Bollettino Unione Matematica Italiana

Pavel Drăgilă

Sur certaines surfaces affinement identiques.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 162–169.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_162_0>

Sur certaines surfaces affinement identiques.

Nota di PAVEL DRĂGILĂ (a Timisoara)

Sunto. - *Nel presente lavoro si studiano le coppie di superficie equivalenti dal punto di vista affine, in modo che una tangente asintotica sulla prima superficie sia parallela alla tangente asintotica, nel punto omologo, sulla seconda superficie. L'autore dimostra che, oltre le superficie date nella prima nota, altre superficie di questa specie non possono esistere, ed in continuazione sono indicate alcune nuove proprietà di queste superficie.*

Summary. - *In the present paper the pairs of surfaces affinely equivalent, such that an asymptotic tangent on the first surface should be parallel to the asymptotic tangent, at the corresponding point, on the second surface, are investigated. The author shows that, except the surfaces indicated in the first paper, other surfaces of the same kind cannot exist, and further any new properties of these surfaces are presented.*

1. Dans la note précedente [1] nous avons étudié les couples de surfaces affinement identiques jouissant de la propriété que la tangente à une ligne de coordonnés sur la première surface S soit parallèle à la tangente à une ligne de coordonnées, aux points homologues, sur la deuxième surface $\overline{S}$. Nous avons montré que la correspondance par parallélisme des tangentes homologues nous conduit au cas banal des transformations homothétiques, et nous nous sommes occupé seulement du cas de correspondances par parallélisme des tangentes non homologues. Nous avons établi ensuite, dans le cas où les lignes de coordonnées sont les asymptotiques, les systèmes d'équations pouvant définir ces surfaces. Mais nous n'avons pas prouvé si ces systèmes sont les seuls possibles. Nous nous sommes proposé, dans ce qui suit, de combler cette lacune, de completer une partie des calcus et d'exposer encore une propriété remarquable de ces surfaces.

2. Dans notre note citée nons avons défini le couple de surfaces S, S par le système compatible

$$(1)\qquad \begin{cases} r_{uu} = ar_u + br_v + cr, \\ r_{uv} = a'r_u + b'r_v + c'r, \\ r_{vv} = a''r_u + b''r_v + c''r, \end{cases}$$

les coordonnées des deux surfaces étant liées encore par les relations

$$(2)\qquad \begin{aligned} \bar{r}_u &= \lambda r_v, \\ \bar{r}_v &= \mu r + \delta r_u + \sigma r_v. \end{aligned}$$

Posant la condition d'intégrabilité

$$(\bar{r}_u)_v = (\bar{r}_v)_u,$$

nous avons trouvé la relation

$$(3)\qquad \lambda r_{vv} + \lambda_v r_v = \mu_u r + \mu r_u + \delta_u r_u + \delta r_{uu} + \sigma_u r_v + \sigma r_{uv}.$$

Si nous substituons les expressions (2) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, au lieu des dérivées r_u, r_v, nous obtenons

$$(4)\qquad \lambda(\mu_v r + \mu r_v + \delta_v r_u + \delta r_{uv} + \sigma_v r_v + \sigma r_{vv}) + \lambda_v(\mu r + \delta r_u + \sigma r_v) =$$
$$= \mu_u \bar{r} + (\mu + \delta_n)(\lambda r_v + \delta(\lambda_u r_v + \lambda r_{uv}) + \sigma_u(\mu r + \delta r_u + \sigma r_v) + \sigma(\lambda_v r_v + \lambda r_{vv}).$$

Nous avons envisagé dans la première note seulement le cas où cette relation est une identité. Nous allons considérer, dans ce qui suit, le cas où cette relation n'est pas identiquement satisfaite, les lignes de coordonnées étant les asymptotiques.

Si nous remplaçons les expressions (1) des dérivées secondes dans l'équation (3) nous trouvons la relation

$$(5)\qquad \lambda(a'' r_u + b'' r_v) + \lambda_v r_v = \mu_u r + \mu r_u + \delta_u r_u + \delta(a r_u + b r_v) + \sigma_u r_v + $$
$$+ \sigma(a' r_u + b' r_v + c' r),$$

qui doit être une identité. Nous trouvons ainsi en premier lieu

$$(6)\qquad c' = -\frac{\mu_u}{\sigma}.$$

Ecrivant ensuite les conditions d'intégrabilité pour le système (1) on aura

$$(7)\qquad \begin{aligned} b' &= a - (lgc')_u, & b'' &= a' - (lgc')_v, \\ a'_u &= b'_v, & b''_u &= a_v, \\ a'_u + a'b' + c' &= a_v + a''b, & b'_v + a'b' + c' &= b''_u + a''b. \end{aligned}$$

et puis

$$a'_u = a_v - (lgc')_{uv}, \qquad a'_u - (lgc')_{uv} = a_v.$$

D'ici on voit que

$$c' = UV,$$

U étant fonction de l'argument u et V de l'argument v. Tenant compte actuellement des relations (2) et (6) on déduit que, par le choix convenable des paramètres u, v, on peut prendre

$$(8) \qquad c' = -1, \qquad \sigma = \mu_u.$$

Portant ensuite les expressions des dérivées $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$ dans la première équation (1) il resulte

$$r_{uv} = \frac{b\delta}{\lambda} r_u + \left(a + \frac{b\mu - \lambda_u}{\lambda}\right) r_v + \frac{b\mu}{\lambda} r.$$

