Bollettino
Unione Matematica Italiana

Pham Mau Quan

Thermodynamique d'un fluide relativiste.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 105–118.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_105_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Thermodynamique d'un fluide relativiste.

Nota di PHAM MAU QUAN (a Besançon)

Résumé. - *L'auteur se propose d'établir en relativité générale les équations de l'hydrodynamique des fluides en présence des phénomènes calorifiques. Un fluide thermodynamique est caractérisé outre les éléments habituels: densité propre, vecteur vitesse unitaire, tenseur de pressions propres, par un champ scalaire de températures propres. L'hypothèse de conduction de* FOURIER *ainsi que l'équation de continuité de la chaleur ont été généralisées en relativité. Une expression du tenseur d'impulsion-énergie est proposée: elle se justifie par ses conséquences. Les équations du mouvement du fluide thermodynamique sont déduites des conditions de conservation. L'auteur envisage enfin le problème de l'intégration locale des équations du champ au moyen d'une analyse du problème de* CAUCHY. *Un examen des variétés caractéristiques ainsi que des conditions de raccordement est esquissé.*

1. Introduction.

La thermodynamique classique justifie l'extension du principe de d'ALEMBERT aux fluides dont le potentiel interne par unité de volume est de la forme $\varphi(\rho, \theta)$ où ρ est la densité et θ la température. Cependant dans l'application du principe de d'ALEMBERT généralisé, on procède aux modifications virtuelles en deux stades:

1) une modification virtuelle compatible avec les liaisons à l'instant t et qui laisse invariante la température, ce qui fournit les équations de mouvement;

2) une modification de la température fixée au moyen de quelque hypothèse thermodynamique.

On en déduit qu'en tout point du fluide, existe la relation

$$\varphi(\rho, \theta) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho, \theta) + p = 0$$

où p réprésente la pression. C'est l'équation caractéristique du fluide. Elle fait intervenir en hydrodynamique un nouveau champ scalaire qui définit la température θ. On doit alors faire intervenir une nouvelle relation demandée à la théorie de la chaleur, en l'espèce l'équation de conduction thermique

$$\operatorname{div}(-\varkappa \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \theta) = c\rho \frac{d\theta}{dt} - \frac{l}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

La décomposition précédente permet heureusement en Mécanique classique d'établir les équations générales du fluide. Mais si selon les principes de la relativité, on donne une inertie à l'énergie, de quelque origine soit-elle, on ne peut par ce procédé obtenir les équations rigoureuses du fluide. Il nous faut de plus tenir compte de l'effet de la gravitation. Ce sont ces raisons qui militent en faveur d'une formulation relativiste de la thermodynamique des fluides. Cette étude se faisant dans le cadre de la théorie de la relativité générale, j'essaie de présenter de manière la plus géométrique l'établissement des équations.

2. Définitions et considérations géométriques générales.

La représentation de la matière s'effectue en relativité générale par des schémas du type hydrodynamique. La notion de fluide y joue donc un rôle primordial. Comment peut-on la définir. Un milieu continu est représenté par un domaine connexe D de l'espace-temps V_4 variété différentiable à quatre dimensions de classe de différentiabilité C^2, C^4 par morceaux, douée de la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{2.1}$$

du type hyperbolique normal (les $g_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de classe C^1, C^3 par morceaux), qui définit sur l'espace vectoriel tangent en une structure d'espace de MINKOWSKI. Cette métrique d'univers satisfait aux dix équations d'EINSTEIN

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{2.2}$$

où le tenseur d'EINSTEIN $S_{\alpha\beta}$ définit la structure géométrique de l'espace-temps et le tenseur $T_{\alpha\beta}$, de signification purement physique, doit généraliser la densité d'impulsion-énergie et décrire au mieux les propriétés du milieu occupant le domaine D considéré et son mouvement.

