Recensioni.

* Luigi Bianchi, Opere, Vol. XI, Edizioni Cremonese, Roma, 1959 (Paul Vincenzini)
* U. Dini, Opere, Vol. IV e Vol. 5, Edizioni Cremonese, Roma, 1959 (Silvio Cinquini)
* Convegno Internazionale Reticoli e geometrie proiettive, Edizioni Cremonese, Roma, 1958 (Ermanno Marchionna)
* F. G. Tricomi, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, CEDAM, Padova, 1960 (G. Cimmino)
* D. E. Rutherford, Fluid Dynamics, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1959 (C. Agostinelli)
* B. A. Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen? VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959 (F. G. Tricomi)
* M. Miller, Variationsrechnung, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959 (G. Cimmino)
* P. A. P. Moran, The theory of Storage, Methuen & Co, London, Wiley & Sons, New York, 1959 (F. G. Tricomi)
* F. e R. Nevanlinna, Absolute Analysis, Springer Verlag, 1959 (G. Cimmino)
* R. Atkin, Classical Dynamics, Heinemann, London, 1959 (C. Agostinelli)
* Edmund Landau, Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959 (Marco Cugiani)
* R. Descartes, Il Mondo ovvero Trattato della Luce, Boringhieri, Torino, 1950 (Ettore Carruccio)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.1, p. 69–84.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_69_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

RECENSIONI

LUIGI BIANCHI, *Opere*, vol. XI, corrispondenza, Ed. Cremonese Roma, 1959, p.p 302.

Le XI.ème volume des oeuvres de L. Bianchi termine la publication, décidée en 1938 par la commission scientifique de la société mathématique Italienne, de l'ensemble des travaux de l'illustre savant. A l'instar des grands bâtisseurs Romains, nos collègues Italiens viennent ainsi de doter la science mathématique de l'un des monuments les plus dignes d'en attester la perennité.

Le volume contient 179 lettres: 4 lettres de A. V. BÄCKLUND, 4 de E. BELTRAMI, 16 de L. BIANCHI, 3 de G. DARBOUX, 1 de A. BRILL, 1 de F. BRIOSCHI, 5 de E. COSSERAT, 1 de L. CREMONA, 4 de W. DYCK, 1 de A. ENNEPER, 13 de R. FRICKE, 1 de E. GOURSAT, 1 de C. GUICHARD, 23 de A. HURWITZ, 14 de F. KLEIN, 1 de L. LONG, 6 de E. PICARD, 2 de A. RIBAUCOUR, 1 de V. ROUQUET, 1 de F. SCHUR, 1 de H. STOUFF, 2 de A. THYBAUT et 73 de J. WEINGARTEN.

La présentation en a été confiée au professeur Eugenio Togliatti, qui, dans sa préface, indique les conditions dans lesquelles la publication a pu être réalisée et les critères qu'il a cru devoir observer pour mener à bien une entreprise aussi délicate. La tâche n'était pas facile; il fallait, pour la plupart des lettres à caractère scientifique, essayer de reconstituer, sans connaître la correspondance de L. Bianchi relative à ces mêmes lettres, la matière qui en était l'objet. M. E. Togliatti s'est acquitté de cette mission avec une minutie et une rigueur scientifique scrupuleuses, ce dont on peut se convaincre en lisant les 112 notes qui terminent l'ouvrage, grâce auxquelles se trouve largement facilitée l'interprétation du contenu des lettres présentées. Et ces notes ne sont pas seulement de caractére bibliographique; elles rendent dans leur ensemble, un compte exact de l'évolution de la science mathématique dans une période de particulièrement intense activité, et confèrent de ce fait à l'ouvrage une valeur scientifique incontestable.

L'ouvrage commence par 4 lettres de A. V. Bäcklund, écrites de Mai 1885 à Mai 1889, dans lesquelles ce géomètre donne un certain nombre d'indications au sujet des travaux qu'il a entrepris sur les transformations des surfaces à courbure constante, en prolongement de la théorie de la transformation complémentaire des surfaces à courbure totale constante négative de L. Bianchi.

Suivent 4 lettres de Beltrami. Dans les deux premières, l'une du 11 Juin 1894 et l'autre du 19 Janvier 1899, E. Beltrami remercie L. Bianchi pour l'envoi de deux ouvrages: la deuxième partie de ses *Lezioni di geometria differenziale,* et son édition lithographiée de la « *Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* ». Dans la deuxième Beltrami exprime les regrets qu' il éprouve de voir son activité scientifique et professionnelle ralentie par un état de santé depuis quelques années précaire, et par les charges académiques auxquelles il est tenu de faire face. Dans une lettre du 17 mars 1899 il s'incline devant les raisons qui ont amené L. Bianchi à décliner l'offre d'un transfert à l'Université de Rome. Il lui demande au nom de l'Académie une notice sur Sophus-Lie que la mort venait d'enlever à la science (notice envoyée presque aussitôt par L. Bianchi à l'Académie et dont E. Beltrami accuse réception dans une lettre du 3 Avril 1899). Il le tient en outre au courant d'une note présentée à l'Institut par C. Guichard, dont il sait que les travaux sont suivis avec le plus vif intérêt par L. Bianchi.

Il semble résulter des lettres précédentes de E. Beltrami, que les présences de L. Bianchi aux réunions académiques de Rome n'étaient pas aussi fréquentes que ses confrères l'auraient désiré. Et il faut voir là une preuve de la puissance des liens qui attachaient L. Bianchi à l'Université de Pise, à son école normale, et à ses étudiants dont il était le véritable père spirituel, et auxquels il consacrait la plus grande partie du temps que lui laissaient la vie de famille et la poursuite de ses recherches, avec une conscience professionnelle et un enthousiasme restés légendaires.

La correspondance échangée par L. Bianchi avec G. Darboux, comme aussi avec les autres grands mathématiciens de son époque (Fricke, Hurwitz, Klein, Weingarten, ...) présente un très grand intérêt comme montrant l'heureux effet que peut avoir sur l'avancement de la science une confrontation des points de vue faite dans un esprit d'amicale et confiante collaboration. Dans le cas actuel l'intérêt se trouve accru du fait qu'il a été possible d'obtenir, de la bibliothèque de l'Institut de France, la transcription de 16 lettres écrites par L. Bianchi à G. Darboux, et que ce dernier conservait dans sa correspondance, preuve des sentiments de haute estime qu'il professait pour son illustre collègue italien.

Dans une lettre du 16 Novembre 1888, L. Bianchi remercie G. Darboux pour l'envoi du 2.ème volume de sa *Théorie générale des surfaces*, et lui dit l'intérêt avec lequel il a lu les chapitres sur les équations linéaires aux dérivées partielles et l'espoir qu'il fonde sur le succès de l'application à la géomètrie des théories qui y sont développées. Il y exprime également la conviction que les méthodes appliquées par Darboux dans son étude des surfaces minima exposée dans le 1.er volume de l'ouvrage cité, doivent pouvoir s'appliquer aux surfaces Fuchsiennes, et signale à cet égard, à l'attention de Darboux, les résultats qu' il a obtenus dans ce sens dans une note des *Rendiconti dei Lincei* « Sulle superficie Fuchsiane ».

