
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FULVIA SKOF

Sull'opera scientifica di Mario Pieri.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
15 (1960), n.1, p. 63–68.*

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_63_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sull'opera scientifica di Mario Pieri.

Nota di FULVIA SKOF (a Milano)

Sunto. - *Nel centenario della nascita di MARIO PIERI, se ne ricorda l'opera scientifica, e, particolarmente, i notevoli risultati conseguiti nel campo della critica dei fondamenti della geometria e dell'aritmetica.*

Il contributo della scuola italiana agli studi di logica matematica è legato indissolubilmente al nome di GIUSEPPE PEANO; tuttavia non va dimenticata l'orma profonda che lasciò in questo ordine di ricerche un altro studioso, di cui ricorre fra qualche mese il centenario della nascita: MARIO PIERI.

Appunto in occasione di tale ricorrenza, mi propongo qui di ricordarne per grandi linee l'opera scientifica, prendendo in particolare considerazione gli studi dedicati alla critica dei fondamenti, che di tutta la sua produzione rappresentano la parte più originale ⁽¹⁾.

(¹) Si possono trovare notizie sulla vita e sull'opera del PIERI nei necrologi pubblicati da G. PEANO in « *Academia pro Interlingua* », *Discussiones*, 4 (1913), 31-35 (senza firma), da G. CASTELNUOVO in « *Bollettino della Mathesis* », 5 (1913), 40-41, e soprattutto in quello di BEPPO LEVI (*Bollett. di Bibliogr. e Storia delle Sc. Matem.*, 15 (1913), 65-74), il quale contiene un elenco delle pubblicazioni.

Il pensiero matematico del PIERI fu essenzialmente geometrico. Più precisamente, se si prescinde da due lavori riguardanti la geometria differenziale e da alcuni studi minori, nel primo decennio di attività scientifica il suo interesse fu rivolto esclusivamente alla geometria algebrica.

Iniziò a Pisa nel 1884 con la tesi di laurea (che pare non sia stata pubblicata) «Sulle singolarità della jacobiana di quattro, di tre, di due superficie», e nello stesso anno pubblicò il suo primo lavoro «Sopra alcuni problemi riguardanti i fasci di curve e superficie algebriche».

In una parte dei lavori di questo primo periodo egli fece uso del principio di corrispondenza, e fu quindi condotto a studiarne l'estensione a casi mai esaminati. Citeremo, fra gli altri, «Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni», «Su un teorema di geometria ad n dimensioni», «Sulla corrispondenza algebrica fra due spazi rigati», «Formule di coincidenza per le serie algebriche ∞^n di coppie di punti dello spazio a n dimensioni». Pubblicò ancora tre note di geometria enumerativa «Sul problema degli spazi secanti», seguendo però un indirizzo diverso, e nel frattempo altri lavori, sempre di geometria algebrico-proiettiva, riguardanti le trasformazioni razionali dello spazio: «Sulle trasformazioni involutorie dello spazio determinate da un complesso Hirstiano di rette», «Sulle trasformazioni birazionali dello spazio inerenti a un complesso lineare speciale», «Sui sistemi lineari di coni», «Sui sistemi lineari di monoidi», ecc.

Ma le ricerche che principalmente occuparono la vita scientifica del PIERI dal 1895 in poi, e che rappresentano, per usare le parole di BEPPO LEVI, «la più sicura estrinsecazione del suo spirito», sono quelle relative alla critica dei fondamenti.

Due fatti possono in certo modo rendere ragione del mutato indirizzo di ricerche, dopo la fase dedicata agli studi di geometria pura: già nel 1889 egli aveva pubblicato una traduzione della «Geometrie der Lage» dello STAUDT; in secondo luogo, le sistemazioni dell'aritmetica e della geometria elementare quali scienze puramente deduttive e astratte, ottenute dal PASCH e dal PEANO, con il quale a Torino aveva contratto amicizia, dovevano servire da modello e da incentivo a ricercare una analoga sistemazione per la geometria proiettiva, da intendersi come scienza a sè, e non come un «prolungamento» della geometria elementare.

I primi lavori in questo indirizzo sono appunto tre note «Sui principii che reggono la geometria di posizione», nelle quali l'ordinaria geometria proiettiva viene costruita sopra tre concetti da

assumersi come primitivi: il *punto*, la *retta* e il *segmento* proiettivi. I postulati che li caratterizzano vengono introdotti — qui, come pure nei lavori successivi — nel corso della trattazione, quando se ne presenti la necessità, di modo che risulta facile al lettore stabilire da quali postulati dipenda una qualunque proposizione della teoria in questione.