Le milieu considéré est dit un fluide s'il est possible définir sur D

1) un champ de scalaire ρ

2) un champ de vecteur unitaire $\vec{u}$ orienté dans le temps ($\vec{u}^2 = +1$)

ρ sera dit densité propre du fluide et $\vec{u}$ vecteur vitesse unitaire. Le fluide envisagé est dit thermodynamique lorsque les phénomènes calorifiques ne sont pas négligés. Les forces de liaison entre les divers éléments du fluide qui jouent un rôle fondamental dans les considérations mécaniques et thermodynamiques, se traduisent par un tenseur symétrique $\pi_{\alpha\beta}$ dit tenseur des pressions propres. Les phénomènes calorifiques sont introduits par un champ scalaire θ dit champ de température propre.

Pour un fluide thermodynamique, nous pouvons prendre le tenseur d'impulsion-énergie

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

où $Q_{\alpha\beta}$ répresente la part thermodynamique. La décomposition géométrique précédente de $T_{\alpha\beta}$ correspond à la séparation et l'interaction des phénomènes mécaniques et thermodynamiques caractérisant le fluide.

Donnons encore quelques définitions.

$\vec{u}$ désignant le vecteur vitesse unitaire en chaque point du fluide, ses trajectoires orientées dans le temps, sont appelées les *lignes de courant.* On appelle *repère propre* en un point x de D, un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{e}_0$ coincide avec $\vec{u}$ et dont les trois autres vecteurs $\vec{e}_i$ orientés dans l'espace ($\vec{e}_i^{\,2} = - 1$) définissent le 3-plan π_x orthogonal à $\vec{u}$.

Le repère propre ainsi défini doit être identifié à un repère galiléen local, l'axe de temps ayant la direction du vecteur $\vec{u}$ et l'espace associé est défini par le 3-plan π_x. On peut naturellement rapporter le voisinage d'un point de D au repère propre en ce point. La métrique d'univers de V_4 prend la forme canonique

$$ds^2 = \eta_{\lambda'\mu'}\omega^{\lambda'}\omega^{\mu'} = (\omega^{0'})^2 - (\omega^{1'})^2 - (\omega^{2'})^2 - (\omega^{3'})^2$$

où les $\omega^{\lambda'}$ constituent un système de formes de PFAFF locales linéairement indépendantes.

La considération du repère propre est fort utile. En effet un tenseur peut être défini en un point de V_4 par ses composantes relatives au repère propre. Ses composantes générales quelconques se déduisent des premières par les formules du changement de repère. Inversement l'interprétation physique se déduit de la considération de l'espace de MINKOWSKI tangent: rapporté à un repère orthonormé, cet espace doit être identifié à l'espace temps de la relativité restreinte rapporté à un repère galiléen, ce qui fournit directement en termes de temps et d'espace associés les interpréta tions physiques désirées. On peut pour certaines applications se placer dans un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI.

3. Le tenseur d'impulsion-énergie du fluide thermodynamique.

Pour déterminer l'expression explicite de $T_{\alpha\beta}$, nous rapportons d'abord le fluide au voisinage d'un point x de D au repère propre en ce point. Dans ce repère, la matière est au repos au point considéré. Le fluide y est caractérisé par sa densité propre ρ^*, son tenseur des pressions $\pi^*_{i'k'}$ et le vecteur courant de chaleur $q^*_{i'}$ qui rend compte de la conduction thermique. Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ a donc pour valeurs des composantes dans le repère propre (¹)

$$T_{0'0'} = \rho = \rho^* \quad T_{i'k'} = -\pi_{i'k'} = -\pi^*_{ik'} \quad T_{0'i'} = T_{i'0'} = -q_{i'} = q^*_{i'}.$$

Rapportons maintenant l'espace-temps au point considéré au repère naturel associé au système de coordonnées locales x^α. Soit $(A_\alpha{}^{\lambda'})$ la matrice de passage d'un repère à l'autre et $(A_{\lambda'}{}^\alpha)$ la matrice inverse. On a:

$$A_{0'}{}^\alpha = u^\alpha \qquad A_\alpha{}^{0'} = u_\alpha$$
$$A_{i'}{}^\alpha = e_{(i')}{}^\alpha \qquad A_\alpha{}^{i'} = -e_{\alpha(i')}.$$

