Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio Andreatta

Semplici considerazioni topologiche utili nella geometria sulla curva algebrica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 286–290.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_286_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Semplici considerazioni topologiche utili nella geometria sulla curva algebrica.

Nota di ANTONIO ANDREATTA (a Pavia)

Sunto. - *Tra due superficie topologiche serrate e chiuse si considerano certe corrispondenze* (n, *1) dotate di un numero finito di punti di diramazione. Si stabilisce la relazione che intercede tra gli ordini di connessione delle due superficie, traendone classiche proposizioni di geometria sulla curva algebrica.*

Summary. - *Between two compact and closed topological surfaces we consider a class of correspondences* (n, *1) with a finite number of branch points; then we derive some consequences regarding the geometry on an algebraic curve.*

1. È ben noto come talune proposizioni di geometria sulla curva algebrica acquistino particolare risalto nella impostazione topologica della teoria, cioè con riferimento alla superficie di RIEMANN associata alla curva, e come spesso tale impostazione conduca assai speditamente ai singoli risultati [1].

[1] In proposito si possono qui ricordare ad es: O CHISINI, *Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico*, «Rend. R. Ist. Lomb.», 54 (1921), pp. 552-569; *Il general principio topologico di corrispondenza*, «Ibidem», 57 (1924), pp. 481-496; e S. LEFSCHETZ, *Correspondences between Algebraic Curves*, «Annals of Mathematics», (2), 28 (1926-27), pp. 342-354.

2. Siano S ed S' due superficie topologiche connesse, serrate (compatte) e chiuse (cioè prive di orli), e sia Ω una corrispondenza topologica $(n, 1)$ tra le due superficie dotata, su S', di un numero finito $\delta' \geq 0$ di punti D_i' $(i = 1, 2, \ldots, \delta')$ di diramazione.

Si vuole qui mostrare un procedimento che permette di raggiungere la classica formula di ZEUTHEN, assieme ad altre proposizioni ad essa collegate, mediante considerazioni topologiche assai elementari.

Così ad un qualunque punto di S corrisponde un sol punto di S', mentre ad un punto di S' ne corrispondono $n \geq 1$ di S i quali sono n punti distinti, eccezion fatta per i punti D_i' ai quali corrispondono su S soltanto $n - 1$ punti distinti. Inoltre la corrispondenza sia localmente invertibile e continua, salvo che nei punti D_i' di S'.

Nelle condizioni poste, allorchè su S' un punto P' descrive un «pezzo» (regione semplicemente connessa cioè una cella bidimensionale) od un «segmento» (cella unidimensionale) non aventi alcun punto D_i' come punto interno, su S ognuno dei punti corrispondenti di P' nella Ω descrive un insieme di punti omeomorfo a quello descritto da P' su S', onde risp. un «pezzo» oppure un «segmento». Ne viene che disteso su S' un poliedro (cioè un complesso reticolante) Σ' il quale abbia, com'è lecito, tutti i punti D_i' tra i suoi vertici (celle zerodimensionali), la Ω introduce su S un poliedro Σ; e ciascuna faccia (cella bidimensionale), ciascun segmento (cella unidimensionale), ciascun vertice distinto dai punti D_i' del poliedro Σ' fornisce risp. n facce, n spigoli, n vertici di Σ, mentre ciascun vertice D_i' di Σ' ne fornisce soltanto $n - 1$ di Σ.

Se ora con α_2, α_1, α_0 (risp. con α_2', α_1', α_0') s'indica il numero delle facce, degli spigoli, dei vertici di Σ (risp. di Σ'), si ha dunque:

$$(1) \qquad \alpha_2 = n\alpha_2', \qquad \alpha_1 = n\alpha_1', \qquad \alpha_0 = n(\alpha_0' - \delta') + (n - 1)\delta'.$$

D'altra parte gli ordini di connessione Z, Z' delle superficie S, S' risp. si esprimono notoriamente con le:

$$(2) \qquad Z = -\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 + 2, \qquad Z' = -\alpha_2' + \alpha_1' - \alpha_0' + 2$$

e tosto si ricava la formula:

$$(3) \qquad Z = n(Z' - 2) + \delta' + 2.$$

Se, in particolare, le due superficie sono orientabili ([2]), dei rispettivi generi p e p', si ha $Z = 2p$, $Z' = 2p'$, com'è ben noto, onde la (3) può scriversi:

$$2p = 2n(p' - 1) + \delta' + 2. \tag{4}$$

Oss. - La terza delle relazioni (1) si può scrivere:

$$\alpha_0 = n\alpha_0' - \delta' \tag{5}$$

ed è valida nell'ipotesi in cui su S' i punti di diramazione della Ω siano *generici*, cioè abbiano ciascuno come corrispondenti $n-1$ punti distinti di S, cioè un gruppo di n punti con un solo punto doppio. Se tuttavia si suppone che i punti D_j' $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ di diramazione su S' abbiano risp. come corrispondenti su S gruppi di $n - r_j$ punti distinti, si riscontra che nella trattazione occorre e basta sostituire la (5) con la seguente

$$\alpha_0 = n(\alpha_0' - \nu) + \sum_1^\nu {}_j (n - r_j)$$

ossia con la:

$$\alpha_0 = n\alpha_0' - \sum_1^\nu {}_j r_j. \tag{6}$$

Ma allora le (3) e (4) risultano valide anche nella ipotesi più generale purchè in esse si supponga:

$$\delta' = \sum_1^\nu {}_j r_j,$$

cioè che un punto di diramazione cui corrisponda un gruppo di $n - r_j$ punti distinti si pensi equivalente ad r_j punti di diramazione generici. Insomma un punto di diramazione è da contare tante volte quanti sono i punti doppi del gruppo corrispondente, intendendosi che un punto r-plo di questo equivalga ad $r - 1$ punti doppi.