Sulla base di questi stessi enti primitivi, il PIERI fornisce in un lavoro del 1896 un sistema di postulati per la geometria proiettiva astratta degli iperspazi.

Ma ben presto, con una nota « Sugli enti primitivi della geometria proiettiva astratta » (1897), egli mostra la possibilità di fondare tutta la geometria di posizione, e quindi anche le geometrie metriche astratte che ne derivano, sopra due soli enti primitivi: il *punto* proiettivo e la *congiungente due punti* proiettivi. Egli infatti riesce a definire formalmente, con sola imposizione di nomi, la nozione di segmento proiettivo (e di conseguenza le nozioni di ordine naturale, di verso, ecc., che si esprimono mediante quella), conseguendo nello stesso tempo anche il vantaggio di ridurre il numero dei postulati.

La cura di ridurre il numero dei concetti non definiti, di evitare postulati composti, che già si rileva da questi primi lavori sulla critica dei fondamenti, si ritroverà anche in seguito come atteggiamento caratteristico del PIERI, sempre teso alla ricerca della chiarezza e del rigore ⁽²⁾.

Il materiale elaborato nei lavori ora ricordati, ricompare ordinato in un tutto più coerente e organico, in alcuni punti arricchito e in altri mutato, in una importante memoria d'insieme « I principii della geometria di posizione composti in un sistema logico-deduttivo », a proposito della quale credo opportuno ricordare il giudizio che ne diede il RUSSELL, scegliendolo come base per la trattazione del capitolo riguardante la geometria proiettiva nel suo volume « *The principles of Mathematics* » (1903): « This is, in my opinion, the best work on the present subject ». E il PEANO, nel riportare il giudizio del RUSSELL, afferma più in generale ⁽³⁾: « I risultati cui pervenne il PIERI costituiscono un'epoca nello studio dei principii della geometria »; e più avanti: « e tutti coloro

⁽²⁾ Si veda, a questo proposito: U. CASSINA. *Sul teorema fondamentale della geometria proiettiva ed i principii della geometria*, Period. Matem., (4), 20 (1940), 65 - 83.

⁽³⁾ G. PEANO, *Importanza dei simboli in matematica*, « Scientia », 18, A. IX (1915), 165 - 173, e « Opere scelte », vol. III, 389 - 396, in particolare p. 394.

che in seguito trattarono dei principii della geometria si servirono ampiamente del lavoro del PIERI e diedero dei giudizi equivalenti a quello riportato del RUSSELL. Citerò BÔCHER, nel Bull. of the Amer. Math. Soc., 1904, p. 105; WILSON, nello stesso periodico, 1904, p. 74; HUNTINGTON, nelle Transactions della stessa società, in una serie di Memorie dal 1902 in poi; VEBLEN nello stesso periodico, 1904. Ecc. ».

Ai lavori già ricordati si ricollegano una nota « Circa il teorema fondamentale di STAUDT e i principii della geometria proiettiva » (1904), e la memoria « Nuovi principii di geometria proiettiva complessa » (1905) (con una « Breve aggiunta alla memoria: Nuovi principii... ») nella quale, per la prima volta, si istituisce una geometria proiettiva complessa, non solo esente da qualsiasi considerazione algebrica, ma anche [sciolta da ogni vincolo deduttivo con l'ordinaria geometria proiettiva reale. I concetti scelti come primitivi sono tre: *punto* proiettivo complesso, *retta* complessa e *catena* (o concatenamento fra tre punti), che vengono caratterizzati mediante una serie di trenta postulati.

Dallo studio dei fondamenti della geometria proiettiva il PIERI passava nel 1898 a quello della geometria elementare con la memoria « Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo. Monografia del punto e del moto », memoria che il RUSSELL giudicò « mirabile », ed il PEANO « della massima importanza ». Mentre nella trattazione del PASCH i concetti primitivi erano quattro (punto, segmento, piano e congruenza) e in quella del PEANO si erano ridotti a tre (punto, segmento, moto), qui essi si riducono ulteriormente a due soli: *punto* e *moto*, inteso questo come rappresentazione di punti in punti.