Une lettres du 31 Mai 1890, revèle à G. Darboux certaines interférences entre les travaux de C. Guichard sur les surfaces à courbure totale constante et des travaux antérieurs de Voss et de Ribaucour que Guichard et Darboux ignoraient. C'est dans cette lettre que, dans un souci de justice auquel Darboux et Guichard ont sans doute été les premiers à rendre hommage, L. Bianchi attribue à Ribaucour la paternité des congruences (qui portent son nom) dont les développables déterminent un réseau conjugué (à invariants égaux) sur la surface moyenne.

3 lettres de Bianchi à Darboux et une réponse de Darboux à Bianchi, écrites au cours des années 1899 et 1900, et dont l'ensemble constitue un document d'une très haute valeur scientifique, ont trait à une discussion de priorité soulevée par L. Bianchi au sujet de certaines transformations des surfaces à courbure totale constante, menée sur le ton de la plus parfaite courtoisie, qui a été pour chacun des interlocuteurs motif de respect et d'admiration pour l'autre, et qui a puissamment contribué à nouer, entre les deux grands géomètres, des liens dont la science devait si largement profiter.

Depuis, L. Bianchi eut à coeur de tenir régulièrement G. Darboux au courant de ses travaux, ainsi que le prouvent la série de lettres s'échelonnant du 27 oct. 1900 au 27 oct. 1906, dans lesquelles L. Bianchi fait part à G. Darboux des recherches qui l'ont conduit à la solution générale du problème de la déformation des quadriques qui lui ont valu (en même temps qu'au géomètre Français C. Guichard) le grand prix des sciences mathématiques de l'Académie des sciences de Paris.

Les lettres du 23 oct. et du 3 déc. 1908 écrites par L. Bianchi à G. Darboux, traduisent les sentiments de reconnaissance et les remerciements de Bianchi pour la flatteuse récompense que constitue pour lui l'attribution de ce prix. Mais c'est dans une lettre du 9 janv. 1909 que sa reconnaissance s'exprime de la façon la plus tangible, en comblant le voeu exprimé par G. Darboux dans son rapport sur les méthodes employées par C. Guichard et L. Bianchi pour résoudre le problème de la déformation des quadriques, qu'une réponse soit donnée au problème de la réduction les unes aux autres des transformations sur l'emploi desquelles reposaient les deux méthodes: Dans la lettre indiquée L. Bianchi annonce à G. Darboux que les transformations de Guichard peuvent être réalisées en composant deux des siennes propres.

Vient ensuite une lettre du 13 déc. 1910 où L. Bianchi accuse réception à G. Darboux de l'envoi que celui-ci lui a fait de son ouvrage « Leçons sur les systèmes triples orthogonaux », dont une partie importante est précisément consacrée à la mise en lumière de l'importance des travaux de L. Bianchi sur le même sujet.

Et pour terminer, la reproduction du contenu d'une carte de visite non datée mais écrite postérieurement au mois de juin 1915, à une époque où la collaboration intellectuelle avait cédé la place à la fraternité d'armes, et où L. Bianchi exprime à G. Darboux, « l'un des plus hauts représentants de la France », les voeux qu'il forme « pour le triomphe de la cause commune ».

La lettre de F. Brioschi, écrite le 1.er sept. 1893, peu après la nomination de L. Bianchi à l'Académie des Lincei, exprime la joie que lui procure cette nomination, et l'espoir qu'il fonde sur l'appui des jeunes pour tenir haut le renom de l'Académie. On y lit ce mot un peu désabusé: la mediocrità invade, caro Bianchi, difendiamoci!

Les 5 lettres qui suivent, écrites par E. Cosserat à L. Bianchi, montrent les relations que L. Bianchi entretenait avec l'Ecole mathématique de Toulouse, dont E. Cosserat était le principal animateur. Il y est surtout question des recherches poursuivies en Italie et en France sur la théorie des systèmes triples orthogonaux, et notamment du problème connexe de l'existence de surfaces algébriques à courbure totale constante, au sujet duquel. E. Cosserat fait part à L. Bianchi de ses espoirs (1.ère lettre) puis de ses doutes ou de ses déceptions (3.ème lettre). Cest dans cette correspondance que se trouve mis, semble-t-il pour la 1.ère fois, en relief l'intérêt du probléme de la recherche des courbes algébriques à torsion constante, problème sur lequel G. Darboux devait plus tard attirer l'attention des géomètres, et dont la solution devait atteindre, dans les travaux de B. Gambier et de G. Darmois, un remarquable degré de perfection.

Viennent ensuite une lettre de L. Cremona (du 11 - 4 - 98) à qui L. Bianchi avait demandé de lui ménager une entrevue avec Sophus-Lie dont l'arrivée à Rome était attendue, quelques lettres (1881-1884) où W. Dyck entretient L. Bianchi de ses propres travaux sur la théorie des groupes, et une lettre d'Enneper (1885) relative à un point de la théorie des surfaces à courbure totale constante.

La théorie des groupes fait l'objet d'autres importants échanges de vue entre L. Bianchi, R. Fricke et F. Klein. Dans une série de 12 lettres (la 1.ère datée du 8-1-91 et la dernière du 30-1-94), R. Fricke fait part à L. Bianchi d'un certain nombre de remarques que lui ont suggérées ses travaux sur les groupes de substitutions linéaires à coefficients complexes et le tient au courant de l'essentiel de ses propres recherches sur les groupes Fuchsiens.

La correspondance avec F. Klein (14 lettres écrites de 1880 à 1899) d'ordre presque exclusivement mathématique témoigne, par son étendue dans le temps et sa grande valeur scientifique, de la solidité des liens qui s'étaient établis entre les deux grands mathématiciens, et de la haute estime qu'ils professaient l'un pour l'autre. Cette correspondance est relative en grande partie aux travaux que F. Klein et L. Bianchi ont simultanément poursuivis sur les groupes de substitutions linéaires, travaux qui s'inscrivent dans le grand mouvement d'idées provoqué par les travaux de H. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, et auquel ont participé tous les grands mathématiciens de l'époque, dont les noms reviennent souvent dans la correspondance, et que nous voyons pour ainsi dire oeuvrer au coude à coude pour l'édification commune de l'une des branches les plus importantes de la science mathématique. Nous signalerons, comme particulièrement caractéristique de l'amicale cordialité des relations entre L. Bianchi et F. Klein, la lettre du 18-6-91 dans laquelle ce dernier rassure L. Bianchi quant aux suites d'une réclamation de priorité, formulée par E. Picard au sujet d'un résultat sur la détermination du polyèdre fondamental pour le champ des nombres complexes de Gauss. Il n'est que de lire la note publiée à cet égard dans le mémoire (43) du vol. I de ses oeuvres, pour voir la spontanéité et la délicatesse de sentiments avec laquelle L. Bianchi fait droit à la réclamation du géomètre Français.

Plus spécialement consacrée à la théorie des nombres est la correspondance échangée entre L. Bianchi et A. Hurwitz, reproduite après deux courtes lettres, l'une de E. Goursat (oct. 1901) sur les transformations analytiques de Bäcklund, et l'autre de C. Guichard (mai 1898) sur les surfaces ayant même représentation sphérique que les surfaces à courbure totale constante.