Nous passons des composantes $T_{\lambda'\mu'}$ aux composantes $T_{\alpha\beta}$ par les formules

$$T_{\alpha\beta} = T_{\lambda'\mu'} A_\alpha{}^{\lambda'} A_\beta{}^{\mu'}.$$

En effectuant les calculs, nous obtenons l'expression générale invariante de $T_{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) \tag{3.1}$$

où nous avons posé

$$\pi_{\alpha\beta} = \sum_{i',k'} \pi_{i'k'} e_{(i')\alpha} e_{(k')\beta}$$
$$q_\alpha = \sum_{i'} q_{i'} e_{(i')\alpha}.$$

Les quantités $\pi_{\alpha\beta}$ et q_α satisfont respectivement aux identités

$$\pi_{\alpha\beta} u^\alpha = 0$$
$$q_\alpha u^\alpha = 0$$

(¹) Tout indice grec prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et tout indice latin, les valeurs 1, 2, 3. Les indices primés se rapportent au repère propre et les quantités étoilées sont définies dans π_x.

et l'on remarque que le premier terme $\rho u_\alpha u_\beta$ correspondant à l'énergie pondérable est un tenseur qui fait intervenir un vecteur orienté dans le temps, le second terme $\pi_{\alpha\beta}$ ou tenseur des pressions fait intervenir des vecteurs orientés dans l'espace et le troisième terme $Q_{\alpha\beta} = u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha$ ou tenseur thermodynamique fait intervenir des vecteurs des deux espèces.

4. Repère principal et repére propre.

Si on étudie les directions principales de l'espace-temps au point x, c'est-à-dire les directions conjuguées communes au cône élémentaire

$$g(\vec{X}) \equiv g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0 \tag{4.1}$$

et au cône de RICCI

$$R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0 \tag{4.2}$$

où $\vec{X}(X^\alpha)$ désigne un vecteur tangent en x, on s'aperçoit qu'en vertu des équations d'EINSTEIN les directions principales sont conjuguées communes au cône (4.1) et au cône d'équation

$$T(\vec{X}) \equiv T_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0 \tag{4.3}$$

associé au tenseur d'énergie. De sorte que la détermination des directions principales de l'espace-temps se trouve ramené à celle des vecteurs propres de la matrice $(T_{\alpha\beta})$ relativement à la matrice $(g_{\alpha\beta})$. Les valeurs propres de cette matrice relativement à $g_{\alpha\beta}$ sont les racines de l'équation en s

$$\det | T_{\alpha\beta} - s g_{\alpha\beta} | = 0. \tag{4.4}$$

Pour qu'un tenseur symétrique $T_{\alpha\beta}$ puisse servir à décrire un fluide, il est nécessaire qu'il admette un vecteur propre réel $\vec{V}_{(0)}$ orienté dans le temps. On dit alors qu'il est normal (il en est en particulier ainsi si la forme $T(\vec{X})$ est définie). La valeur propre correspon dante s_0 est nécessairement réelle; les trois autres valeurs propres s_i sont réelles et l'on peut trouver les trois vecteurs propres orienté dans l'espace tels que le repère défini par $\vec{V}_{(\lambda)}$ soit orthonormé. Ce repère est dit *repère principal* de l'espace-temps. Dans le cas où l'une des valeurs propres est multiple, il existe une infinité de repères principaux en x.

On peut exprimer les composantes de $T_{\alpha\beta}$ à partir des valeurs propres et vecteurs propres comme

$$T_{\alpha\beta} = s_0 V_{(0)\alpha} V_{(0)\beta} - \sum_i s_i V_{(i)\alpha} V_{(i)\beta}. \tag{4.5}$$

On voit que le repère propre défini au § 2 est différent dans le cas général du repère principal. Si l'on néglige les phénomènes calorifiques dans le fluide ($Q_{\alpha\beta} = 0$), (3.1) se réduit à

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \sum_{i,k'} \pi_{i'k'} e_{(i')\alpha} e_{(k')\beta}. \tag{4.6}$$

Alors $\overrightarrow{u}$ coïncide avec $\overrightarrow{V_{(0)}}$ et le 3-plan $\pi_x(\overrightarrow{e_i})$ avec le 3-plan $(\overrightarrow{V_i})$. En particulier $\rho = s_0$ et l'on peut faire une rotation dans π_x de façon à identifier (4.6) à (4.5).

