
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO VILLA

Sulla definizione della torsione di una curva sghemba.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
15 (1960), n.1, p. 47–54.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_47_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Sulla definizione della torsione di una curva sghemba.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna)

Summary. - *The torsion of a circular helix having been defined, it is defined the torsion of a twisted curve C in one of its points, as that of a certain circular helix determined by appropriate contacts.*

1. - Nel II° volume delle mie *Lezioni di Geometria*, tuttora in corso di stampa ⁽¹⁾, ho creduto opportuno dare al Capitolo sui contatti di curve piane, di curve e superficie nello spazio, quel posto che effettivamente gli compete per gli studi locali sulle curve, sulle superficie e sulle trasformazioni. Ciò consente di raccogliere sotto un punto di vista unitario molte nozioni di carattere locale, della geometria metrica e proiettiva, che spesso nei trattati propedeutici vengono introdotte, direi di volta in volta, mentre provengono in definitiva tutte da quella nozione di contatto.

La via che generalmente si segue nella geometria differenziale è quella di sostituire all'ente geometrico A un ente geometrico più semplice B determinato rispetto al primo da convenienti contatti e di trasportare poi all'ente A una nozione, una proprietà dell'ente B . Ora, nella geometria metrica delle curve, le curve più semplici sono la retta, la circonferenza e l'elica circolare (accomunate fra l'altro dalla proprietà di essere, in ogni loro parte, sovrapponibili a se stesse).

⁽¹⁾ M. VILLA, *Lezioni di Geometria*, Vol. II, Cedam, Padova. Questo volume — per gli studenti del 2° anno del 1° biennio, di matematica, di matematica-fisica e di ingegneria — s'ispira ad alcune idee espresse nella Nota: M. VILLA, *A proposito dei corsi di geometria nelle nostre Università*, questo Bollettino, Ser. III, vol. 13, p. 426 (1958).

Come la flessione di una curva sghemba (e così la curvatura di una curva piana) si può definire mediante il cerchio osculatore, viene spontaneo, dal punto di vista esposto, di definire la torsione di una curva sghemba mediante quella di un'elica circolare convenientemente individuata per mezzo della nozione di contatto. Naturalmente bisognerà aver prima definito la torsione per un'elica circolare.

Nel presente lavoro, dopo aver definita (n. 2) la torsione per un'elica circolare, viene considerata (n. 4), in un punto di una curva sghemba, una certa elica circolare (chiamata *elica di curvatura*) determinata da opportuni contatti. Infine (n. 5) viene definita la torsione (in valore assoluto e segno) di una curva sghemba come quella della relativa elica di curvatura.

Quanto viene esposto nella presente Nota si trova pure nelle mie *Lezioni* citate. Non mi consta che il procedimento da me seguito si trovi in altri trattati, sebbene la novità, in argomenti tanto elementari e classici, sia sempre molto problematica.

2. - Torsione dell'elica circolare.

Consideriamo l'elica circolare. In un sistema cartesiano ortogonale (monometrico), assumendo come asse z l'asse del cilindro circolare retto su cui l'elica giace, le equazioni parametriche dell'elica sono

$$(1) \quad x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad z = hu$$

dove r, h sono costanti reali.

Il numero $|r|$ è la misura del raggio dell'elica, mentre $2|h|\pi$ è il passo dell'elica e $|h|$ è il passo ridotto dell'elica. Per la flessione K dell'elica (costante al variare del punto sulla curva) si ha

$$(2) \quad K = \frac{1}{R} = \frac{|r|}{r^2 + h^2}.$$

Si consideri un triangolo rettangolo ABC nel quale i cateti AB, BC sono dati da $AB = |r|, BC = |h|$ (fig. 1). Condotta per C la perpendicolare alla AC , sia D il punto in cui tale retta interseca la AB ; condotta per A la perpendicolare alla AC , sia E il punto in cui tale retta interseca la BC .