Dans la série de lettres écrites du mois de sept. 1881 au mois d'oct. 1906, on assiste à la naissance et à l'épanouissement, par la puissance d'un idéal commun, de l'une des amitiés réciproques les plus fraternelles qu'il soit donné de citer en exemple entre savants de pays différents. L. Bianchi et A. Hurwitz eurent l'heureuse fortune de se rencontrer à Munich, où L. Bianchi passa deux ans (de 1879 à 1881) comme titulaire d'un bourse d'études de perfectionnement. Au cours de ces deux années de vie commune s'affirmèrent, entre les deux jeunes savants, une affinité de caractère et de sentiments, dont le reflet dans le domaine de la collaboration scientifique devait avoir les plus heureuses conséquences. Ainsi s'explique l'enthousiasme avec lequel A. Hurwitz fait part de ses résultats sur des travaux en cours, relatifs aux fonctions de Dirichlet, aux équations ou substitutions modulaires, ou à la réduction des formes quadratiques binaires. Comme aussi le ton familier et la nature confidentielle de certaines lettres, où les développements mathématiques se mêlent souvent à des considérations, empruntés de bonhomie spirituelle, sur les traitements des professeurs, sur la façon de vivre de certains d'entre-eux, ou sur certaines erreurs commises par les étudiants. Très intéressante à cet égard est la lettre du 27 mars 1885, où, à côté de propos amusants sur « ce brave Enneper », on voit le prénom « Luigi » de Bianchi jouer un rôle dans la construction d'un rectangle magique illustrant une propriété de la théorie des nombres.

La lettre du 10 oct. 1923 de L. Long montre comment L. Bianchi savait encourager et promouvoir la recherche mathématique. L'auteur de cette lettre, stimulé par les encouragements reçus de la part de L. Bianchi à l'occasion d'une communication sur les congruences normales se transformant en congruences normales dans la polarité par rapport à un complexe linéaire, y expose des résultats qu'il a obtenus sur les congruences de Ribaucour et les congruences ou les réseaux cycliques, en prolongement de certains travaux de C. Guichard.

Suivent 6 courtes lettres de E. Picard, d'un caractère plutôt académique, mais qui reflètent bien la haute estime que Picard professait pour L. Bianchi, et la grande admiration qu'il avait pour son oeuvre.

Les deux lettres suivantes de A. Ribaucour (27-4-93 et 27-5-93) qu'on ne peut lire sans une certaine émotion, mettent en pleine lumière la générosité d'âme de L. Bianchi et son sens profond de la justice et de l'honnêteté scientifique. Ces lettres laissent percer l'amertume de A. Ribaucour devant l'indifférence de ses compatriotes qui, dit-il, « emploient certains éléments géomètriques en taisant qu'ils sont miens », indifférence que relève également V. Rouquet (ami et admirateur de A. Ribaucour), dans une lettre adressée le 6 mars 1902 à L. Bianchi peu après la mort prématurée de A. Ribaucour.

L. Bianchi a rendu pleinement justice à Ribaucour, dont les travaux occupent une place d'honneur tant dans ses écrits que dans ses classiques « Lezioni di geometria differenziale », alors qu'en France, il a fallu attendre E. Cartan, pour que les mérites de ce grand géomètre Français (que E. Cartan n'hésite pas à considérer comme le père de la méthode du repère mobile) soient enfin reconnus et hautement proclamés.

Une lettre de A. Stouff (12-8-92) montre que c'est également en Italie, et par L. Bianchi, qu'a été mise en relief (particulièrement dans les « Lezioni di geometria differenziale ») l'importance de l'oeuvre géomètrique de E. Cosserat. Et c'est à ces mêmes « Lezioni » qu'il convient de se reporter, si l'on veut savoir l'intérêt que présentent, pour la géomètrie, les recherches de A. Thybaut sur le déformation du paraboloïde. Dans deux lettres (du 5 et du 25 mai 1901) A. Thybaut, ayant eu connaissance du fait que les surfaces isothermiques associées à la déformation du paraboloïde qu'il avait cru avoir découvertes avaient en réalité été antérieurement déterminées par L. Bianchi, lui fait part de ses regrets, largement compensés dit-il « par l'avantage de me permettre d'entrer en relations avec vous ».

Toutes les lettres restantes, qui occupent la moitié de l'ouvrage, émanent de J. Weingarten. Elles sont au nombre de 73 et s'échelonnent entre les années 1884 et 1908. Indépendamment de leur puissant intérêt scientifique, on y voit naître et se consolider une amitié et une affection, qui montre comment, par dessus les vaines et factices frontières de langue de race ou de pays, l'amour commun de la science peut, plus que les plus savantes combinaisons diplomatiques, contribuer au rapprochement et à l'union des peuples.

Dans sa partie spécialement mathématique, la correspondance adressée par J. Weingarten à L. Bianchi offre l'inestimabile intérêt de nous faire vivre la création d'une grande partie des chapitres les plus importants de la géomètrie diffèrentielle, en nous montrant le bénéfice que la science peut tirer de l'étroite et confiante collaboration de deux grands esprits sollicités par les mêmes problèmes. On peut la décomposer en trois groupes de lettres dont la matière gravite autour de trois sujets principaux constitués par l'étude des surfaces à courbure totale constante et des systèmes triples orthogonaux contenant une telle famille de surfaces, le problème de la déformation infinitésimale des surfaces, l'étude et la transformation du problème des surfaces applicables sur une surface donnée.

Le contenu de ces lettres est trop dense de résultats pour qu'il puisse être question d'en donner ici un résumé, qui, même succint, irait bien au delà des limites que ne doivent raisonnablement pas dépasser les analyses de ce Bulletin. Nous nous bornerons à mettre l'accent sur le fait suivant, qui prouve la confiance absolue que J. Weingarten avait dans la probité de L. Bianchi, la haute qualité de son savoir et l'exceptionnelle sûreté de son jugement. Presque toutes les questions dont J. Weingarten entretient L. Bianchi se rapportent à des projets de publications, dont J. Weingarten se fait une joie d'offrir la primeur à L. Bianchi, auquel il n'hésite pas le cas échéant à demander avis et conseils sur tel ou tel point lui paraissant relever plus spécialement de ses propres compétences. C'est en particulier L. Bianchi qui (voir les lettres du 25 et du 28 mai 1885) a mis J. Weingarten au courant des importants travaux de Bäcklund et Lie sur les transformations des surfaces à courbure totale constante, et ce n'est qu'après avoir été entièrement rassuré par L. Bianchi que Weingarten, doutant de l'exactitude de certains théorèmes d'Enneper (lettre du 11-1-86) a pu mener à terme la solution d'un important problème de déformation, dont il communique aussitôt la solution à L. Bianchi en lui disant « je n'en ai parlé à personne jusqu'à aujourd'hui ».

Parmi les lettres à caractère plus spécialement familier (il s'en trouve de nombreuses, particulièrement à la fin de la publication), nous signalerons celle du 26-10-85 où s'exprime la joie qu'a éprouvée J. Weingarten en recevant la photographie de L. Bianchi, celle du 27-12-85 où il dit à L. Bianchi combien il lui fut agréable de recevoir une lettre de lui le jour mêmê de la Noël, et de se le représenter « occupé à poursuivre ses belles recherches », tandis que lui-même jouissait des fêtes de la soirée. Comme aussi la lettre du 9-9-94 où il ne cache pas la satisfaction que lui a procurée l'attribution par l'Académie des sciences de Paris du grand prix des sciences mathématiques pour ses recherches sur la déformation des surfaces, ou celle du 13-4-95 traduisant son enthousiasme lors du retour d'un voyage en Italie.

