
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO KÁRTESZI

Due piccoli contributi alla geometria elementare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
15 (1960), n.1, p. 54–58.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_54_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Due piccoli contributi alla geometria elementare.

Nota di FRANCESCO KARTESZI (a Budapest)

Sunto. - *Mi occuperò di dimostrare nuovamente un certo teorema ben noto, ed indicherò un nuovo problema ancora aperto.*

Il primo tema.

Consideriamo le pavimentazioni geometriche con poligoni regolari fra loro congruenti.

(¹¹) All'elica circolare avente in un punto le stesse curvature di una curva data (la seconda curvatura essendo beninteso definita nel modo tradizionale), cioè alla nostra elica di curvatura, si accenna in G. LORIA, *Curve sghembe speciali*, Vol. I, Bologna, Zanichelli (1925), p. 12.

I vertici dei poligoni elementari, diremo punti di reticolo, e l'insieme dei punti detti si chiama *reticolo del tipo 1°, 2°, 3°*.

Consideriamo un ennagono regolare con vertici appartenenti al reticolo. Un poligono così fatto non è necessariamente un poligono elementare del reticolo. Tale poligono si chiama generalmente poligono del reticolo.

È ben noto che il reticolo 1° non ha triangoli regolari e i reticoli 2° e 3° non hanno quadrati. Le dimostrazioni conosciute

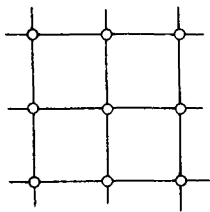


Fig. 1

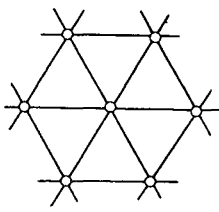


Fig. 2

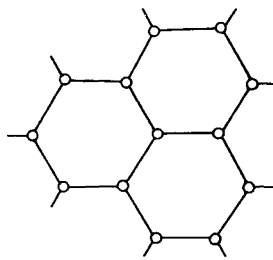


Fig. 3

non sono abbastanza elementari. Ho fatto una dimostrazione veramente elementare.

Ciascuno di questi reticoli è un insieme di punti soddisfacenti ai due postulati seguenti:

(A) *C'è una distanza, la minima fra le distanze determinate da due punti arbitrari dell'insieme.*

(B) *Una rotazione di ampiezza eguale ad un certo ω intorno ad un punto arbitrario dell'insieme muta l'insieme in se stesso; dove rispettivamente si ha:*

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{3}, \quad \omega = \frac{2\pi}{3}.$$

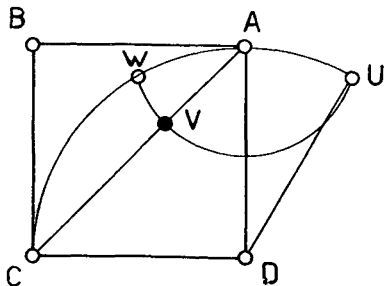


Fig. 4

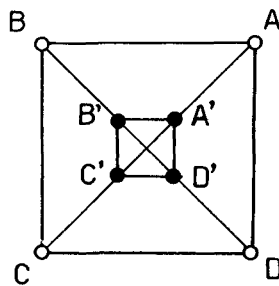


Fig. 5

Il teorema in questione, per esempio nel terzo caso, afferma, che *il reticolo non contiene quadrati* (Fig. 4 e 5).

Verifichiamo quest'affermazione; e supponiamo per assurdo che $ABCD$ sia un quadrato del terzo reticolo.

Siano gli angoli CDU ed UAV uguali ad ω , allora in virtù

$$\angle BCU = \angle UAV = \omega = \frac{\pi}{2}$$

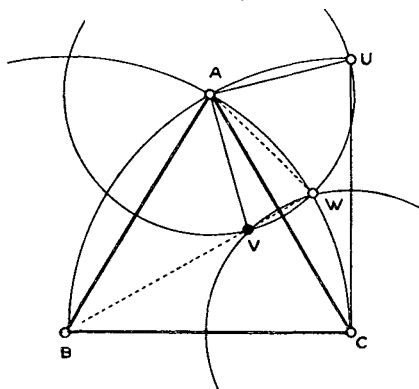


Fig. 6

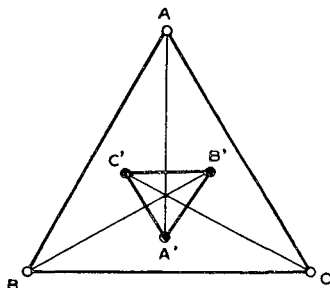


Fig. 7

del postulato (B), i punti U e V sono punti del terzo reticolo. Manifestamente

$$AV < \frac{1}{2} AC,$$

e quindi si può costruire un quadrato $A'B'C'D'$ del reticolo nell'interno del quadrato $ABCD$. Ripetendo questo procedimento, in virtù del postulato (A), si presenta una contraddizione. Questa contraddizione prova l'asserto. Le dimostrazioni negli altri casi sono analoghe. (Le fig. 6 e 7 si riferiscono al caso del primo reticolo).