Cette derniere équation devant être identique avec la deuxième équation (1) il en résulte

$$\frac{b\mu}{\lambda} = c' = -1, \qquad a' = \frac{b\delta}{\lambda}, \qquad b' = a + \frac{b\mu - \lambda_u}{\lambda},$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad b = -\frac{\lambda}{\mu}, \qquad a' = -\frac{\delta}{\mu}, \qquad b' = a - (lg\mu\lambda)_u.$$

Moyennant les relations (6) et (8) il ressort

$$(10) \qquad b' = a, \qquad (\mu\lambda)_u = 0, \qquad b'' = a'.$$

Portant ensuite les expressions des dérivées $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$ dans la troisième équation (1) et tenant compte encore des relations (1) nous trouvons

$$(11) \quad \mu_v r + \mu r_v + \delta_v r_u + \delta(a' r_u + b' r_v - r) + \mu_{uv} r_v + \mu_u (a'' r_u + b'' r_v) =$$
$$= a''\lambda r_t + b''(\mu r + \delta r_u + \mu_u r_v),$$

d'où on déduit

$$b'' = -\frac{\delta}{\mu} + \frac{\mu_v}{\mu}.$$

Tenant compte encore des relations (10) et (9)

$$b'' = a' = -\frac{\delta}{\mu}, \tag{12}$$

on obtient

$$\mu_v = 0.$$

Identifiant dans l'égalité (11) les termes en r_u et r_v nous trouvons

$$a''\mu_u + \delta a' + \delta_v = b''\delta,$$

$$b'\delta + b''\mu_u = a''\lambda + b''\mu_u,$$

d'ou il s'ensuit

$$a'' = -\frac{\delta_v}{\mu_u} = \frac{\delta a}{\lambda}. \tag{13}$$

Si nous portons les expressions des dérivées $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$, dans la deuxième équation (1), au lieu de r_u, r_v, il vient

$$\lambda r_{vv} + \lambda_v r_v = a'\lambda r_v + b'(\mu r + \delta r_u + \mu_u r_v) - \overline{r}. \tag{14}$$

Des relations (3) et (14) on déduit ensuite les deux équations

$$\overline{r} = b'\mu r + (\ldots)r_u + (\ldots)r_v,$$

$$\overline{r} = \frac{\mu\lambda_v}{\mu_n} r + (\ldots)r_u + (\ldots)r_v,$$

qui doivent être évidemment identiques. D'ici on obtient

$$\frac{\mu\lambda_v}{\mu_u} = b'\mu = a\mu, \tag{15}$$

$$a = \frac{\lambda_v}{\mu_u},$$

et ensuite, tenant compte de (13)

$$\frac{\lambda_v}{\mu_u} = -\frac{\lambda\delta_v}{\delta\mu_u},$$

c'est-à-dire

$$(\lambda\delta)_v = 0. \tag{16}$$

Si nous tenons compte maintenant des relations (10) et (16) et puis de (12) et (9) nous trouvons les expressions

$$\lambda = \frac{\varphi(v)}{\mu}, \qquad \delta = \frac{\psi(u)}{\varphi(v)},$$

$$a = \frac{\varphi_v}{\mu}, \qquad b = -\frac{\varphi}{\mu^2},$$

$$a' = -\frac{\psi}{\mu\varphi}, \qquad a'' = -\frac{\psi\varphi_v}{\varphi^2}.$$

Portant ensuite les expression des coefficients a, b, a', b', c', a'', b'' dans la quatrième et la cinquième équation (6) nous obtenons les deux relations

$$-\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\psi}{\mu}\right)_u = \frac{\varphi_{vv}}{\mu},$$

$$2\frac{\psi\varphi_v}{\varphi\mu^2} = -1,$$

qui sont manifestement incompatibles.

3. Nous avons établi déjà que les surfaces affinement équivalentes se partagent en deux sous-classes: les surfaces que nous avons désigné Q_1, pour lesquelles on a

$$\begin{cases} \bar{r}_u = r_v, \\ \bar{r}_v = r + r_u, \end{cases}$$

et puis les surfaces que nous avons nommé Q_2, pour lesquelles on a

$$(17) \qquad \begin{cases} \overline{r}_u = r_v, \\ \overline{r}_v = r. \end{cases}$$

Dans le premier cas, des surfaces Q_1, le système (1) prend la forme

$$\begin{cases} r_{uu} = ar_u + br_v, \\ r_{uv} = br_u + ar_v + br, \\ r_{vv} = (a+1)r_u + br_v, \end{cases}$$

a, b étant deux constantes arbitraires.