Orbene:

Il raggio R del cerchio osculatore all'elica circolare è dato da

$$R = AD.$$

Infatti dal triangolo rettangolo ACD , si ha

$$|r| : |h| = |h| : (AD - |r|).$$

ossia

$$h^2 = |r| \cdot (AD - |r|),$$

od anche

$$r^2 + h^2 = |r| \cdot AD.$$

Dalla (2) segue appunto $R = AD$.

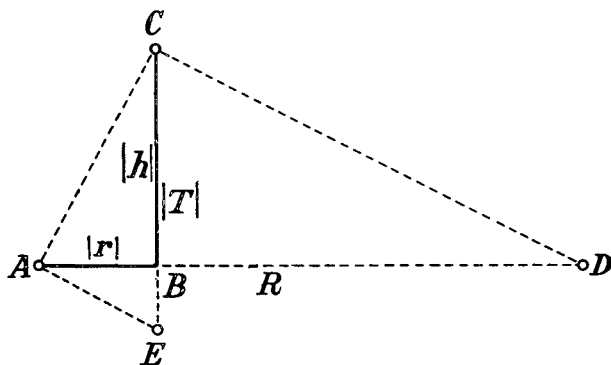


Fig. 1.

Il segmento CE della fig. 1 (o la sua misura in valore assoluto), costruito in modo analogo ad AD a partire dai dati $|r|$ e $|h|$, si chiamerà *raggio di torsione* o *raggio di seconda curvatura dell'elica circolare*.

Dal triangolo rettangolo ACE , si ha

$$|h| : |r| = |r| : (CE - |h|),$$

da cui

$$r^2 = |h| \cdot (CE - |h|),$$

e quindi

$$CE = \frac{r^2 + h^2}{|h|}.$$

Si chiamerà *torsione* o *seconda curvatura dell'elica circolare*

l'inverso del numero CE preso col segno $+$ o $-$ secondo che l'elica è sinistrorsa o destrorsa ⁽²⁾ ⁽³⁾.

Denotata la torsione con $\frac{1}{T}$, il raggio di torsione è $|T| = CE =$
 $= \frac{r^2 + h^2}{|h|}.$

3. - Equazioni dell'elica circolare riferita ad un suo triedro principale.

Assumiamo ora come triedro cartesiano di riferimento il triedro principale dell'elica (1) nel punto $A(r, 0, 0)$. La tangente t all'elica (1) nel punto A ha le equazioni $x = r, \frac{y}{r} = \frac{z}{h}$. Assumiamo la retta t come asse x' , l'asse x (normale principale) come asse y' , la binormale in A come asse z' , come unità di misura la stessa unità del riferimento x, y, z , come verso positivo sull'asse y' il verso positivo dell'asse x . Come formule di trasformazione dei due sistemi cartesiani ortogonali si possono assumere le seguenti

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(ry + hz) \\ y' &= x - r \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(-hy + rz). \end{aligned}$$

Pertanto nel nuovo riferimento le equazioni dell'elica (1) divengono (posto $x' = x, y' = y, z' = z$)

$$\begin{aligned} (3) \quad x &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}(r^2 \sin u + h^2 u) \\ y &= r(\cos u - 1) \\ z &= \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}}(-\sin u + u). \end{aligned}$$

⁽²⁾ Com'è ben noto, un'elica circolare si dice destrorsa o sinistrorsa secondo che ad un osservatore disposto lungo l'asse del cilindro su cui l'elica giace (ma del resto a piacere nell'uno o nell'altro dei due versi), l'elica appare descritta da un punto che s'innalzi girando dalla sua destra alla sua sinistra oppure dalla sua sinistra alla sua destra.

⁽³⁾ Se $h = 0$, l'elica (1) si riduce ad una circonferenza e la *torsione* di una circonferenza si assume uguale a zero.

4. - Eliche circolari osculatrici una curva sgheмба. Elica di curvatura.

Si ha:

Esistono ∞^1 eliche circolari che osculano una data curva sgheмба $\mathcal{C}$ in un punto semplice ordinario (proprio) O di questa ⁽⁴⁾. E fra queste ne esiste una sola la cui proiezione ortogonale sul piano rettificante (in O) ha contatto del 3° ordine in O con la proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ su tale piano.