Il est regrettable qu'à côté des lettres écrites par J. Weingarten à L. Bianchi, n'aient pu figurer celles écrites par L. Bianchi à J. Weingarten. Les lettres de J. Weingarten laissent du moins transparaitre clairement la délicatesse réciproque dont fut emprunté la correspondance échangée entre les deux savants, chacun s'efforçant de minimiser, au bénéfice de l'autre, l'importance de son apport dans l'édification des théories dont ils poursuivaient simultanément l'élaboration, et se réjouissant des succès de l'autre plus encore que des siens propres, ce qui n'est malheureusement pas toujours le cas. En fait, dans ces échanges d'idées et de résultats indispensables entre savants, L. Bianchi a toujours donné plus que il n'a reçu, comme en témoigne la lettre de J. Weingarten du 14-3-85 où celui-ci déclare « j'ai été stupéfait de votre extrême courtoisie de m'avoir attribué l'idée d'un travail qui vous appartient entièrement », et où on peut lire également la phrase suivante au sujet de la détermination par quadratures des géodèsiques des surfaces à courbure totale constante (détermination que L. Bianchi avait faite pour les surfaces d'Enneper et que J. Weingarten a étendue à toutes les surfaces à courbure totale constante): « La preuve (de la possibilité de cette détermination) je me garde bien de vous la communiquer; votre souci de la pensée des autres et votre trop grande modestie vous conduiraient encore à m'en attribuer tout le mérite ».

PAUL VINCENSINI

U. DINI, *Opere*, a cura dell' Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, vol. IV, pp. 273 e vol. V, pp. 296, Roma, 1959, Edizioni Cremonese.

Con i due volumi in esame l' U.M.I. non solo ha completato la pubblicazione delle Opere di U. DINI (1), ma ha realizzato un obiettivo più ampio della nostra aspettativa, la quale (secondo l'ordine di idee espresso da G. SANSONE nella prefazione al primo volume apparso nel 1953) attendeva la pubblicazione di un unico ulteriore tomo contenente il corso litografato: « *Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo* ». Tale corso, che costituisce l'attuale vol. V delle Opere del DINI, è preceduto da un IV volume, contenente la ristampa dell'opera: « *Possibilità delle rappresentazioni analitiche per le funzioni date arbitrariamente in un certo intervallo* », già apparsa in

(1) Per il vol. I vedi A. TERRACINI, questo Bollettino, s. III, A. IX (1954), pp. 92-95, e per i voll. II e III vedi E. MAGENES, questo Bollettino, s. III, A. XI (1956), pp. 275-279.

veste tipografica nel 1880 (2). Di tale ristampa i matematici italiani sono particolarmente grati all'U.M.I. per diverse ragioni: Da un lato il corso « Sugli sviluppi in serie ecc. » ha come fondamento il volume ristampato, il quale, secondo il piano dell'Autore, costituiva soltanto la prima parte dell'opera: « *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale* », la quale sarebbe stata completata da quegli « Sviluppi in serie ecc. », che apparvero, soltanto nel 1911, in litografia. D'altra parte le « serie di Fourier » del DINI occupano nella letteratura matematica italiana un posto di somma importanza, essendo state per circa mezzo secolo, vale a dire dal 1880 al 1928 (anno di pubblicazione delle « Lezioni » di L. TONELLI), l'unica opera italiana dedicata a tale argomento. In terzo luogo soltanto con la ristampa delle « Serie di Fourier » la pubblicazione delle Opere di DINI si può dire veramente completa, perchè nei precedenti tre volumi non figuravano due Memorie, che hanno dato luogo al volume sulle serie di FOURIER.

Passando a un rapido esame dei volumi in questione, rileviamo che il tomo IV si divide in cinque capitoli: Mentre il primo contiene considerazioni generali di carattere storico e introduttivo, il secondo è rivolto a teoremi preliminari sugli integrali $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$, ove a e b sono numeri finiti o infiniti, $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono funzioni integrabili, e $\varphi(x)$ può diventare infinita anche in infiniti punti, purchè sia integrabile il loro prodotto: queste ricerche sugli integrali di funzioni illimitate erano di somma importanza anche per altri capitoli dell'Analisi, perchè, a quella data, mancavano più di venti anni alla scoperta dell'integrale di LEBESGUE. Con il Cap. III si entra veramente in argomento, considerando gli integrali $\int_0^a f(x)\varphi(x, h)dx$, $\int_a^b f(x)\varphi(x, h)dx$, di cui sono caso particolare $\int_0^a f(x)\,\frac{\text{sen } hx}{\text{sen } x}\,dx$, $\int_a^b f(x)\,\frac{\text{sen } hx}{\text{sen } x}\,dx$, i quali, come è ben noto, si trovano alla base della teoria delle serie di FOURIER. Oggetto di tali serie è il Cap. IV, nel quale il lettore ritrova i classici teoremi di convergenza semplice, universalmente conosciuti come « criteri di DINI ».

Il volume termina con il Cap. V, che occupa circa due terzi del tomo, e nel quale vengono dati ulteriori più ampi sviluppi analitici. A tal uopo le considerazioni del Cap. III vengono estese allo studio degli integrali $\int_{a'}^{b'} \varphi(x, \alpha, h_n)dx$, ove h_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ è una successione di numeri reali positivi indefinitamente crescenti assieme a n. Particolarizzando la forma delle funzioni $\varphi(x, \alpha, h_n)$, si hanno le serie trigonometriche (utilizzate nella Fisica matematica)

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \,\text{sen}\, \lambda_n x), \tag{1}$$

ove i numeri (reali e positivi) λ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ sono i poli di primo ordine di una funzione monodroma di variabile complessa. Per assicurare la vali-

(2) Si tratta del tomo che abitualmente viene denominato « Serie di Fourier » del DINI; però secondo l'intenzione dell'Autore (vedi vol. V, Prefazione, pag. 1) tale titolo si riferiva al complesso dei due volumi in esame. Soggiungiamo che i titoli e sottotitoli, che figurano nei due tomi, sono, complessivamente, in numero di cinque.

dità degli sviluppi (1) con quel rigore e in quelle ampie condizioni, che, anteriormente al 1880, non erano stati raggiunti, l'A. premette un profondo studio delle funzioni (di variabile complessa) monodrome e meromorfe, pervenendo, anche in questo campo, a nuovi significativi risultati. D'altra parte non sembra inutile confrontare le serie (1) con quelle studiate, circa mezzo secolo più tardi, nella teoria delle funzioni quasi-periodiche.

Sono pure da citare, in modo particolare, gli sviluppi di BESSEL, alcuni dei quali conosciuti quali « Dini's expansion of an arbitrary function ». Infine, oltre ad ulteriori serie (di LEGENDRE, di JACOBI, ecc.) l'A. pone in evidenza in qual modo, cambiando la funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$, si ottengono infiniti altri sviluppi, cosicchè questo Cap. V è tuttora una ricca miniera, dalla quale il lettore metodico e tenace potrà trarre frutti preziosissimi.