Con siffatti criteri le formule (3) e (4) sono valide anche nella ipotesi più generale qui contemplata.

([2]) Si accerta senza difficoltà che se S' (ossia Σ') è orientabile, lo è pure S. Se invece S' è non orientabile, S può essere tanto non orientabile (come appunto avviene se $n = 1$), quanto orientabile. Ad es. la proiezione centrografica di una sfera S su un piano proiettivo S' dà luogo ad una corrispondenza (2, 1) tra S (orientabile) ed S' (non orientabile); e si noterà che in tale corrispondenza è $\delta' = 0$, in accordo con la (3) perchè $Z = 0$, $Z' = 1$.

3. Siano ora C e C' due curve algebriche irriducibili risp. di genere p e p'. Le superficie S e S' di num. 2 potranno interpretarsi come rispettive superficie di RIEMANN, ed una corrispondenza Λ algebrica $(n, 1)$ posta tra C e C' darà luogo ad una corrispondenza Ω tra S ed S' del tipo ivi considerato. La formula (4) potrà così riferirsi alla corrispondenza Λ, ed in essa δ' avrà il significato di numero dei punti di diramazione per Λ, computati, ove occorra, coi criteri di equivalenza precisati nella osservazione precedente.

E subito consegue il teorema di WEBER, secondo il quale una corrispondenza $(n, 1)$ fra due curve algebriche dello stesso genere $p = p' > 1$, è necessariamente birazionale (cioè con $n = 1$).

Invero se $p = p'$ la (4) fornisce

$$\delta' = -2(n-1)(p-1)$$

ed essendo $\delta' \geq 0$, se $p > 1$, risulta necessariamente $n = 1$ (e $\delta' = 0$).

Su una curva C di genere p, di cui S sia l'associata superficie di RIEMANN, si consideri una involuzione γ_n^1, cioè una serie algebrica (irriducibile), di gruppi di n punti, d'indice uno (cioè tale che per ciascun punto di C passi uno ed un sol gruppo della serie, la quale è pertanto priva di punti fissi) e tale che il gruppo generico sia di punti distinti. La γ_n^1 avrà quindi un numero finito di gruppi dotati di punti multipli, e s'indichi con δ' il numero dei punti doppi, contando ciascun punto r–plo come $r-1$ punti doppi, in conformità ai criteri di Oss. a num. 2.

La γ_n^1, pensata come ente ∞^1 di gruppi, è assimilabile ad una curva algebrica (irriducibile) C' di genere p' (genere di γ_n^1); e tra C e C' si ha una corrispondenza $(n, 1)$ dotata, su C', di δ' punti di diramazione. La (4) può quindi riferirsi alle circostanze attuali, e potrà scriversi:

$$\delta' = 2(p + n - 1) - 2np'.$$

Si trova subito che la γ_n^1 è razionale ($p' = 0$), cioè è una serie lineare g_n^1, quando possiede

$$\delta' = 2(p + n - 1)$$

punti doppi, e soltanto allora.

Se poi si suppone che la curva C sostegno sia razionale ($p = 0$), la (4) può scriversi:

$$2n(p' - 1) + \delta' + 2 = 0$$

e ciò implica $p' = 0$, e $\delta' = 2(n-1)$. In altre parole su una curva razionale ogni involuzione ∞^1 è una serie lineare.

Quest' ultima osservazione equivale peraltro al teorema di Lüroth. Ed invero se una curva C' (di genere $p' \geq 0$) è suscettibile di rappresentazione parametrica razionale, tra una retta C (onde $p=0$) e C' intercede una corrispondenza $(n, 1)$ e se ne deduce che $p' = 0$ ossia che la curva C' è razionale.

4. Infine si ottiene facilmente la formula di Zeuthen.

Posta tra due curve algebriche C e C', di genere p e risp. p', una corrispondenza (n, n'), d'indici n ed n', irriducibile e dotata di un numero finito δ di punti di diramazione su C, quindi anche di un numero finito δ' di punti di diramazione su C' (sempre computando ciascun punto di diramazione con la molteplicità precisata in Oss. di num. 2), s' introduca (astrattamente od in un opportuno modello) la curva C^* (irriducibile) immagine della corrispondenza, e si indichi con p^* il genere di C^* (genere effettivo della corrispondenza).

La corrispondenza (n, n') tra C e C' è notoriamente prodotto di una corrispondenza $(1, n')$ tra C e C^* e di una corrispondenza $(n, 1)$ tra C^* e C'.

Si hanno pertanto le relazioni:

$$2p^* = 2n'(p-1) + \delta + 2; \qquad 2p^* = 2n(p'-1) + \delta' + 2$$

dalle quali appunto la:

$$2n'(p-1) + \delta = 2n(p'-1) + \delta'$$

che è la classica formula di Zeuthen, la quale peraltro include tutte le proposizioni precedentemente incontrate.