5. La conduction de chaleur en relativité.

1. Le vecteur courant de chaleur $\overrightarrow{q}$ peut-être rendu compte par l'extension relativiste de l'hypothèse de Fourier $\overrightarrow{q^*} = \varkappa \overset{*}{\overrightarrow{\text{grad}}}\, \theta$ où θ désigne le champ scalaire de température que nous supposerons de classe C^1, C^3 par morceaux et $\varkappa$ le coefficient de conductivité thermique. Si le milieu est isotrope, $\varkappa$ est un scalaire: c'est ce que nous supposerons. Par rapport au repère propre associé au point considéré, le vecteur $\overrightarrow{q}$ a pour composantes

$$q_{0'} = 0 \qquad \overset{*}{q}_{i'} = q_{i'} = -\varkappa \partial_{i'} \theta$$

$\partial_{\alpha'}$ désignant la dérivée pfaffienne relative aux formes $\omega^{\alpha'}$.

Nous passons des composantes $q_{\lambda'}$ de $\overrightarrow{q}$ aux composantes covariantes q_α dans le repère naturel par les formules

$$q_\alpha = q_{\lambda'} A^{\lambda'}{}_\alpha = q_{i'} A^{i'}{}_\alpha.$$

D'autre part, dans le changement de coordonnées on a $\partial_{i'}\theta = \partial_\rho \theta A^\rho{}_{i'}$. Il en résulte

$$q_\alpha = -\varkappa \partial_\rho \theta A^\rho{}_{i'} A^{i'}{}_\alpha.$$

On en déduit par un calcul simple

$$q_\alpha = -\varkappa \partial_\rho \theta (g^\rho{}_\alpha - u^\rho u_\alpha). \tag{5.1}$$

Cette formule montre que $\overrightarrow{q}$ est la composante d'espace du vecteur $-\varkappa \overrightarrow{\text{grad}}\, \theta$ relativement à la direction de temps $\overrightarrow{u}$. On vérifie également que

$$q_\alpha u^\alpha = 0. \tag{5.2}$$

Cette identité appelle deux remarques:

a) $\vec{q}$ est un vecteur d'espace orthogonal à $\vec{u}$, son carré est négatif

$$q^2 = g_{\sigma\beta} q^\alpha q^\beta \leq 0 ; \tag{5.3}$$

b) l'identité (5.2) traduit en un certain sens l'absence de toute « densité de charge calorifique ».

DEFINITION. - On appellera *lignes de chaleur*, les trajectoires du vecteur courant de chaleur.

Ces lignes orientées dans l'espace sont orthogonales aux lignes de courant. Elles interviennent pour la description de certains phénomènes calorifiques.

2. Dans l'espace-temps V_4, le vecteur $\vec{q}$ permet de définir le flux de chaleur à travers un élément 3-plan orienté dans le temps. Il satisfait à une formule de divergence que l'on peut établir en admettant le postulat de continuité de la chaleur.

L'élément de fluide au point x de D est caractérisé par sa densité propre ρ, sa température θ et son volume spécifique $\bar{\omega} = 1/\rho$. Au cours d'une modification élémentaire d'état, la quantité de chaleur mise en jeu est

$$Q_e = c d\theta \wedge m + l d\bar{\omega} \wedge m$$

où c est la chaleur spécifique à volume constant et l la chaleur de dilatation. m est la forme élément de matière dont la seule composante non nulle dans le repère propre est $m_{1'2'3'} = \rho$.

Dans le repère propre, l'élément de fluide a pour volume $\omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}$ et a pour masse $m = \rho\omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}$. Un calcul effectué dans le repère propre donne

$$Q_e = \left(c\rho u^{\rho'} \partial_{\rho'} \theta - \frac{l}{\rho} u^{\rho'} \partial_{\rho'} \rho \right) \frac{1}{4!} \eta_{\alpha_0' \alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'} \omega^{\alpha_0'} \wedge \omega^{\alpha_1'} \wedge \omega^{\alpha_2'} \wedge \omega^{\alpha_3'}$$

où $\eta_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume spatio-temporel. On en déduit l'expression

$$Q_e = \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{5.4}$$

lorsqu'on rapporte l'espace-temps au repère naturel.

