. S.: Differential geometry and integral geometry.
Matsusaka, T.: The polarization of algebraic varieties, and some of its applications.

Milnor, J. W. and Kervaire, Michel A.: Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin.

Nagata, M.: On the fourteenth problem of Hilbert.

Nijenhuis, A.: Geometric aspects of formal differential operations on tensor fields.

Samuel, P.: Relations d'équivalence en géométrie algébrique.

Segre, B.: On Galois geometries.

Wang, H. C.: Some geometrical aspects of coset spaces of Lie groups.

Sezione di probabilità e statistica.

Chung, K. L.: Continuous parameter Markov chains.

Gnedenko, B. V.: Limit theorems of probability theory, (in russo).

Rényi, A.: Probabilistic methods in number theory.

Savage, L. J.: Recent tendencies in the foundations of statistics.

Sezione di matematica applicata, fisica matematica e analisi numerica.

Lehmer, D. H.: Discrete variable methods in numerical analysis.

Sezione di storia e didattica.

Hofmann, J. E.: Über eine Euklid-Bearbeitung, die dem Albertus Magnus zugeschriebenwird.

Kurepa, G.: Some principles of mathematical education.

Il volume, che è presentato in un'eccellente veste tipografica, dà un'ampia ed aggiornata visione di problemi di tutti i rami della matematica e dei loro più recenti sviluppi e sarà di valido aiuto anche a chi, lavorando in campi specializzati come inevitabilmente accade ai giorni nostri, voglia formarsi un'idea adeguata su questioni diverse dalle sue.

Luigi Gatteschi