Dans le second cas, des surfaces Q_2, nous avons montré que elles sont définies par le système

$$(18) \qquad \begin{cases} r_{uu} = ar_u + br_v, \\ r_{uv} = a'r_u + b'r_v + c'r, \\ r_{vv} = r_u, \end{cases}$$

a, b, ... étant fonctions arbitraires, qui doivent satisfaire seulement les conditions d'intégrabilité. Nous allons compléter actuellement les calculs pour ce dernier cas. Si nous portons les expressions (17) des dérivées $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$ dans la première équation (18) nous obtenons l'équation

$$r_{uv} = ar_v + br,$$

qui doit être identique avec la deuxième équation (18). Nous trouvons ainsi le système

$$(19) \qquad \begin{cases} r_{uu} = ar_u + br_v, \\ r_{uv} = ar_v + br, \\ r_{vv} = r_u. \end{cases}$$

Ecrivant ensuite les conditions d'intégrabilité

$$(r_{uu})_v = (r_{uv})_u, \ (r_{uv})_v = (r_{vv})_u,$$

nous obtenons les deux relations

$$a(ar_v + br) + a_v r_u + br_u + b_v r_v = a(ar_v + br) + a_u r_v + br_u + b_u r,$$

$$ar_u + a_v r_v + br_v + b_v r = ar_u + br_v,$$

qui sont nécessairement des identités. D'ici on déduit

$$a_v = b_u, \qquad a_u = b_v, \qquad a_v = 0, \qquad b_v = 0,$$

ce qui signifie que a et b sont des constantes arbitraires.

4. Nous montrerons encore que les surfaces Q_1 et Q_2 jouissent de la propriété remarquable suivante: elles forment des couples de surfaces affinement identiques dont les tangentes aux lignes de coordonnées, aux points homologues, se correspondent par transport parallèle distancié, les réseaux sur les deux surfaces, pour lesquels est satisfaite cette condition, étant formés par les asymptotiques.

Nous réproduirons à cet effet la définition du transport parallèle distancié, que nous avons donnée dans le travail [2]. Considérons aux points homologues $M(u, v)$, $\overline{M}(u, v)$ des deux surfaces S, $\overline{S}_1$ rapportées au même système de coordonnées curvilignes u, v, un couple de tangentes parallèles (au sens euclidien) r_u et $\overline{r}_u$, ou bien r_v et $\overline{r}_u$, qui doivent être par suite liées par la relation

$$\overline{r}_u = \lambda r_u,$$

respectivement

$$\overline{r}_u = \mu r_v.$$

Transportons ensuite sur la surface $\overline{S}$, le vecteur $\overline{r}_u$, le long de la ligne v, au point infiniment voisin $\overline{M}_1(u, v + \Delta v)$, ou bien le long de la ligne u, au point infiniment voisin $\overline{M}_2(u + \Delta u, v)$, et puis posons la condition que l'angle formé par le vecteur transporté sur la surface $\overline{S}$ avec le plan tangent au point $M(u, v)$ à la surface S, soit le plus pétit possible. Effectuant les calculs pour les diverses cas nous avons étàbli la nature des réseaux u, v sur les deux surfaces.

Dans le travail [1] nous avons montré que, laissant de coté le cas des transformations homothétiques, les deux surfaces affinement identiques S et $\overline{S}$, qui se correspondent par un système de couples de tangentes parallèles, sont liées par le système

$$\begin{cases} \overline{r}_u = r_v, \\ \overline{r}_v = r + r_u, \end{cases}$$

ou bien par le système

$$\begin{cases} \overline{r}_u = r_v, \\ \overline{r}_v = r. \end{cases}$$

Posant maintenant la condition que le vecteur $\overline{r}_u$, transporté au point $\overline{M}_2(u + \Delta u, v)$, soit parallèle au plan tangent à la surface S, au point $M(u, v)$, on a

$$| r_u, r_v | \cdot | \lambda r_u + (\lambda_u r_u + \lambda r_{uu})\Delta u + \ldots | = \lambda | r_u, r_v, r_{uu} | \Delta u + \ldots = 0.$$

ce qui signifie que les courbes u, v forment sur la surface S un système d'asymptotiques. Il est aisé de voir que cette dernière condition est compatible avec les relations (18), (19). Si nous transportons le vecteur $\overline{r}_u$ au point $\overline{M}_1(u, v + \Delta v)$ sur la surface $\overline{S}$, et si nous posons ensuite la condition qu'il soit parallèle au plan tangent au point $M(u, v)$ de la surface S nous obtiendrons

$$| r_u, r_v | \cdot | \lambda r_u + (\lambda_v r_u + \lambda r_{uv})\Delta v + \ldots | = \lambda | r_u, r_v, r_{uv} | \Delta v + \ldots = 0.$$

Il est visible que dans ce cas les courbes u, v doivent former un réseau conjugué sur la surface S. Mais cette dernière condition n'est pas compatible avec les systèmes (18) et (19).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DRĂGILĂ, *Sur une classe de surfaces,* Boll. Un. Mat. Ital. v. 13, 1958, p. 465-469.

[2] P. DRĂGILĂ, *Transport parallèle distancié,* Bull. Sc. Math. t. LXXXII, 1958.