Par définition Q_e est appelée la chaleur dégagée relative à un élément quadridimensionnel de fluide attaché au point x^α lorsqu'il vient au point voisin $x^\alpha + dx^\alpha$. La quantité totale de chaleur dégagée relative à un domaine B_4 intérieur à D sera l'intégrale

$$Q_e = \int_{B_4} \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) d\tau. \tag{5.6}$$

Considérons maintenant des domaines B_4 limités dans des tubes de courant par deux sections engendrées par des lignes de chaleur (associés donc à des volumes fluides). Le postulat de la continuité de la chaleur affirme que la chaleur dégagée relative à un B_4 quelconque est égale au flux du vecteur courant de chaleur $\vec{q}$ à travers la surface latérale de B_4. Grâce au choix de B_4, le flux a pour valeur

$$\int_{\partial B_4} q^\alpha d\omega_\alpha$$

où B_4 est la frontière de B_4, $d\omega_\alpha$ l'élément d'hypersurface de ∂B_4. Nous avons donc

$$\int_{\partial B_4} q^\alpha d\omega_\alpha = \int_{B_4} \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) d\tau. \tag{5.7}$$

En transformant la première intégrale de surface en intégrale de divergence par la formule de Stokes, on en déduit l'égalité

$$\int_{B_4} \left[\nabla_\alpha q^\alpha - \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) \right] d\tau = 0$$

qui a lieu pour tout domaine B_4 ainsi défini. Sous des hypothèses de différentiabilité, on en tire

$$\nabla_\alpha q^\alpha = c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho. \tag{5.8}$$

Inversement on voit que la formule (5.7) est vraie quel que soit le domaine B_4 et non seulement du type défini.

L'équation (5.8) est l'équation de conduction thermique. Elle généralise l'équation classique de Fourier.

6. Les équations de mouvement.

Le tenseur d'Einstein étant conservatif, il en est de même du tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$. Les équatons de mouvement du fluide thermodynamique sont fournies par les conditions de conservation appliquées à la forme (3.1) du tenseur d'impulsion-énergie, soit

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \tag{6.1}$$

En tenant compte des conditions

$$u^\alpha u_\alpha = +1 \qquad u^\alpha q_\alpha = 0 \qquad \pi_{\alpha\beta}u^\alpha = 0$$

on en déduit

(6.1) $$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) - u_\beta \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho$$

(6.2) $$\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\rho}(g^\beta{}_\rho - u_\rho u^\beta) = \nabla_\alpha(u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) - u^\beta(\nabla_\alpha q^\alpha - q^\rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\rho).$$

L'équation (6.1) joue le rôle d'une équation de continuité pour le milieu. L'énergie d'origine calorifique y figure effectivement. D'autre part, les lignes de courant étant définies comme trajectoires du champ de vecteur $\vec{u}$, les équations (6.2) où l'on pose

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

constituent un système différentiel qui détermine les lignes de courant du fluide considéré. En réalité, dans ces équations intervient le champ de température θ ; il convient de leur adjoindre les équations

(6.3) $$q_\alpha = -\varkappa \partial_\rho \theta (g^\rho{}_\alpha - u_\rho u_\alpha)$$

(6.4) $$\nabla_\alpha q^\alpha = c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho.$$

L'interprétation des équations de mouvement du fluide thermodynamique se fait en posant les hypothèses locales

(6.5) $$\rho = \mu(1 + \varepsilon)$$

(6.6) $$\nabla_\alpha(\mu u^\alpha) = 0$$

où μ est la densité de matière locale, $\mu\varepsilon$ la densité d'énergie interne. (6.6) traduit alors la conservation classique de la matière.

