GINO ARRIGHI

Sulle matrici radice m^{a} della matrice nulla.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 128–133.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_128_0>

Sulle matrici radice m^a della matrice nulla.

Nota di Gino Arrighi (a Lucca)

Sunto. - *Presento un semplice schema per la costruzione delle matrici che sono radice* m^a *della matrice nulla; con corredo di osservazioni ed esempio.*

§ **1.** Seppure vasta è la letteratura attorno alle matrici pseudo-nulle o le radici m^e non nulle di una matrice nulla, reputo non noto questo semplice schema per scrivere tutte queste radici; schema che esporrò qui di seguito fissando il ragionamento sulla forma canonica di Jordan che si deduce secondo le radici caratteristiche e la caratteristica di Segre di una matrice.

Ovviamente se C è tale forma canonica della matrice A, cioè

$$C = T^{-1} \cdot A \cdot T \quad \text{e} \quad A = T \cdot C \cdot T^{-1}$$

dove T è la inversa della matrice (propria) canonizzante T, dalle

$$C^m = T^{-1} \cdot A^m \cdot T \quad \text{e} \quad A^m = T \cdot C^m \cdot T^{-1}$$

discende che: da A^m nulla segue C^m nulla e viceversa.

Si osservi poi che se A è radice m^a della matrice nulla di ordine n, tutte le sue radici caratteristiche sono nulle e la sua forma canonica C sarà pienamente individuata dandosi la sua caratteristica di Segre

$$[(e_1, e_2, \dots, e_k)],$$

con

$$e_1 + e_2 + \dots + e_k = n \qquad e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_k,$$

dove la unicità della parentesi tonda all'interno di quella quadra è dovuta al fatto che tutte le radici caratteristiche sono eguali fra loro (nulle). Infatti, con la riserva di precisare in seguito la caratteristica di SEGRE, la C è così composta: lungo la sua diagonale principale sono allineate k matrici rispettivamente degli ordini $e_1, e_2, \ldots, e_k$ e combinate come subito dopo diremo, mentre sono nulli tutti gli altri suoi termini. Ciascuna delle k matrici componenti predette è così costituita: i termini della diagonale parallela, e consecutiva a destra, della diagonale principale sono tutti eguali ad 1, mentre sono nulli tutti gli altri suoi termini.

Può dirsi pure che la C è così composta: i termini della diagonale parallela, e consecutiva a destra, della diagonale principale si susseguono, procedendo dall' alto, in questo ordine: $e_1 - 1$ termini eguali ad 1, un termine nullo, $e_2 - 1$ termini eguali ad 1, un termine nullo, ..., un termine nullo, $e_k - 1$ termini eguali ad 1; mentre sono nulli tutti gli altri suoi termini.

Passandosi a sciogliere la superiore riserva circa la caratteristica di SEGRE, osservo che ciascuna delle predette matrici componenti di C è pseudonulla di rango eguale al suo ordine cioè la potenza con esponente e_1 della prima è una matrice nulla mentre non lo sono le potenze con esponente minore; analogamente così per le altre. Pertanto affinchè C^m sia la matrice nulla, considerandosi il non crescere degli e_i, occorre e basta che sia $e_1 \leq m$; con che è tolta la riserva gia fatta.

Alla generalità della costituzione di C conseguente al senso della precedente limitazione, si aggiunge la arbitrarietà della scelta di T, purchè propria, per la espressioni di A.

Si può dunque dire:

TEOREMA. – *La più generale radice* m^a *delle matrice nulla di ordine* m *è data dalla*

$$T \cdot C \cdot T^{-1},$$

dove T *è una qualunque matrice propria di ordine* n; *e* C, *sua forma canonica, è una matrice così composta: i termini della diagonale parallela, e consecutiva a destra, della diagonale principale si susseguono, precedendo dall'alto, in questo ordine*

$e_1 - 1$ *termini eguali ad* 1

1 *termine eguale a* 0

$e_2 - 1$ *termini eguali ad* 1

1 *termine eguale a* 0

. . . .

. . . .

$$1 \quad \textit{termine eguale a } 0$$

$$e_k - 1 \quad \textit{termini eguali ad } 1,$$

dove ai numeri (interi k, e_1, $e_2, \ldots, e_k$ *si impongono tutte e sole le limitazioni*

$$e_1 \geq e_2 \geq \ldots \geq e_k$$

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_k = n$$

$$e_1 \leq m;$$

se tali sono i termini della predetta diagonale, sono nulli tutti gli altri termini di C.

§ 2. A completamento e chiarimento di quanto detto aggiungo che lo scambio nell'ordine con cui si succedono le matrici componenti di C può ottenersi mediante una trasformazione per contragredienza cosicchè un diverso ordine nella distribuzione dei gruppi di termini unitari sulla predetta diagonale parallela alla diagonale principale di C, secondo la prima delle limitazioni poste verso la fine del precedente teorema, può ottenersi con una particolare scelta di T. Infatti con

$$C = \left\| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

prendendo

$$T = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

onde

$$T^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

si ha successivamente

$$T \cdot C \cdot T^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \left\Vert \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\Vert$$

con che le due matrici componenti, rispettivamente di ordine 3 e 2, risultano scambiate.

Osservo ancora che le successive potenze di una matrice componente di C possono essere ottenute come trasformate per contragredienza di matrici del tipo stesso ma composte. Infatti per

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

donde

$$C^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

prendendo

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

onde $T^{-1} = T$, si ha successivamente

$$TC^2T^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \left\Vert \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right\Vert .$$

Od anche per

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

donde

$$C^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

prendendo

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

onde $T^{-1} = T$, si ha successivamente

$$T \cdot C \cdot T^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

A guisa di esempio tratterò delle radici cubiche della matrice nulla del 5° ordine; in virtù del teorema si hanno le segnature di SEGRE

$$[(3,\ 2)],\quad [(3,\ 1,\ 1)],\quad [(2,\ 2,\ 1)],\quad [(2,\ 1,\ 1,\ 1)],\quad [(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)]$$

alle quali corrispondono ordinatamente le forme canoniche di JORDAN

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

delle quali non resta a fare che una trasformazione per contragredienza mediante una matrice arbitraria (propria) T del 5° ordine,