Il vol. V si divide in due parti: Nella prima (che consta di cinque capitoli) vengono riprodotte, in veste tipografica, le lezioni di Analisi superiore tenute da U. DINI nell'anno accademico 1903-4 sugli « *Sviluppi per serie di funzioni H che soddisfano all'equazione del 2° ordine*

$$\frac{d\left(K\dfrac{dH}{dx}\right)}{dx} + F(x)\nu(z) + F_1(x)H = 0 \text{ »},$$

ove z è un parametro, che varia da integrale a integrale. In queste lezioni l'A. aveva esposto le proprie ricerche sulla possibilità e sulla unicità degli sviluppi di STURM LIOUVILLE; come è ben noto, i risultati conseguiti dal DINI, attenendosi al proprio metodo sviluppato nel precedente vol. IV, sono più ampi di quelli raggiunti successivamente da altri autori mediante la teoria delle equazioni integrali. A tal riguardo è da tener presente che questa prima parte del vol. V apparve in litografia soltanto nel 1911 (senza varianti o aggiunte al manoscritto preparato nella primavera del 1904), assieme alla seconda (di cui fanno parte i Capp. 5-17), che si intitola: « *Proprietà notevoli delle serie atte alla rappresentazione analitica delle funzioni di variabile reale* »: tale seconda parte, che, in prevalenza, era già pronta fino dal 1880 (tanto che alcuni fogli erano già stati stampati, ma purtroppo andarono completamente distrutti (3)), costituisce l'effettiva prosecuzione del vol. IV.

Mentre il Cap. V tratta della convergenza uniforme, nel successivo, redatto in occasione dell'edizione litografica del 1911, l'A. è ritornato sul contenuto del Cap. III del precedente volume per sviluppare alcune considerazioni complementari, che lo portano a porre in evidenza una più stretta analogia tra la validità delle serie di FOURIER e quella degli ulteriori sviluppi considerati. Il Cap. VII è dedicato all'integrazione termine a termine, alla quale il DINI ha arrecato contributi di importanza capitale. Seguono quattro capitoli, nei quali, partendo da una generalizzazione di una formula di ABEL della teoria delle equazioni integrali, l'A. perviene a ulteriori sviluppi in serie. Il Cap. XII contiene altre ricerche sull'integrazione per serie, mentre nei due successivi viene fatta una profonda ed esauriente indagine della derivazione per serie, per la quale il DINI stabilisce un complesso di risultati fondamentali, che anche oggi fanno testo. Non meno significativo è il contenuto del Cap. XVI, nel quale l'A. studia il problema del prodotto delle serie, sia con la regola di CAUCHY, sia con proprie originali vedute. L'opera termina con il Cap. XVII, dedicato all'integrale di FOURIER, per il quale viene stabilita, in modc del tutto rigoroso e sotto condizioni particolarmente espressive, la validità della seconda formula dell'integrale di FOURIER: anche per questo contributo il merito del DINI è universalmente riconosciuto.

In analogia ai primi tre tomi, a ciascuno dei quali è premessa una Prefazione di G. SANSONE, all'inizio del quarto figurano alcune limpide pagine dello stesso Autore, le quali introducono efficacemente il lettore ai due

(3) Vedi vol. V, Prefazione, pag. 2.

volumi in esame (4); e se già la pubblicazione (realizzata con la collaborazione di parecchi Cattedratici) dei precedenti tomi aveva vivamente risentito dell'opera di SANSONE « instancabile propulsore e animatore » (5), la stampa di questi due ultimi è stata curata interamente da Lui, con fervore di devoto, affezionato allievo di U. DINI. Pertanto sia consentito a chi scrive queste righe di esprimere (oggi che la pubblicazione delle Opere del DINI è completamente realizzata) a GIOVANNI SANSONE tutta la gratitudine della Matematica italiana per le energie, che Egli, con giovanile entusiasmo, ha dedicato alla pubblicazione di queste Opere: i cinque volumi di ULISSE DINI testimonieranno alle future generazioni la forza dell'ingegno e la perfezione della mente di uno degli Scienziati, che maggiormente contribuirono alla formazione della Scuola matematica della nazione italiana sorta da pochi anni.

SILVIO CINQUINI

Convegno Internazionale Reticoli e geometrie proiettive, edito a cura dell' Unione Matematica Italiana; Edizioni Cremonese, Roma (1958).

Si tratta degli Atti di un riuscito Convegno Internazionale svoltosi a Palermo ed a Messina dal 25 al 30 ottobre 1957.

Gli argomenti del Convegno (teoria dei reticoli e Geometrie negli spazi finiti) erano nettamente delimitati ma connessi tra loro; ed è appunto la loro omogeneità che — unita alla chiarezza esemplare di gran parte delle esposizioni — rende la lettura del volume in esame particolarmente proficua e piacevole.

Qui cercheremo di dare in breve un'idea non solo delle pregevoli relazioni tenute da ANDRÉ, CROISOT, LESIEUR, LOMBARDO-RADICE, PICKERT, SEGRE e ZAPPA, ma anche delle altre dodici comunicazioni presentate da giovani ricercatori italiani.

Esamineremo dapprima gli studi — in verità non molto numerosi — su problemi concernenti i reticoli od altri temi di carattere strettamente algebrico.

CROISOT, usando la nozione di prospettività in un reticolo geometrico qualunque, mostra che questo è decomponibile in un prodotto di reticoli geometrici irriducibili. Assegna inoltre una condizione di irriducibilità necessaria e sufficiente, che permette di ritrovare due classiche condizioni analoghe (in generale soltanto sufficienti), una delle quali risulta ora conseguenza dell'altra.

LESIEUR mette in luce che in un reticolo geometrico la nozione di $\cap$-continuità, in cui interviene un insieme filtrante superiormente, può essere sostituita da quella apparentemente più generale di $\cap$-continuità debole, nella quale interviene un insieme totalmente ordinato.

CURZIO introduce il concetto di reticolo quasi distributivo superiormente ed inferiormente, e prova tra l'altro che un gruppo finito ciclico è caratterizzato dalla quasi-distributività del reticolo dei suoi sottogruppi.

(4) La veste tipografica appare soddisfacente. Però dobbiamo fare qualche riserva circa l'uso inadeguato, che viene fatto, in questi due volumi in esame, della riga di frazione inclinata, anche quando la minore perspicuità, che ne deriva, non viene giustificata nemmeno da un risparmio nell'altezza della formula, a causa della presenza di altri segni che occupano un'altezza maggiore (vedi, per esempio, i tre primi integrali che si trovano a pag. 107 del vol. IV, e anche, nella seconda metà di pag. 29 dello stesso vol. IV, una formula, nella quale il quarto, il terzo e il secondo membro sono composti con tre diversi criteri).

(5) Vedi A. TERRACINI, luogo cit. in (1), pag. 95.

PERMUTTI mostra che il reticolo dei sottospazi di uno spazio affine generalizzato (da lui introdotto a partire da un S_n grafico qualsiasi) risulta sopramodulare, relativamente complementato, e di lunghezza $n+1$.

MIGNOSI indica un procedimento che consente di trovare con sole operazioni razionali il numero delle radici di un'equazione algebrica in un corpo finito.

Passiamo ora alle relazioni e comunicazioni riguardanti le Geometrie finite.

SEGRE osserva che i sottoinsiemi di un piano lineare finito (necessariamente desarguesiano) risultano tutti algebrici; appare pertanto naturale, sebbene non facile, cercare una loro caratterizzazione con proprietà grafiche e numerative.

Un suggestivo esempio in proposito è costituito dall'ormai classico risultato relativo alle ovali stabilito dallo stesso SEGRE, ma qui egli aggiunge altre numerose ed interessanti proprietà riguardanti per lo più i cosiddetti k-archi (sottoinsiemi non contenenti terne di punti allineati), con particolare riferimento ai piani sopra un campo di caratteristica 2, caso questo alquanto delicato e non ancora trattato in precedenza.

All'ampia relazione di SEGRE si collegano le comunicazioni di SCAFATI, SCE, LUNELLI, TALLINI, ROSATI.