Cas d'un fluide parfait thermodynamique. – Un fluide est dit parfait si la résultante des forces superficielles agissant sur un élément de surface orientée est normale à cet élément. On a alors dans le repère propre

$$\pi^{i'k'} = p\delta_{i'k'}$$

où p est un scalaire représentant la pression du fluide au point considéré. Les formules de transformation conduisent à

$$\pi_{\alpha\beta} = p(g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta)$$

et le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait thermodynamique prend la forme

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha). \tag{6.7}$$

Les équations de mouvement s'écrivent

$$\nabla_\alpha[(\rho + p)u^\alpha] - u^\alpha \partial_\alpha p = \nabla_\alpha q^\alpha - q^\rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\rho \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}(\rho + p)u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \partial_\alpha p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) &= \\ = \nabla_\alpha(u^\alpha q^\beta + u^\alpha q^\beta) - u^\beta(\nabla_\alpha q^\alpha &- q^\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho).\end{aligned} \tag{6.9}$$

Les quantités ρ, p, θ sont liées par une relation appelée équation d'état du fluide parfait. Celle-ci peut être introduite sous la forme

$$\rho = \varphi(p, \theta). \tag{6.10}$$

Les équations du fluide thermodynamique que nous avons établies, apportent certaine modification aux résultats classiques. En première approximation elles mettent en évidence les corrections relativistes à faire dans le cas où le gradient de température est élevé. Notons en particulier que ces équations se prêtent à une étude globale intéressant les problèmes cosmologiques où l'on considère des modèles d'univers thermodynamiques stationnaires.

7. Le problème de Cauchy.

On peut se proposer d'étudier la structure des équations fondamentales du fluide parfait thermodynamique au moyen d'une analyse du problème de CAUCHY. Pour cela, on se donne sur une hypersurface S

a) le champ de gravitation par les $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$;

b) le champ de température par les θ et $\partial_\lambda \theta$;

et on se propose de déterminer l'ensemble des champs ($g_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p) au voisinage de S. Il suffit d'étudier la possibilité de calculer sur S les valeurs des différentes quantités introduites et de leurs dérivées successives sur S.

L'hypersurface S étant définie localement par

$$x^0 = 0,$$

les équations d'EINSTEIN sont équivalentes pour $g^{00} \neq 0$, à l'ensemble des deux systèmes

$$R_{ij} = \chi \left[(\rho + p) u_i u_j - \frac{1}{2} (\rho - p) g_{ij} - (u_i q_j + u_j q_i) \right] \tag{7.1}$$

$$S^0{}_\lambda = \chi [(\rho + p) u^0 u_\lambda - p g^0{}_\lambda - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0)] \tag{7.2}$$

où les $S^0{}_\lambda$ ont des valeurs connues sur S et

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + F_{ij}$$

les F_{ij} étant calculables sur S à partir des données de CAUCHY $(g_{\alpha\beta},\ \partial_0 g_{\alpha\beta})$.

Supposant p provisoirement connu, on évalue d'abord en fonction de p les inconnues u^0 et $Z = u^\rho \partial_\rho \theta$ qui peuvent s'exprimer à l'aide de la nouvelle inconnue

$$V^0 = (p + p - \varkappa Z) u^0 + \varkappa(\partial^0 \theta - Z u^0). \tag{7.3}$$

De (7.2) on tire en effet les équations

$$x(V^0 + \varkappa \partial^0 \theta) u^0 = S^{00} + \chi p g^{00} \equiv P^{00}(p) \tag{7.4}$$

$$\chi(V^0 Z + \varkappa \triangle_1 \theta u^0) = (S^{0\lambda} = \chi p g^{0\lambda}) \partial_\lambda \theta = Q^0(p) \tag{7.5}$$

qui déterminent linéairement u^0 et Z à partir de V^0. Or on peut déterminer V^0 ou $W^0 = V^0 + \varkappa \partial^0 \theta$ en fonction de p en exprimant à partir de (7.2) le caractère unitaire de $\vec{u}$. Il vient

$$\begin{aligned}(W^0)^4 - 2\varkappa \partial^0 \theta (W^0)^3 + [\varkappa^2 (\partial^0 \theta)^2 - (R^0)^2](W^0)^2 + \\ + 2\varkappa P^{00} Q^0 W^0 - \varkappa^2 \triangle_1 \theta (P^{00})^2 = 0\end{aligned} \tag{7.6}$$

où $\chi^2 (R^0)^2$ est le carré du vecteur d'espace $(S^0{}_\lambda + \chi p g^0{}_\lambda)$.