Il secondo tema.

Consideriamo un dominio convesso, se tutti i quadrilateri equiangoli circoscritti al dominio sono quadrati fra loro congruenti, allora il dominio si chiama *dominio convesso equilargo*. Sopprimendo la condizione che i quadrati circoscritti siano fra loro congruenti,

si presenta un tipo nuovo di dominio convesso, diremo: *dominio convesso involuppato da quadrati*.

Se nella definizione precedente invece di quadrilateri equiangoli prendiamo ennagoni equiangoli, allora si presenta un tipo più generale del precedente. Precisamente consideriamo un dominio convesso, che abbia la proprietà seguente: Tutti gli ennagoni equiangoli circoscritti al dominio sono simultaneamente poligoni equilateri, cioè sono ennagoni regolari. Diremo in breve: *dominio convesso involuppato da ennagoni regolari*.

Un esempio semplice, se il dominio convesso non è equilargo, è un quadrato e gli ennagoni regolari circoscritti del dominio sono anche quadrati.

Per studiare i domini convessi involuppati da ennagoni regolari sarà utile il lemma seguente:

(L) *Siano A e B simultaneamente domini convessi involuppati da ennagoni regolari, e designando con $A + B$ la somma Minkovskiana di A e B, allora il dominio $A + B$ è un dominio convesso involuppato da ennagoni regolari.*

Notiamo che un poligono convesso non può essere mai un dominio equilargo, ma ci sono poligoni convessi, i quali sono domini convessi involuppati da ennagoni regolari. Ne segue il problema sopradetto:

(P) *Designando col simbolo $m \{ n \}$ il numero dei tipi fra loro differenti degli ennagoni che sono poligoni involuppati da ennagoni regolari, si presenta la domanda: che cosa possiamo stabilire della struttura e dei valori di $m \{ n \}$?*

Finora ho trovato qualche risultato particolare nel caso che sia $m = 4$. Per esempio:

$$(\alpha) \quad 4 \{ 5 \} = 1, \quad 4 \{ 6 \} = 4.$$

(β) Un quadrilatero è un poligono involuppato da quadrati se, e soltanto se, quel quadrilatero è un quadrato.

(γ) Se i quadrati Q_1 e Q_2 non hanno vertici comuni, e nessun vertice di uno di essi è situato nell'interno dell'altro, ma quei quadrati hanno un punto interno comune, allora il poligono

$$P = Q_1 \cap Q_2$$

è un poligono involuppato da quadrati.

Se invece dei quadrati Q_1 e Q_2 prendiamo ennagoni regolari P e P' , allora

$$S = P \cap P'$$

è un poligono involuppato da ennagoni regolari (Fig. 9).

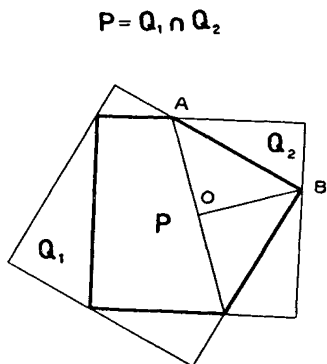


Fig. 8

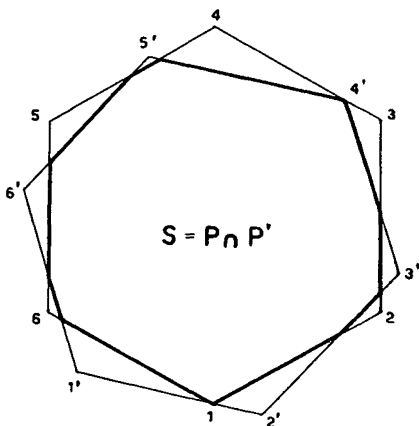


Fig. 9

(δ) Il pentagono involuppato da quadrati si può costruire nel modo della fig. 8, cioè O il centro di Q_2 ed $AOB = \frac{\pi}{2}$.

Credo che non sarà difficile di trovare delle generalizzazioni.