La signorina SCAFATI si occupa della caratterizzazione dei 6-archi in un piano di caratteristica 2 e di ordine 8; lo SCE stabilisce due teoremi di « non esistenza » relativi a $(q\text{-}l)$-archi di un piano lineare di ordine q. Una seconda comunicazione dello SCE, in collaborazione con LUNELLI, è dedicata alla descrizione del procedimento seguito per ricercare mediante una calcolatrice elettronica certi k-archi appartenenti a piani lineari degli ordini 7, 11, 13.

TALLINI presenta una caratterizzazione grafica della superficie di Veronese di un S_5 *finito*, e ROSATI le sue ricerche sulla riducibilità delle equazioni che danno le 27 rette ed i 45 piani tritangenti di una superficie cubica di un S_3 (pure finito).

Un terzo gruppo di studi riguarda le Geometrie relative a piani grafici generalmente non desarguesiani.

ANDRÈ esamina una struttura parallela centrale qualunque P_0 e mostra che esiste un piano euclideo P, generato da P_0, caratterizzato dalla proprietà che ogni traslazione di P_0 è una restrizione univocamente determinata di una traslazione di P.

PICKERT riprende la sistemazione assiomatica data alle relazioni di ordinamento e separabilità nel suo trattato sui piani proiettivi e comunica al riguardo alcuni risultati (della sua allieva CRAMPE) relativi a certi piani non desarguesiani; in una seconda conferenza, appoggiandosi alla teoria dei corpi ternari di M. HALL, lo stesso PICKERT esamina i piani grafici in cui le addizioni oppure le moltiplicazioni sono associative.

LOMBARDO-RADICE mette in luce i vari aspetti del noto teorema di Zorn-Levi affermante che un piano grafico microdesarguesiano finito è addirittura desarguesiano, ed indica quelle che a parer suo sembrano le possibili vie di attacco per una dimostrazione geometrico-gruppale della proprietà in questione. Riassume inoltre i risultati più recenti della teoria delle ovali in un piano finito non desarguesiano ed espone una lucida disamina di alcuni problemi aperti, in relazione all'eventuale esistenza di piani non desarguesiani aventi un ordine diverso da una potenza di un numero primo.

Alle ricerche di LOMBARDO-RADICE è collegata una comunicazione di MAISANO, che assegna con formule ricorrenti il numero dei punti e delle rette che compaiono in certi stadi liberi della costruzione dei piani liberi indicata da M. HALL.

La chiara ed esauriente relazione di ZAPPA illustra invece il punto di vista gruppale nello studio dei piani grafici finiti. Un piano grafico si dice ciclico se possiede un gruppo ciclico di collineazioni transitivo e regolare sui punti e sulle rette; sono certamente ciclici i piani desarguesiani finiti, ma non si sa ancora se esistono piani ciclici non desarguesiani. ZAPPA si occupa anche dei piani proiettivi ed affini che possiedono un gruppo di collineazioni - eventualmente non ciclico — il quale sia parzialmente o totalmente transitivo sui punti e sulle rette. Rientrano in quest'ultima categoria i cosiddetti piani di HUGHES i quali generalizzano uno dei tipi di piani non desarguesiani di ordine 9 indicati da VEBLEN e WEDDERBURN; essi hanno ordine uguale ad una potenza p^{2n} di un numero primo p e contengono un sottopiano desarguesiano di ordine p.

ZAPPA esamina infine alcune questioni riguardanti i piani di traslazione (questi ammettono tutte le omologie speciali aventi per asse una retta fissa) ed i piani dotati di un gruppo di collineazioni generato da omologie.

Negli argomenti trattati da ZAPPA s'inquadrano le comunicazioni di BARLOTTI, PANELLA ed un secondo studio di ROSATI.

BARLOTTI raffina una classificazione dei piani grafici, fatta in precedenza da LENZ, in rapporto alle omologie da essi possedute; PANELLA assegna un elegante modello geometrico di un quasicorpo J (costruito a partire da un campo F) dal quale deduce una caratterizzazione dei quasicorpi J geometricamente isomorfi; ROSATI determina i piani desarguesiani finiti dotati di un gruppo non ciclico di collineazioni transitivo su tutti i suoi punti.

ERMANNO MARCHIONNA

F. G. TRICOMI, *Esercizi e complementi di Analisi matematica*, CEDAM, Padova 1960.

Questo volume comprende una ricca raccolta di esercizi sugli argomenti che formano ordinariamente oggetto dei corsi di Analisi metematica nei nostri bienni propedeutici, frammisti a numerosi complementi, che appaiono indirizzati a molteplici fini. Indubbiamente nei due corsi di Analisi del primo biennio universitario non vi è tempo sufficiente per toccare neppure di sfuggita molti argomenti, che sarebbe opportuno svolgere; ne segue che la preparazione matematica teorica degli allievi ingegneri, terminando al secondo anno, rimane spesso al di sotto di quella che si potrebbe desiderare, e la cultura propedeutica degli studenti di matematica e fisica richiede alcune notevoli integrazioni, prima che possano essere utilmente affrontati i corsi di Analisi superiore. Anzitutto, dunque, il presente libro di Tricomi si propone lo scopo di completare sotto diversi aspetti i corsi di Analisi del primo biennio, e poi di servire da introduzione a quelli del secondo biennio per i matematici e fisici. Ma sono tenute anche nel dovuto conto le esigenze di coloro, che dovranno diventare calcolatori e programmatori, ciò che, con l'attuale sviluppo delle macchine calcolatrici e con la crescente diffusione del loro impiego, ha oggi una notevole importanza. Oltre a una abbondante e utilissima materia di esercizio, i nostri studenti potranno dunque trovare in questo volume, esposte nello stile colorito e piacevole dell'illustre Autore, moltissime nozioni corrispondenti ai vari interessi di ciascuno. L'Autore « ha cercato di condurli fino alla soglia », com' Egli stesso dice, di alcune fra le più importanti teorie che di solito vengono svolte nei corsi di Analisi superiore, « senza però varcare tale soglia », e tuttavia, si può aggiungere, in modo tale da far nascere il desiderio di varcarla nei più animosi e volenterosi.

G. CIMMINO

D. E. RUTHERFORD, *Fluid Dynamics*, Oliver and Boyd Edinburgh, 1959.

È un volumetto di 224 pagine in cui sono esposti i principi fondamentali della Meccanica dei fluidi, secondo un corso di lezioni tenute dall'Autore a studenti dell'Università di St. Andrews. Inizialmente si intrattiene in una discussione onde mettere in rilievo le differenze che si hanno fra un fluido reale e i modelli matematici sui quali si basano le ordinarie trattazioni. Passa quindi all'esposizione sistematica dei concetti basilari e allo sviluppo delle teorie che riguardano il movimento dei fluidi perfetti. È da rilevare però come l'Autore non faccia alcun cenno delle due vedute, lagrangiana ed euleriana, secondo cui si può considerare il movimento di un fluido. Così pure nessuna traccia vi è delle celebri equazioni di Cauchy, del teorema di Lagrange relativo ai moti irrotazionali, delle equazioni di Helmholtz sulle quali sono fondati tutti i teoremi relativi ai moti vorticosi. Comunque l'Autore dà un adeguato sviluppo allo studio del moto dei fluidi incompressibili in due dimensioni col metodo delle varianti complesse, mettendo particolarmente in rilievo la trasformazione di Joukowski. Sono sviluppate anche alcune questioni relative ai moti in tre dimensioni.