Connaissant $W^0(p)$ on détermine sur S la valeur de p à l'aide de l'équation d'état

$$\rho = \varphi(p,\ \theta)$$

puis les valeurs de ρ, u^α. Les u^α sont déterminés si $V^0 \neq 0$. Les équations (7.1) donnent alors les $\partial_{00} g_{ij}$.

La détermination des valeurs sur S de $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 p$, $\partial_{00} \theta$ s'effectuent à l'aide des conditions de conservation et de l'équation de conduction thermique. Introduisant encore l'inconnue auxiliaire Z, on déduit de ces équations le système

$$\frac{l}{\rho}u^0\frac{\partial\varphi}{\partial p}\partial_0 p + \varkappa Z\partial_0 u^0 - \varkappa g^{00}\partial_{00}\theta + \varkappa u^0\partial_0 Z = H_1 \tag{7.7}$$

$$u^0\frac{\partial\varphi}{\partial p}\partial_0 p + (\rho + p - \varkappa Z)\partial_0 u^0 + \varkappa[g^{00} + (u^0)^2]\partial_{00}\theta - 2\varkappa u^0\partial_0 Z = H_2 \tag{7.8}$$

$$[g^{00} - (u^0)^2]\partial_0 p - (W^0 - \varkappa Z u^0)\partial_0 u^0 - \varkappa[g^{00} - (u^0)^2]u^0\partial_{00}\theta = H_3 \tag{7.9}$$

$$(\partial^0\theta - Zu^0)\partial_0 p - \varkappa(\triangle_1\theta - Z^2)\partial_0 u^0 + (\rho + p - \varkappa Z)(u^0)^2\partial_{00}\theta - V^0\partial_0 Z = H_4 \tag{7.10}$$

et les trois équations

$$(g^{0i} - u^0u^i)\partial_0 p - \varkappa(\partial^i\theta - Zu^i)\partial_0 u^0 - V^0\partial_0 u^i - \varkappa(g^{0i} - u^0u^i)u^0\partial_{00}\theta = K^i \tag{7.11}$$

où l'on a posé $\partial_\lambda\theta = g^{\lambda\rho}\partial_\rho\theta$ et où les H_α et K^i désignent des quantités à valeurs connues sur S.

Les quantités $\partial_0 p$, $\partial_0 u^0$, $\partial_{00}\theta$ (et $\partial_0 Z$) sont déterminées si le déterminant Ω du système linéaire (7.7), (7.8), (7.9), (7.10) est différent de zéro. On en déduit les $\partial_0 u^i$ par les équations (7.11).

L'étude précédente montre que, sauf pour des variétés exceptionnelles, le problème de CAUCHY posé admet une solution — du moins sous des données analiytiques —, ce qui contribue à justifier les équations du fluide thermodynamique que nous avons établies.

8. Les variétés caractéristiques.

Les variétés exceptionnelles du problème de CAUCHY sont des variétés à la traversée desquelles se présentent certaines discontinuités. Notre étude met en évidence trois espèces de variétés exceptionnelles.

1. Les variétés caractéristiques des équations d'EINSTEIN ($g^{00} = 0$) qui jouent le rôle des surfaces d'ondes gravitationnelles;

2. Les variétés caractéristiques V^{H_3} relatives au système des équations du mouvement du fluide ($\Omega = 0$). Elles correspondent aux discontinuités du gradient de pression (ainsi que de $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 q^\alpha$). Elles constituent l'extension relativiste des fronts d'ondes de l'hydrodynamique classique lorsqu'on tient compte des changements de température.

Ces variétés généralisent la propagation d'une perturbation faible compatible au sens d'HUGONIOT, avec le mouvement initial du fluide thermodynamique. Elles donnent la solution du problème de la propagation du son dans un milieu conducteur. Si $\vec{q}$ est petit, ce qui est le cas des fluides courants, on établit à partir de l'équation $\Omega = 0$ que la vitesse de propagation V est donnée aux infiniment petits d'ordre supérieur près par

$$V = \pm (\varphi'_p)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{\varphi'_p}\right)\left(1 + \frac{l}{\rho}\right)\frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\rho + q}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire d'espace définissant la direction de propagation.