La curva $\mathcal{C}$, riferita al triedro principale in O , sia rappresentata, nell'intorno di O , dagli sviluppi

$$(4) \quad \begin{aligned} y &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + [4] \\ z &= b_3 x^3 + [4], \end{aligned}$$

le a, b costanti reali e indicando con $[4]$ l'insieme dei termini di grado > 3 .

Intanto si osservi che se due curve si osculano in un punto hanno ivi lo stesso triedro principale. Ora, affinchè la curva (4) e l'elica (3) si oscolino in O , posto

$$\Phi(u) = r(\cos u - 1) - a_2 \frac{1}{r^2 + h^2} (r^2 \sin u + h^2 u)^2 - \dots,$$

$$\Psi(u) = \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}} (-\sin u + u) - \dots,$$

dev'essere

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(0) = \Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0,$$

il che impone

$$(5) \quad \frac{r}{r^2 + h^2} = -2a_2 \quad (5).$$

⁽⁴⁾ Per punto ordinario s'intende un punto semplice nel quale la tangente ha esattamente contatto del 1° ordine con la curva.

⁽⁵⁾ Risultato prevedibile in quanto le due curve devono avere in O lo stesso elemento curvilineo $E_2: y = a_2 x^2, z = 0$. D'altra parte a_2 determina (a meno del segno) la flessione la quale per l'elica circolare è data appunto da

$$\frac{|r|}{r^2 + h^2} \quad (\text{n. } 2).$$

Fra le ∞^1 eliche circolari aventi in O lo stesso triedro principale di $\mathcal{C}$, rappresentate dalle (3) (variabili al variare dei parametri r, h), quelle osculatrici a $\mathcal{C}$ in O sono le ∞^1 per cui r, h verificano la (5) ⁽⁶⁾.

Dimostriamo ora che esiste una sola elica circolare la cui proiezione ortogonale sul piano rettificante ha contatto del 3° ordine (almeno) con la proiezione ortogonale $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ su tale piano.

Il piano rettificante ha l'equazione $y=0$. Nel piano $y=0$ la $\mathcal{C}'$ ha l'equazione

$$(6) \quad z = b_3 x^3 + [4],$$

mentre la proiezione ortogonale dell'elica (3) ha le equazioni parametriche

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} (r^2 \sin u + h^2 u) \\ z &= \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}} (-\sin u + u). \end{aligned}$$

Ora, affinché la curva (6) e la curva (7) abbiano un contatto del 3° ordine in O , posto

$$\Omega(u) = \frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}} (-\sin u + u) - b_3 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right)^3 (r^2 \sin u + h^2 u)^3 - \dots,$$

dev'essere

$$\Omega(0) = \Omega'(0) = \Omega''(0) = \Omega'''(0) = 0,$$

il che impone

$$(8) \quad \frac{hr}{(r^2 + h^2)^2} = -6b_3.$$

Le (5), (8) determinano univocamente i valori di r e di h (7). L'asserto è così dimostrato.

⁽⁶⁾ Si osservi che fra le ∞^1 eliche osculatrici rappresentate dalle (3), (5) si ha per $h=0$ il cerchio osculatore a C in O .

⁽⁷⁾ Si trova $r = -\frac{2a_2^3}{4a_2^4 + 9b_3^2}$, $h = \frac{3a_2b_3}{4a_2^4 + 9b_3^2}$. Si noti che $\frac{h}{r^2 + h^2} = 3\frac{b_3}{a_2}$.

L'elica che è individuata dalle proprietà espresse in questo teorema si chiamerà *elica di curvatura* in O alla curva $\mathcal{C}$ ⁽⁸⁾.

Si osservi che, essendo il piano rettificante in O a $\mathcal{C}$ parallelo all'asse dell'elica di curvatura, la proiezione ortogonale (7) di questa su detto piano rettificante è una sinusoide.