Considera inoltre i diversi aspetti del movimento dei fluidi compressibili, come la teoria linearizzata, i moti subsonici e supersonici, le onde d'urto, le espansioni di Prandtl-Meyer, ecc., includendo ancora quei problemi che involgono i metodi odografici, sia per i fluidi incompressibili che per i compressibili.

Stabilisce poi le equazioni di Navier-Stokes per i fluidi viscosi, considerando alcune soluzioni esatte e infine introduce, con una discussione puramente qualitativa, il concetto di strato limite di Prandtl.

Il volume, che ha qualche originalità di esposizione può essere utilmente letto da chi si inizia allo studio della Meccanica dei fluidi, per quanto le notazioni, non sempre corrispondenti a quelle classiche, rendono un po' penosa la lettura.

C. AGOSTINELLI

B. A. TRACHTENBROT, *Wieso können Automaten rechnen?* VEB, Deutscher Verlag der Wissensch., Berlin, 1959. Trad. dall'orig. russo (Mosca, 1957) di K. H. RUPP; 101 pp., DM 3,60.

In questo volumetto viene impostato e discusso in modo chiaro il problema di caratterizzare quali generi di *lavori intellettuali* (non necessariamente dei calcoli, in senso stretto) possono venire eseguiti da « *robot* » del genere delle moderne calcolatrici elettroniche. Tuttavia — benchè l'accento sia posto su di ciò anzichè sullo studio degli accennati meccanismi — il volumetto può anche costituire (vedasi specialmente i §§ 4 e 5) un'utile introduzione al lavoro con le moderne calcolatrici *a programma* e all'arte della programmazione.

Tutta la trattazione è dominata dal concetto di *algoritmo*, a cui si cerca di togliere il carattere nebuloso che lo affetta, identificandolo sostanzialmente con le successioni di operazioni (aritmetiche e logiche) effettuabili con una « *macchina di* TURING », cioè con una specie di macchina calcolatrice idealizzata (concepita fin dal 1936 dal matematico britannico A. M. TURING) differente dalle macchine effettive sopratutto per avere una *memoria* di capacità illimitata.

Precisato così il senso di *algoritmo*, acquista preciso significato il quesito, se un certo problema sia o no risolubile per mezzo di un acconcio algoritmo. Non è sempre così, e il volumetto termina giusto con la dimostrazione che esistono problemi non risolubili algoritmicamente: per esempio, il cosiddetto *Entscheidungsproblem* della logica matematica, cioè il problema di decidere se — nell'ambito di un certo sistema ipotetico-deduttivo — due certe proposizioni sono o non sono, una conseguenza dell'altra.

F. G. TRICOMI

M. MILLER, *Variationsrechnung*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959.

Una semplice e stringata esposizione delle classiche nozioni fondamentali di calcolo delle variazioni, particolarmente dedicata a chi deve occuparsi di applicazioni della matematica. Caratteristica della trattazione è che in essa sono contenuti forse più esempi che dimostrazioni generali. Dopo un capitolo di carattere introduttivo, sono brevemente dimostrate in generale, nel secondo capitolo, condizioni necessarie e condizioni sufficienti per un estremo, nel caso dei funzionali classici sia in forma ordinaria che in forma parametrica, con numerosi esempi tratti dal principio di Hamilton. Il terzo capitolo è dedicato ai problemi isoperimetrici. Nel quarto capitolo sono esposti alcuni metodi per il calcolo numerico delle estremanti, come quello della approssimazione mediante poligonali e quello di Ritz. In fine del volumetto si trova un rapidissimo cenno sulle proprietà estremali degli autovalori nei problemi ai limiti per un'equazione differenziale ordinaria dipendente da un parametro.

G. CIMMINO

P. A. P. MORAN, *The theory of Storage*. Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics). London, Methuen & Co - New York, Wiley & Sons, 1959; 111 pp., $13^s/6^d$.

In questi ultimi anni si sono moltiplicate le pubblicazioni sulle applicazioni del Calcolo delle Probabilità e della Statistica, a cui è dedicata la nuova collana di monografie a cui appartiene questo volumetto; e ciò non deve sorprendere perchè è giusto per questa via che la Matematica stà espandendosi anche fuori del suo campo tradizionale d'applicazione: le scienze esatte.

Fra questi nuovi rami applicativi, uno di quelli in più rapida espansione è la cosiddetta *ricerca operativa* che, fra l'altro, comprende i problemi *d'immagazzinamento* (« *storage* »), che sono principalmente di due tipi: problemi « *d'inventario* », in cui l'entrata in magazzino avviene con delle regole fisse (eventualmente da determinarsi) mentre l'uscita è una variabile casuale di cui si conosce solo la distribuzione *stocastica*, e i problemi « *delle code* », in cui avviene tutto il contrario.

Il presente volumetto è dedicato ai problemi del secondo tipo, con speciale riguardo al *problema delle dighe*, il cui bacino di raccolta viene appunto alimentato da acque piovane, ecc. di cui si conosce (se si conosce!) solo la legge di distribuzione statistica nelle varie stagioni, mentre il deflusso è invece regolato da una prestabilita *politica*, dipendente dagli scopi a cui deve servire la diga (irrigazione, produzione di energia elettrica, ecc.). Sorgono così dei problemi probabilistici di ovvio interesse pratico quali, ad esempio, i seguenti: Dopo ultimata la diga, quanto tempo ci vorrà acciocchè il bacino di raccolta si riempia completamente per la prima volta? Come si devono dimensionare le opere di scarico da una diga in terra onde scongiurare il pericolo che essa possa venir danneggiata da acque tracimanti? Ecc.

L'A. fa un tentativo (« *an attempt* ») di risoluzione matematica di tali difficili problemi — principalmente col cosiddetto *metodo di Monte Carlo* — ma la stessa critica da lui esercitata (alle pp. 93-96) su analoghe ricerche di altri autori, suggerisce di accogliere con una certa prudenza anche i risultati da lui stesso raggiunti.

F. G. TRICOMI

F. e R. NEVANLINNA, *Absolute Analysis*, Grundlehren der Mahematischen Wissenschaften, Springer Verlag, 1959.

Gli argomenti trattati in questo volume sono divisi in cinque capitoli intitolati: Algebra lineare, Calcolo differenziale, Calcolo integrale, Equazioni differenziali, Geometria differenziale. L'esposizione si discosta tuttavia notevolmente da quelle abituali e riceve la sua impronta di originalità dall'idea di non servirsi delle coordinate, prendendo come punto di partenza enti introdotti mediante definizioni assiomatiche. Mentre la trattazione si muove generalmente entro il quadro elementare degli ordinari spazi euclidei, ne risulta che essa è svolta in modo tale da non richiedere, molte volte, nessun mutamento. altro che un diverso significato da dare ai simboli, per sussistere in spazi metrici a infinite dimensioni. Si ha così non solo una sistemazione estremamente semplice e generale di classiche dimostrazioni dell'Analisi matematica, quale viene insegnata nei nostri bienni propedeutici, ma anche una utilissima introduzione allo studio dell'Analisi funzionale, la cui conoscenza appare oggi indispensabile a chiunque voglia dedicarsi alla moderna ricerca matematica. Fra gli altri ci limiteremo a segnalare come particolarmente interessanti, anche per gli apporti originali degli Autori, i paragrafi sulle funzioni implicite, sul teorema di Stokes, sulle equazioni differenziali, sul calcolo tensoriale. In tutte queste teorie, gli Autori riescono a dimostrare brillantemente che la maggiore generalità può anche non essere fonte di maggiore complicazione, come qualcuno potrebbe esser tentato di credere, ma al contrario conduce talvolta a utilissime semplificazioni concettuali.