La correction est de l'ordre de $\dfrac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\rho + p}$; si on compare aux résultats classiques $V = \pm \varphi'_p{}^{-\frac{1}{2}}$. Elle est donc imperceptible aux mesures expérimentales. C'est dans ce sens que nous avons une preuve de la précision des formules classiques proposées depuis LAPLACE.

3. Les variétés exceptionnelles ($V^0 = 0$) à la traversée desquelles se produisent des discontinuités de ρ, p, u^α, q^α. Pour les étudier il faut revenir aux équations initiales utilisées pour la determination de p, u^α qui peuvent s'écrire

$$S^{0\lambda} = \chi T^{0\lambda}.$$

Cette étude ne fait pas intervenir l'équation de conduction thermique et les conditions de conservation. Nous supposons que les données consistent en les valeurs de $(g_{\alpha\beta}, \partial_\lambda g_{\alpha\beta})$ sur S, la température θ pouvant donc être discontinue à la traversée de S, mais les conditions de raccordement de SCHWARTSCHILD sont préservées.

Nous orientons l'hypersurface S par sa normale de manière à distinguer une face positive + et une face négative —. Le problème consiste à déterminer les valeurs de $(\rho_-, p_-, \theta_-, \vec{u}_-, \vec{q}_-)$ lorsque l'on se donne les valeurs $(\rho_+, p_+, \theta_+, \vec{u}_+, \vec{q}_+)$ ou inversement, ce qui se fait à l'aide des équations

$$T^{0\lambda}{}_+ = T^{0\lambda}{}_-.$$

C'est le problème qui se pose dans l'étude des ondes de choc. Les variétés présentes donnent donc la généralisation relativiste de ce problème. On en fait l'étude en ajoutant les hypothèses locales

$$\rho = \mu(1 + \varepsilon)$$

$$\nabla_\alpha(\mu u^\alpha) = 0.$$

9. Le problème de raccordement.

On se donne un domaine D de l'espace-temps occupé par un fluide parfait thermodynamique et on se propose de raccorder le champ intérieur au champ extérieur défini par un ds^2 satisfait aux équations d'EINSTEIN du cas extérieur $S_{\alpha\beta} = 0$. Si l'hypersurface S qui limite le domaine D a pour équation locale $x^0 = 0$, d'après l'axiomatique de la théorie, les quantités $S^0{}_\alpha$ sont continues à la traversée de S. Il en résulte que les quantités $T^0{}_\alpha$ sont continues à la traversée de S. On a donc

$$T^0{}_\alpha = (\rho + p)u^0 u_\alpha - pg^0{}_\alpha - (u^0 q_\alpha - u_\alpha q^0) = 0.$$

Le champ extérieur correspond au vide. Il n'y a pas de matière, ni de chaleur. On démontre à partir de l'équation de conduction de FOURIER (5.8) que sur S $q^0 = 0$. Il vient

$$(\rho + p)u^0 u_\alpha - pg^0{}_\alpha - u^0 q_\alpha = 0.$$

Par multiplication contractée avec u^α, on obtient $\rho u^0 = 0$. On en tire $u^0 = 0$, puis $p = 0$ et $\partial^0\theta = 0$. En coordonnées locales quelconques, si $f(x^\alpha) = 0$ et l'équation de S, on peut traduire ces résultats sous la forme

$$u^\alpha \partial_\alpha f = 0 \qquad p = 0 \qquad g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta \theta = 0.$$

Ainsi, l'hypersurface S limitant le domaine D cooccupé par un fluide parfait thermodynamique doit être engendrée par les lignes de courant du fluide. De plus la pression p s'annule sur S et le vecteur courant de chaleur q_α en chaque point de S et tangent à S.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. LICHNEROWICZ, *Théories reltaivistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, « Masson », Parigi 1955.

[2] PHAM MAU QUAN, *Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques*, « Ann. Mat, pura ed appl. », serie IV, t. XXXVIII, 1955.

[3] PHAM MAU QUAN, *Étude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé*, « Jour. Rational Méchanics and Analysis 5 », N° 3, 1956.