Un osservatore, collocato sull'una o sull'altra pagina del piano osculatore a $\mathcal{C}$ in O e ritto in O che diriga lo sguardo verso la direzione positiva della normale principale ⁽⁹⁾, vedrà la curva *innalzarsi* passando in O dalla sua sinistra alla sua destra, oppure dalla sua destra alla sua sinistra; ed è evidente che il medesimo fatto si produrrà anche se l'osservatore si immagina capovolto nella sua posizione. Nel primo caso si dice che la curva $\mathcal{C}$ è *destrorsa* in O , nel secondo caso che è *sinistrorsa*.

Orbene:

La curva $\mathcal{C}$ è in un suo punto O destrorsa o sinistrorsa secondo che l'elica di curvatura in O a $\mathcal{C}$ è destrorsa o sinistrorsa.

La tangente t in O a $\mathcal{C}$ e la binormale b in O a $\mathcal{C}$ (sulle quali fissiamo i versi positivi) dividono il piano rettificante (in O a $\mathcal{C}$) in quattro regioni. Come di consueto si dirà 1^a regione quella limitata dalle semirette positive di t e di b , 2^a regione quella limitata dalla semiretta negativa di t e da quella positiva di b , ecc. Ciò posto se la curva $\mathcal{C}$ fosse in O destrorsa (sinistrorsa) e l'elica di curvatura in O a $\mathcal{C}$ fosse in O sinistrorsa (destrorsa), delle loro proiezioni ortogonali sul piano rettificante, che hanno entrambe un flesso in O , una (nelle vicinanze di O) si troverebbe nelle regioni 1^a e 3^a, l'altra nelle regioni 2^a e 4^a. Ma ciò non è perchè due curve cosiffatte non possono avere in O un contatto > 2 ⁽¹⁰⁾, mentre le nostre curve proiezioni hanno in O un contatto del 3^o ordine (almeno).

⁽⁸⁾ Quando (e solo quando) il punto O è stazionario, l'elica di curvatura si riduce al cerchio osculatore. Infatti O è stazionario quando (e solo quando) nelle (4) si ha $b_3 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$. Dalla (8) segue $h = 0$ e l'elica di curvatura si riduce appunto al cerchio osculatore. Nel seguito del presente n^o, questo caso si riterrà escluso.

⁽⁹⁾ La curva giace in prossimità di O tutta da una stessa parte del piano rettificante e come pagina positiva di questo piano si assume quella rivolta verso la curva. Come direzione positiva sulla normale principale si assume poi quella verso cui tale pagina è rivolta.

⁽¹⁰⁾ Infatti una curva avente un flesso in O , con tangente l'asse x , rappresentata quindi dall'equazione $y = ax^3 + \dots$, si trova (nelle vicinanze di O) nelle regioni 1^a e 3^a se $a > 0$, nelle regioni 2^a e 4^a se $a < 0$.

5. - Torsione di una curva sgheмба.

Data una curva sgheмба $\mathcal{C}$ e fissata un'unità di misura, si chiamerà *torsione* o *seconda curvatura* $\frac{1}{T}$ di $\mathcal{C}$ in un suo punto semplice ordinario (proprio) P la torsione dell'elica di curvatura in P a $\mathcal{C}$ (nn. 2, 4).

Che la torsione così definita coincida con la torsione definita nel modo tradizionale, si può verificare agevolmente.

Assunto come triedro cartesiano di riferimento il triedro principale di $\mathcal{C}$ in O , la curva $\mathcal{C}$ si può rappresentare nell'intorno di O con le equazioni (4).

La torsione di $\mathcal{C}$ in O , secondo la definizione tradizionale, vale (in valore assoluto) $3 \left| \frac{b_3}{a_2} \right|$. Ma la torsione di $\mathcal{C}$ in O è, secondo la nostra definizione, la torsione dell'elica di curvatura in O a $\mathcal{C}$ (n. 2) e quest'ultima è appunto data (in valore assoluto), per le (5), (8), da

$$\frac{|h|}{r^2 + h^2} = 3 \left| \frac{b_3}{a_2} \right|.$$

Per quanto riguarda il segno, la coincidenza delle due definizioni è poi dimostrata dalla proposizione con cui si chiude il n. 4 ⁽¹¹⁾.