In conclusione, si deve considerare il presente volume come un coraggioso tentativo eccellentemente riuscito di riformare in senso moderno e adeguato ai più recenti progressi della ricerca nel campo dell'Analisi, il modo di insegnare le parti fondamentali di questa; esso va quindi in particolare caldamente raccomandato alla meditazione di tutti quelli che a tale insegnamento dedicano le loro energie.

G. CIMMINO

R. ATKIN, *Classical Dynamics*, Heinemann, London 1959.

È un volumetto elementare di Meccanica di 273 pagine, costituito quasi completamente di esercizi tolti in gran parte da trattati classici, mentre gli sviluppi teorici premessi in ogni capitolo sono schematici. Esso, come afferma lo stesso autore, è utile per gli studenti di Fisica delle Università, sebbene non vi sia alcun cenno degli elementi della Meccanica analitica, come le equazioni canoniche di Hamilton e il metodo di Jacobi per l'integrazione delle equazioni del moto, la cui conoscenza è pure necessaria per quegli allievi.

C. AGOSTINELLI

EDMUND LANDAU, *Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen*, nuova edizione a cura di ARNOLD WALFISZ, N° 44 della Collezione «Hochschulbücher für Mathematik», Deut. Ver. d. Wiss., Berlin (1959), pagg. 87.

In questo opuscolo è riesposto in forma aggiornata, ad opera di A. WALFISZ, l'argomento del § 4, parte IX, cap. II delle « Vorlesungen über Zahlentheorie » di E. Landau. Si tratta del gruppo di questioni che si ricollegano al ben noto teorema che portava allora il nome di Thue-Siegel, a cui andrebbe oggi necessariamente associato il nome di Roth.

La nuova esposizione contiene rispetto a quella originale, un insieme ragguardevole di novità sostanziali, rappresentate appunto essenzialmente dal risultato di K. F. Roth, ormai celebre, e dalle sue dirette conseguenze; l'estensore del presente libretto ha avuto cura tuttavia di conservare lo spirito della esposizione del Landau.

Com'è noto A. Thue aveva dimostrato (1909) che:

a) *se* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ *è un polinomio a coefficienti interi, irriducibile, con* $a_0 \neq 0$ *ed* $n \geq 3$, *e se* a *è un qualunque numero intero allora l'equazione*:

$$g(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_ny^n = a$$

ha al più un numero finito di soluzioni in interi x, y.

La dimostrazione di questo teorema era fondata essenzialmente sulla seguente proposizione:

b) *se* α *è algebrico di grado* $n \geq 3$, *allora la disequazione*:

$$|\alpha - p/q| < A/q^n$$

ha un numero finito di soluzioni in interi p, q *qualunque sia la costante positiva* A.

Questo è un importante miglioramento del classico teorema di Liouville in cui analoga affermazione era fatta, ma riferita a una costante A opportuna, dipendente in generale da α.

Successivi miglioramenti apportati alla proposizione b) dallo stesso Thue e poi da C. L. Siegel (1921) e da F. J. Dyson (1947) avevano condotto a conseguenti generalizzazioni della proposizione a), finchè il brillante risultato del Roth (1955):

b') *se* α *è algebrico di grado* $n \geq 2$, *allora la disequazione*

$$|\alpha - p/q| < q^{-k}$$

ha un numero finito di soluzioni in interi p, q *se* $k > 2$;
ha condotto ad un'ultima estensione del teorema a) nella forma:

a') *valgano per* $f(x)$ *le solite ipotesi e sia* $g(x, y)$ *definito al solito modo, sia poi* $G(x, y)$ *un polinomio in* x, y *a coefficienti interi, e del resto qualunque, di grado non superiore ad* $n-3$, *allora l'equazione*

$$g(x, y) = G(x, y)$$

ha al più un numero finito di soluzioni in interi x, y.

Tutte queste considerazioni sono svolte ampiamente dal Walfisz, il quale non manca di inquadrare i vari risultati in un chiaro prospetto storico.

L'opera si chiude con un gruppetto di proposizioni che si ricollegano in vario modo alla questione; alcune sono intese ad alleggerire le condizioni sul polinomio $f(x)$ nei teoremi precedenti, altre sono in qualche modo affini ai teoremi stessi come il classico teorema di Landau-Ostrowski-Thue:

c) *per* n *intero* ≥ 3; a, b, c, d, *interi*, $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$, $d \neq 0$, *l'equazione*

$$ax^2 + bx + c = dy^n$$

ha un numero finito di soluzioni in interi x, y,

e il teorema di Pólya riguardante il comportamento del massimo fattore primo di $ax^2 + bx + c$ al variare di x, intero.

Complessivamente si tratta di un'accurata rassegna su un classico argomento di teoria dei numeri, redatta in forma esauriente e chiara, la cui lettura richiede solo le nozioni fornite ordinariamente al primo biennio, e risulta nel complesso piuttosto agevole, anche se un po' laboriosa, per necessità di cose, riesce l'esposizione del teorema di Roth.

MARCO CUGIANI

R. DESCARTES, *Il Mondo ovvero Trattato della Luce*, traduzione di G. CANTELLI, editore P. Boringhieri, Torino 1959.

Nella collezione « Enciclopedia di autori classici » diretta da G. Colli, è stata pubblicata la traduzione italiana dell'opera di Cartesio (il piano della quale risale al 1629) edita postuma per la prima volta a Parigi nel 1664 con il titolo: *Le monde de Monsieur Descartes ou Traitté de la Lumière et des autres principaux objets des sens*. La successiva edizione del 1677 è stata riprodotta nel vol. XI delle *Oeuvres complètes de Descartes* a cura di Ch. Adam e P. Tannery (Parigi 1897-1910). Su quest'ultimo testo è stata condotta la traduzione in esame, nell'intento di fornire al lettore, attraverso la visione della fisica e della cosmologia cartesiane, una più profonda comprensione del pensiero filosofico dell'Autore del *Discours de la methode*.

Descartes infatti in quest'opera tenta di applicare il suo metodo al fine di ricostruire razionalmente nel suo pensiero il mondo fisico.

Tale applicazione non ci si presenta così cristallina e ricca di risultati esatti come quella del metodo cartesiano alla geometria analitica: accanto ad un enunciato chiaro e preciso del principio d'inerzia (il tentativo di dimostrazione cartesiana del quale su basi teologiche, lascia però molto perplessi) ed al principio della conservazione della quantità di moto, troviamo un abbozzo di teoria dell'urto, che verrà poi completata e precisata nei *Principia Philosophiae* del 1644, con regole non tutte esatte; mentre la teoria dei vortici, ideata da Descartes per spiegare la formazione ed i moti degli astri ed esposta nell'opera in esame e sui *Principia Philosophiae* non era destinata ad occupare un posto duraturo nella storia delle scienze.

Tuttavia il titanico tentativo cartesiano di spiegare meccanicamente tutti i fenomeni dell'universo ricavando « a priori » dalla pura ragione i principi fondamentali della scienza, tentativo delineato nell'opera che ci viene presentata in una lucida ed accurata traduzione commentata, presenta aspetti suggestivi anche di fronte al pensiero contemporaneo.

ETTORE CARRUCCIO