Già nell'introduzione a questo lavoro e nella conferenza « Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique » il PIERI intravedeva però la possibilità di restringere ulteriormente la parte non definita del moto, riducendola nei limiti di una relazione fra tre punti soltanto, che si può esprimere con le frasi: « c dista da a quanto b », « c appartiene alla sfera descritta da b , centro a », o « la coppia (a, c) è congruente alla coppia (a, b) ». Solo nel 1908 egli pubblicò tale studio, con il titolo « La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera », quando ebbe raggiunto quella semplicità che desiderava, anche in vista di una eventuale applicazione all'insegnamento secondario.

Ma l'interesse del PIERI continuò ad essere attratto dalla geometria proiettiva, che egli volle ricostruire in vari modi, sfruttando l'arbitrarietà esistente nella scelta delle nozioni primitive.

Così, per analogia con la geometria elementare, costruita sulle nozioni primitive di punto e di moto (come trasformazione di punti in punti), pubblicò nello stesso anno (1898) la nota «Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva», nella quale vengono assunte come primitive le nozioni di *punto* e di *omografia*.

Ed ancora, nel 1901, ricostruì deduttivamente l'ordinaria geometria proiettiva (dei punti e dei piani sul fondamento di due sole nozioni elementari, tratte dalla geometria della retta: le nozioni di *raggio* e di *incidenza fra raggi* («Sui principii che reggono la geometria delle rette»). In uno degli ultimi lavori, «Nuovi principii di geometria delle inversioni» (1911-'12), studiò i fondamenti della geometria delle inversioni, e la istituì su nuove basi, facendone una dottrina indipendente sia dalla geometria elementare, sia dalla geometria di posizione e da qualsiasi altro presupposto analitico o geometrico. Concetti primitivi sono quelli di *punto* e di *cerchio*, inteso come figura individuata da tre punti.

Sebbene nell'opera scientifica del PIERI sia predominante, come si è visto, l'interesse per le questioni riguardanti la geometria, tuttavia sono di notevole interesse le due brevi note che egli pubblicò negli anni 1906-'7 sopra i fondamenti dell'aritmetica.

Nella prima, «Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmétique», l'Autore dà una interpretazione della nozione di numero intero nell'ambito della logica delle classi, atta a provare la compatibilità dei postulati dell'aritmetica secondo PEANO-PADOA, ed inoltre espone delle interessanti considerazioni sulla possibilità di dimostrare la compatibilità di un sistema di postulati, nelle quali si può scorgere una anticipazione — in un senso che andrebbe precisato — di un noto risultato del GÖDEL.

Nel secondo lavoro, «Sopra gli assiomi aritmetici», scelte come nozioni primitive quelle di *numero* e *sussequente* di un numero, viene stabilito un sistema di postulati, che dal punto di vista logico semplifica la teoria del PEANO: infatti, non solo risultano ridotti il numero dei concetti primitivi e dei postulati, ma viene sostituito al principio di induzione, che figura fra i postulati del PEANO, un postulato esistenziale più semplice e di uso più facile.

Forse, nel 1911 stava iniziando una nuova fase nell'attività scientifica del PIERI. Egli infatti venne allora attratto dal calcolo vettoriale di BURALI-FORTI e MARCOLONGO; ma ci restano in questo indirizzo solo tre lavori («Notes géométriques» al volume *Analyse vectorielle générale*, I, di tali autori; «Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi», «Sui sistemi ∞^1 di superficie»), essendo egli venuto a mancare, a 53 anni, nel 1913.

In questo sguardo d'insieme sulla sua opera scientifica, è opportuno fissare l'attenzione oltre che sui risultati ottenuti, anche sul metodo rigoroso che il PIERI seguì nel condurre ogni sua ricerca, e in virtù del quale la sua opera, pur avendo un netto carattere di originalità, va ad inserirsi nella corrente della scuola logica del PEANO. L'Autore stesso ne fa cenno esplicitamente più volte nei suoi lavori. Riportiamo, come esempio, il seguente passo tratto dall'introduzione alla memoria «La geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo»: «Del poco che per avventura si troverà qui da lodare mi professo grandemente obbligato alla Logica Algebrica, in cui riconosco il più opportuno e più valido strumento a questo genere di studi; non soltanto per l'efficacia dei simboli in sè, quanto ancora in virtù degli abiti intellettuali, che i metodi e le dottrine di questa scienza si manifestan capaci di educare e promuovere; ed anche per certa loro facoltà suggestiva, che guida spesso ad osservazioni e ricerche non curate altrimenti. Tutte le nostre proposizioni si posson facilmente tradurre in simboli logici; anzi la massima parte furon pensate e scritte dapprima secondo l'ideografia costrutta dal professore G. PEANO».